第四节　基变换与坐标变换

主要内容

- 基变换
- 坐标变换公式
- 举例

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

一、基变换

1. 定义

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 与 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n'$ 是 n 维线性空间

V 中两组基，它们的关系是

$$\begin{cases} \varepsilon_1' = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n , \\ \varepsilon_2' = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n , \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n' = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n . \end{cases} \qquad (1)$$

称 (1) 为**基变换公式**.

2. 基变换公式的矩阵形式

把基写成一个 $1\times n$ 矩阵，于是(1)可写成如下矩阵形式：

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\triangleq(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$ 称矩阵A为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 到 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\ldots,\varepsilon_n'$ 的**过渡矩阵**.

思考：1. 由于$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n'$是线性无关的，所以过渡矩阵$A$的列向量组线性无关，能否得到过渡矩阵$A$可逆？

2.ε_i'关于基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$的坐标是？

3. 运算规律

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 是 V 中两个向量组， $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ 是两个 $n\times n$ 矩阵，则

1) $((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A)B=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(AB)$

2) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A+(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)B$

$=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(A+B)$；

3) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A+(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)A$

$=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n)A$.

二、坐标变换公式

若$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')$

$$\text{设}\ \xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$$

问：求这两组基下的该向量的坐标之间的关系式？

因为

$$\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$$

所以 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$, 或 $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

定理 设 V_n 中的元素 ξ，在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下的坐标为 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$，在基 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ 下的坐标为 $(x_1', x_2', \ldots, x_n')^T$. 若两个基满足关系式 (1)，则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \text{或} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

思考：若任一元素的两种坐标满足坐标变换公式(2)，则两个基满足变换公式 是否满足(1)？ （Y）

三、举例

上一节的例题2，两组基之间的关系如何表示？

不同基下坐标的关系是什么？

例 1 在 P^4 中，求由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的过渡矩阵，并求向量 ξ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标. 设

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1,2,2,-1), \\ \varepsilon_2 = (1,1,-3,3), \\ \varepsilon_3 = (1,1,-1,2), \\ \varepsilon_4 = (3,2,0,-1), \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_1 = (1,1,-2,0), \\ \eta_2 = (2,1,3,-1), \\ \eta_3 = (-2,2,1,-1), \\ \eta_4 = (1,3,1,2), \end{cases}$$

$$\xi = (3,-1,2,4).$$

解 要求由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$到基$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$的过渡矩阵. 即要用$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$表示$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$.

设过渡矩阵为 C，则

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)C.$$

令 $A=(\varepsilon_1^{\mathrm{T}},\varepsilon_2^{\mathrm{T}},\varepsilon_3^{\mathrm{T}},\varepsilon_4^{\mathrm{T}})$, $B=(\eta_1^{\mathrm{T}},\eta_2^{\mathrm{T}},\eta_3^{\mathrm{T}},\eta_4^{\mathrm{T}})$,

(即以基中的向量为列构造矩阵)，于是有

$$B=AC,$$

解之得

$$C=A^{-1}B.$$

用矩阵的初等变换求 $B^{-1}A$：把矩阵 $(B|A)$ 中的 B 变成 E，则 A 即变成 $B^{-1}A$．计算如下：

$$(B\,|\,A)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{3}{7} & \frac{39}{14} & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{7} & -\frac{16}{7} & \frac{20}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & \frac{4}{7} & -\frac{17}{14} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

即得

$$C = A^{-1}B = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 39 & 20 \\ 22 & -32 & 40 & 4 \\ -28 & 42 & -56 & 14 \\ 5 & 8 & -17 & -8 \end{pmatrix}.$$

求向量 ξ 在基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 下的坐标，即用基 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 表示向量 ξ. 用矩阵的初等行变换来

求解：先构造矩阵

$$M = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \xi),$$

再对矩阵 M 实施初等行变换，使之成为行最简形矩阵即得.

$$M=\begin{pmatrix}1&2&-2&1&3\\1&1&2&3&-1\\-2&3&1&1&2\\0&-1&-1&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{109}{85}\\0&1&0&0&-\frac{4}{85}\\0&0&1&0&-\frac{8}{5}\\0&0&0&1&\frac{20}{17}\end{pmatrix}.$$

所以向量 ξ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的坐标为

$$\left(-\frac{109}{85},-\frac{4}{85},-\frac{8}{5},\frac{20}{17}\right).$$

例 2 在 P^3 中求向量 $\alpha=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$ 在基

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$$

下的坐标.

解 求向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标,即用基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示向量 α. 用矩阵的初等行变换来求解: 先构造矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha)$,再对矩阵 A 实施初等行变换,使之成为行最简形矩阵即得.

$$A=\begin{pmatrix}1&6&3&3\\3&3&1&7\\5&2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&33\\0&1&0&-82\\0&0&1&154\end{pmatrix}$$

所以

$$\alpha=33\alpha_1-82\alpha_2+154\alpha_3$$

则所求坐标为

$$\alpha=(33,-82,154)^{\mathrm{T}}$$

例 3 在 $P[x]_4$ 中取两个基

$$\alpha_1 = x^3 + 2x^2 - x, \qquad \alpha_2 = x^3 - x^2 + x + 1,$$

$$\alpha_3 = -x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad \alpha_4 = -x^3 - x^2 + 1;$$

及

$$\beta_1 = 2x^3 + x^2 + 1, \qquad \beta_2 = x^2 + 2x + 2,$$

$$\beta_3 = -2x^3 + x^2 + x + 2, \quad \beta_4 = x^3 + 3x^2 + x + 2.$$

求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的过渡矩阵和坐标变换公式.

解 将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 表示.

由
$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(x^3,x^2,x,1)A$$
$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(x^3,x^2,x,1)B$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

得

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}B$$

故过渡矩阵为 $A^{-1}B$，坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

用矩阵的初等变换求 $B^{-1}A$：把矩阵 $(B|A)$ 中的 B 变成 E，则 A 即变成 $B^{-1}A$. 计算如下：

$$(B|A)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

即得

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

小结和作业

1.请叙述坐标变换公式及其意义?

2.请叙述过渡矩阵的概念及其两组不同基下坐标的关系式?

3.作业见习题册.