1.3 习题以及综合除法介绍

设 $f_1(x)\neq 0$， $g_1(x)g_2(x)|f_1(x)f_2(x)$， 且 $f_1(x)|g_1(x)$，则 $g_2(x)|f_2(x)$.

证明：∵ $g_1 g_2 | f_1 f_2$

∴ $f_1 f_2 = g_1 g_2 h_1$ ①

又∵ $f_1 | g_1$

∴ $g_1 = f_1 h_2$ ②

②代入①：

$f_1 f_2 = f_1 h_2 g_2 h_1$ ③

又∵ $f_1 \neq 0$

∴ $f_2 = g_2 (h_1 h_2)$ ④

于是 $g_2 | f_2$

证明：$x|f(x)$ 的充分必要条件是 $x^2|f^2(x)$

$(\Leftarrow)$ ∵ $x^2|f^2(x)$

假设 $x\nmid f(x)$，于是 $f(x)=xg(x)+r$, $r\neq0$.

从而 $f^2(x)=x^2g^2(x)+2r\cdot g(x)\cdot x+r^2$ ②

∴ $r^2=f^2(x)+[-g^2(x)]x^2+(-2r)g(x)x$ ③

又∵ $x|x^2$，$x^2|f^2(x)$

∴ $x|$③的右端 从而 $x|r^2$，

这是不可能的。

因此 $x|f(x)$.

长除法 → 竖式除法

$$
\begin{array}{r|l}
g(x) & \quad 2x^2 - x - 3 \quad q(x) \\
x^2 - x + 1 & 2x^4 - 3x^3 + 4x + 1 \quad f(x) \\
 & 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 \\
\hline
 & \quad -x^3 - 2x^2 + 4x + 1 \\
 & \quad -x^3 + x^2 - x \\
\hline
 & \qquad -3x^2 + 5x + 1 \\
 & \qquad -3x^2 + 3x - 3 \\
\hline
 & \qquad r(x) \quad 2x + 4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|l|c}
g(x) & \quad f(x) & q(x) \\
x^2 - x + 1 & 2x^4 - 3x^3 + 4x + 1 & 2x^2 - x - 3 \\
 & 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 & \\
\hline
 & \quad -x^3 - 2x^2 + 4x + 1 & \\
 & \quad -x^3 + x^2 - x & \\
\hline
 & \qquad -3x^2 + 5x + 1 & \\
 & \qquad -3x^2 + 3x - 3 & \\
\hline
 & \qquad r(x) \quad 2x + 4 &
\end{array}
$$

辗转相除：

综合除法

综合除法

问题：设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$g(x)=x-b$.

求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$.

因为 $g(x)$ 是一次多项式，所以商式 $q(x)$ 为 $n-1$ 次多项式，

且余式 $r(x)$ 必为常数（可以为0），记为 r.

$$f(x)=(x-b)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0)+r$$

$$=b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-b\cdot b_{n-1})x^{n-1}+(b_{n-3}-b\cdot b_{n-2})x^{n-2}+\cdots+(b_0-b\cdot b_1)x+(r-b\cdot b_0)$$

$$a_n=b_{n-1},\quad a_{n-1}=b_{n-2}-b\cdot b_{n-1},\quad a_{n-2}=b_{n-3}-b\cdot b_{n-2},\quad\cdots,\quad a_1=b_0-b\cdot b_1,\quad a_0=r-b\cdot b_0$$

问题：设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$g(x)=x-b$.

求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$.

