

5.4 二次曲线的直径



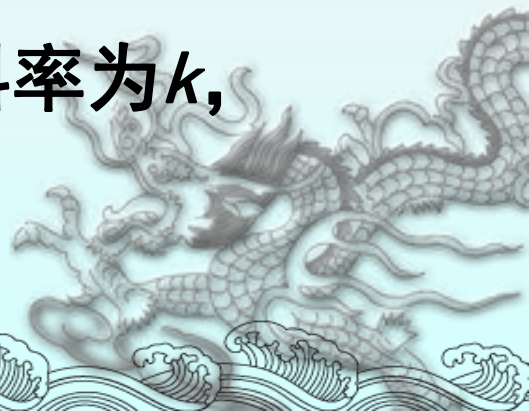
一、二次曲线的直径

定理1 二次曲线的一族平行弦的中点轨迹是一条直线.

定义 二次曲线的平行弦中点轨迹叫做这个二次曲线的**直径**，它所对应的平行弦，叫做共轭于这条直径的**共轭弦**；而直径也叫做共轭于平行弦方向的直径.

推论 二次曲线的一族平行弦的斜率为 k ，那么共轭于这族**平行弦直径方程**为

$$F_1(x, y) + kF_2(x, y) = 0$$



定理 2 中心二次曲线的直径通过曲线的中心，无心二次曲线的直径平行于曲线的渐近方向，线心二次曲线的直径只有一条，即曲线的中心直线

例 1 求椭圆或双曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的直径.

例 2 求抛物线 $y^2 = 2px$ 的直径.



二、共轭方向与共轭直径

中心二次曲线的非渐近方向的共轭方向仍然是非渐近方向，而在非中心二次曲线的情形是渐近方向.

定义 中心曲线的一对具有相互共轭方向的直径叫做一对**共轭直径**.



共轭方向与共轭直径

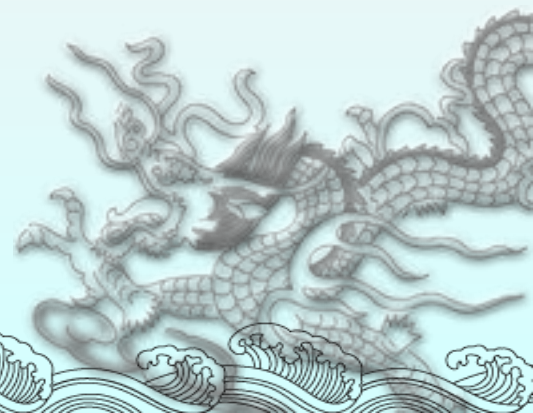
二次曲线的与非渐近方向 $X:Y$ 共轭的直径方向

$$X':Y' = -(a_{12}X + a_{22}Y) : (a_{11}X + a_{12}Y)$$

(1)

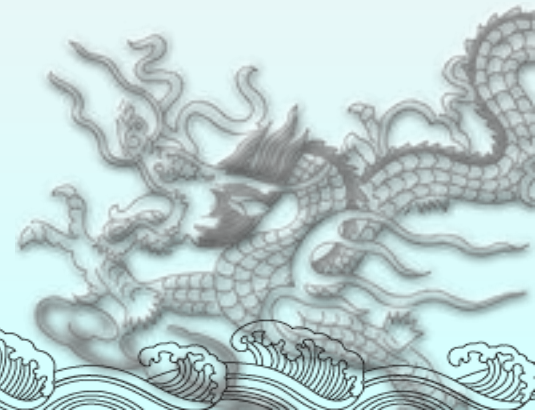
叫做非渐近方向 $X:Y$ 的共轭方向，所以有

$$X' = -(a_{12}X + a_{22}Y)t \quad ,$$



$$\begin{aligned}
& \Phi(X', Y') \\
&= a_{11} (a_{12}X + a_{22}Y)^2 t^2 \\
&\quad - 2a_{12} (a_{12}X + a_{22}Y) \cdot (a_{11}X + a_{12}Y) t^2 \\
&\quad + a_{22} (a_{11}X + a_{12}Y)^2 t^2 \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) (a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2) t^2 \\
&= I_2 \Phi(X, Y) t^2
\end{aligned}$$

