5.4二次曲线的直径

一、二次曲线的直径

定理1 二次曲线的一族平行弦的中点轨迹是一条直线.

定义 二次曲线的平行弦中点轨迹叫做这个二次曲线的直径，它所对应的平行弦，叫做共轭于这条直径的共轭弦；而直径也叫做共轭于平行弦方向的直径.

推论 二次曲线的一族平行弦的斜率为k，那么共轭于这族平行弦直径方程为

$F_1(x, y)+kF_2(x, y)=0$

定理 2 中心二次曲线的直径通过曲线的中心，无心二次曲线的直径平行于曲线的渐近方向，线心二次曲线的直径只有一条，即曲线的中心直线

例 1　求椭圆或双曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的直径.

例 2　求抛物线 $y^2=2px$ 的直径.

二、共轭方向与共轭直径

中心二次曲线的非渐近方向的共轭方向仍然是非渐近方向，而在非中心二次曲线的情形是渐近方向.

定义 中心曲线的一对具有相互共轭方向的直径叫做一对共轭直径.

共轭方向与共轭直径

二次曲线的与非渐近方向 $X:Y$ 共轭的直径方向

$$X':Y'=-\left(a_{12}X+a_{22}Y\right):\left(a_{11}X+a_{12}Y\right)$$

（1）

叫做非渐近方向 $X:Y$ 的共轭方向，所以有

$$X'=-\left(a_{12}X+a_{22}Y\right)t$$

，

$$
\begin{aligned}
&\Phi\left(X', Y'\right) \\
&= a_{11}\left(a_{12}X + a_{22}Y\right)^2 t^2 \\
&\quad -2a_{12}\left(a_{12}X + a_{22}Y\right)\cdot\left(a_{11}X + a_{12}Y\right)t^2 \\
&\quad +a_{22}\left(a_{11}X + a_{12}Y\right)^2 t^2 \\
&= \left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)\left(a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2\right)t \\
&= I_2\Phi\left(X, Y\right)t^2
\end{aligned}
$$

因为 $X:Y$ 为非渐近方向，所以 $\Phi(X,Y)\neq 0$，

另外又有 $t\neq 0$，

因此，当 $I_2\neq 0$ 即二次曲线为中心曲线时，$\Phi(X',Y')\neq 0$；

当 $I_2=0$ 即有二次曲线为非中心曲线时，$\Phi(X',Y')=0$，

这就是说，中心二次曲线的非渐近方向的共轭方向仍然是非渐近方向，而在非中心二次曲线的情形是渐近方向.

由（1）得二次曲线的非渐近方向 $X:Y$

与它的共轭方向 $X':Y'$ 之间的关系

$$a_{11}XX'+a_{12}\left(XY'+X'Y\right)+a_{22}YY'=0$$

上式表明，两个方向 $X:Y$ 与 $X':Y'$ 是对称的，

因此，对中心曲线来说，非渐近方向 $X:Y$ 的共轭方向为非渐近方向 $X':Y'$，

而 $X':Y'$ 的共轭方向就是 $X:Y$.

定义 2　中心曲线的一对具有相互共轭方向的直径叫做一对共轭直径.

设

$$\frac{Y}{X}=k,\quad \frac{Y'}{X'}=k',$$

则

$$a_{22}kk'+a_{12}\left(k+k'\right)+a_{11}=0$$

如椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的一对共轭直径的斜率$k$

与k'有着关系$kk'=-\frac{b^2}{a^2}$，

而双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的一对共轭直径的斜率$k$

与k'有着关系$kk'=\frac{b^2}{a^2}$.

五、课堂小结

1. 求解曲线的直径方程;

2. 求解曲线的共轭方向和共轭直径方程 。

思考题:

$\Phi(X,Y)$与二次曲线的主直径、主方向之间的关系 ?