因为 $g(x)$ 是一次多项式，所以商式 $q(x)$ 为 $n-1$ 次多项式，

且余式 $r(x)$ ~~必~~ 为常数（可以为0），记为 r.

$$f(x)=(x-b)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0)+r$$

$$=b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-b\cdot b_{n-1})x^{n-1}+(b_{n-3}-b\cdot b_{n-2})x^{n-2}+\cdots+(b_0-b\cdot b_1)x+(r-b\cdot b_0)$$

$a_n=b_{n-1}$, $a_{n-1}=b_{n-2}-b\,b_{n-1}$, $a_{n-2}=b_{n-3}-b\,b_{n-2}$, $\cdots$, $a_1=b_0-b\,b_1$, $a_0=r-b\,b_0$

$$\begin{aligned}
b_{n-1}&=a_n\\
b_{n-2}&=a_{n-1}+b\cdot b_{n-1}\\
b_{n-3}&=a_{n-2}+b\cdot b_{n-2}\\
&\cdots\cdots\\
b_1&=a_2+b\cdot b_2\\
b_0&=a_1+b\cdot b_1\\
r&=a_0+b\cdot b_0
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
b & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0\\
 & & b\cdot b_{n-1} & b\cdot b_{n-2} & \cdots & b\cdot b_2 & b\cdot b_1 & b\cdot b_0\\
\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & r
\end{array}$$

3．求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 与余式：

1）$f(x)=2x^5-5x^3-8x, g(x)=x+3$；

-3	2	0	-5	0	-8	0
+		(-3)×2	(-3)×(-6)	-3×13	-3×(-39)	(-3)×109
	2	-6	13	-39	109	-327

$$q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$$

$$r(x)=-327$$

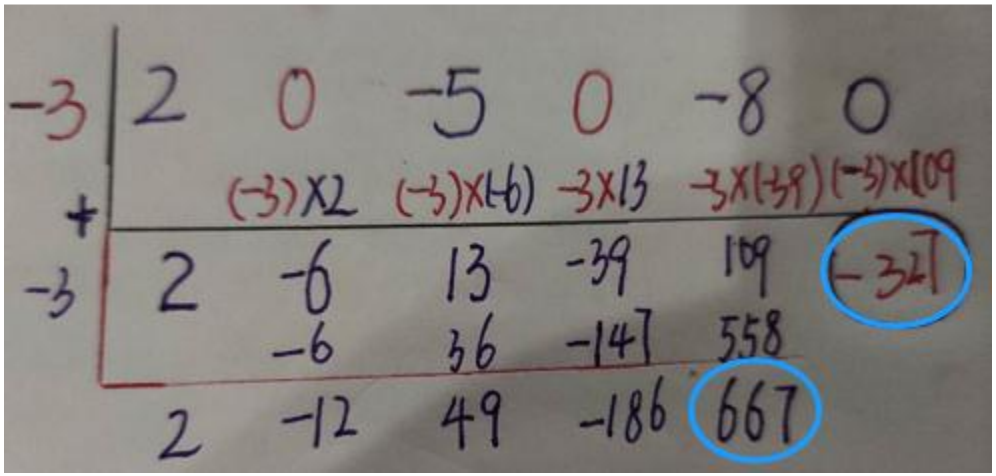
$$f(x)=(2x^4-6x^3+13x^2-39x+109)(x+3)+(-327)$$

把 $f(x)$ 表示成 $x-x_0$ 的方幂和，即表成

$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\cdots$ 的形式.