+



因为 $X:Y$ 为非渐近方向, 所以 $\Phi(X, Y) \neq 0$,

另外又有 $t \neq 0$,

因此, 当 $I_2 \neq 0$ 即二次曲线为中心曲线时, $\Phi(X', Y') \neq 0$;

当 $I_2 = 0$ 即有二次曲线为非中心曲线时, $\Phi(X', Y') = 0$,

这就是说, 中心二次曲线的非渐近方向的共轭方向仍然是非渐近方向, 而在非中心二次曲线的情形是渐近方向.



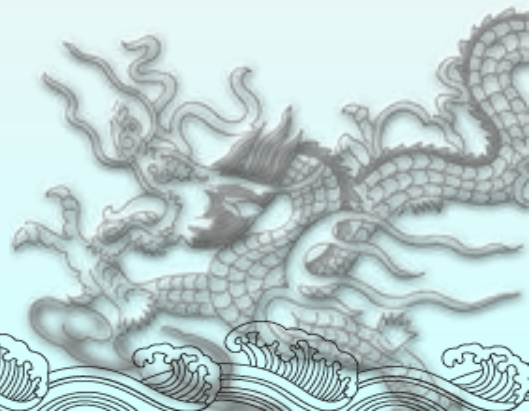
由 (1) 得二次曲线的非渐近方向 $X:Y$
与它的共轭方向 $X':Y'$ 之间的关系

$$a_{11}XX' + a_{12}(XY' + X'Y) + a_{22}YY' = 0$$

上式表明，两个方向 $X:Y$ 与 $X':Y'$ 是对称的，

因此，对中心曲线来说，非渐近方向 $X:Y$ 的共轭方向
为非渐近方向 $X':Y'$ ，

而 $X':Y'$ 的共轭方向就是 $X:Y$ 。



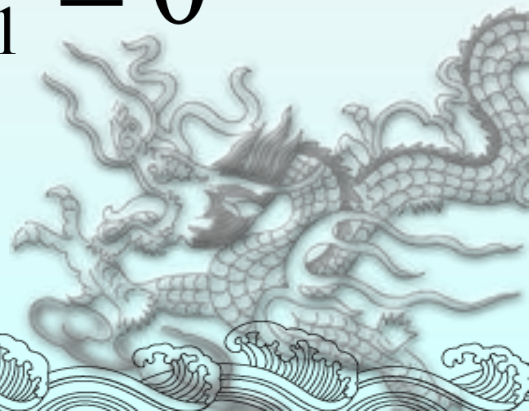
定义 2 中心曲线的一对具有相互共轭方向的直径叫做一对共轭直径.

设

$$\frac{Y}{X} = k, \quad \frac{Y'}{X'} = k',$$

则

$$a_{22}kk' + a_{12}(k + k') + a_{11} = 0$$

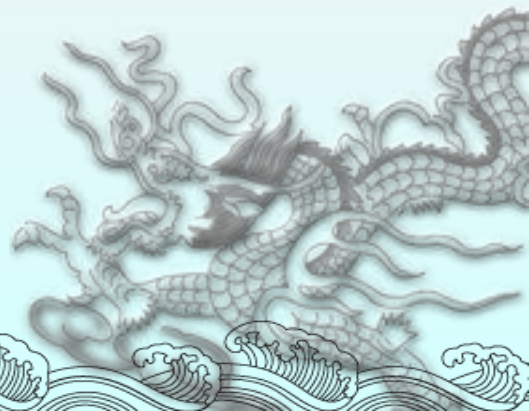


如椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一对共轭直径的斜率 k

与 k' 有着关系 $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$,

而双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一对共轭直径的斜率 k

与 k' 有着关系 $kk' = \frac{b^2}{a^2}$.



五、课堂小结

1. 求解曲线的直径方程；
2. 求解曲线的共轭方向和共轭直径方程。



思考题：

$\Phi(X, Y)$ 与二次曲线的主直径、主方向之间的关系？