$$f(x)=\left(2x^4-6x^3+13x^2-39x+109\right)(x+3)+(-327)$$

用$x+3$ 除 $q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$得的商式和余数？

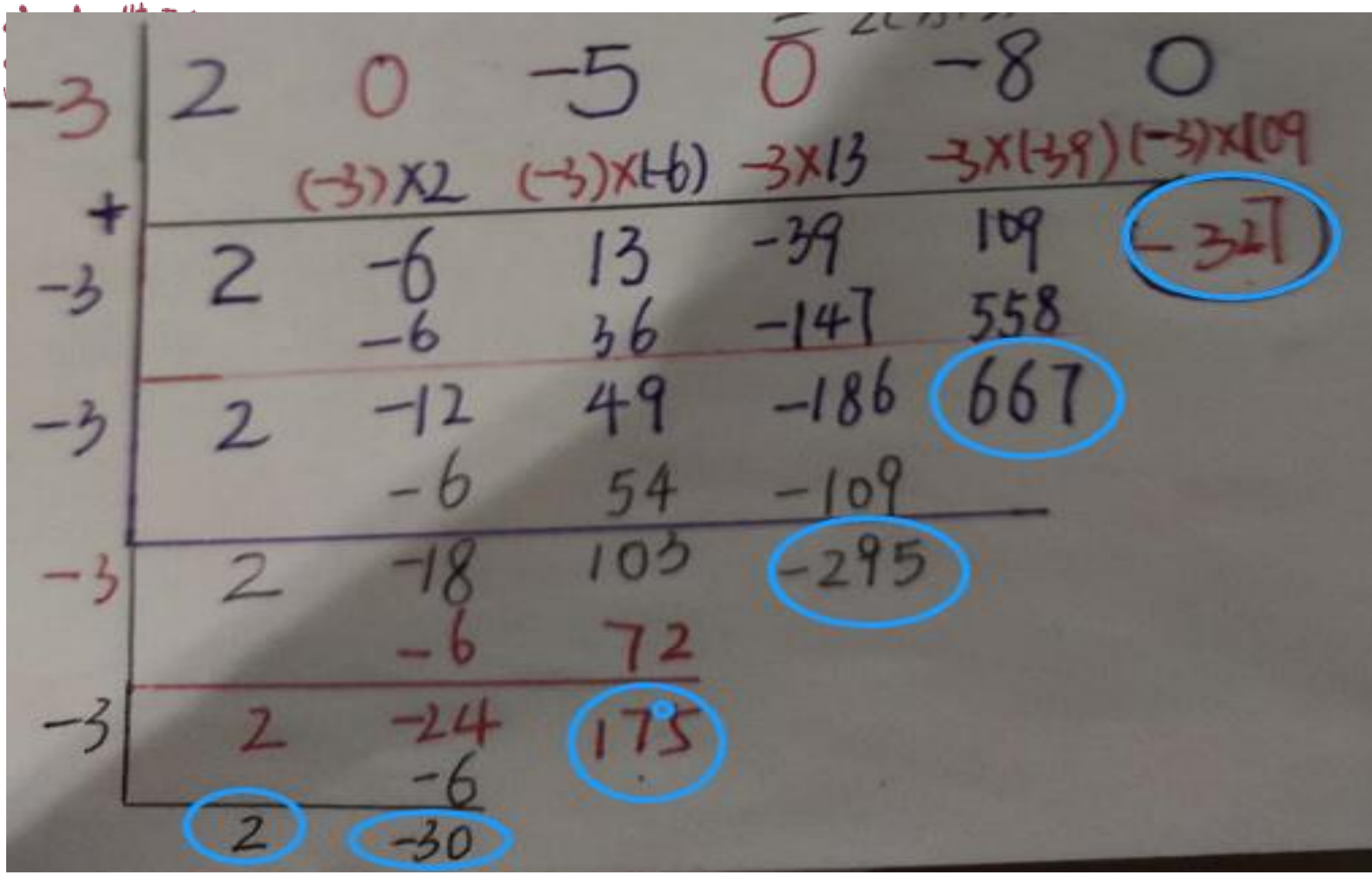


$$2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$$

$$=\left(2x^3+12x^2+49x-186\right)(x+3)+667$$

$$f(x)=\left[\left(2x^3+12x^2+49x-186\right)(x+3)+667\right](x+3)+(-327)$$

$$=\left(2x^3+12x^2+49x-186\right)(x+3)^2+667(x+3)+(-327)$$



$$f\left(x\right)=2\left(x+3\right)^{5}-30\left(x+3\right)^{4}+175\left(x+3\right)^{3}-295\left(x+3\right)^{2}+667\left(x+3\right)+(-327)$$

小试牛刀

4．把 $f(x)$ 表示成 $x-x_0$ 的方幂和，即表成

$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\cdots$ 的形式：

1） $f(x)=x^5, x_0=1$；

2） $f(x)=x^4-2x^2+3, x_0=-2$；