极大线性无关组

文山学院 数学与工程学院

黄卫华（副教授）

主要内容

- 一、极大无关组的定义
- 二、极大无关组的性质
- 三、向量组的秩

一、 定义

定义 13 一个向量组的一个部分组称为一个**极大线性无关组**，如果这个部分组本身是线性无关的，并且从这向量组中任意添一个向量(如果还有的话)所得的部分向量组都线性相关.

二、 性质

性质1 一个线性无关向量组的极大无关组就是这个向量组本身.

例 设有向量组

$$\alpha_1=(2,-1,3,1),\alpha_2=(4,-2,5,4),\alpha_3=(2,-1,4,-1)$$

求该向量组的极大线性无关组.

提示：$3\alpha_1-\alpha_2=\alpha_3$

性质2 一个向量组的极大无关组并不是唯一的.

性质3 任意一个极大线性无关组与向量组本身等价.

证明 设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_s$，

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是它的一个极大线性无关组.

所谓等价就是它们可以互相线性表出. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$

是 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_s$，的一部分，当然可以被这个向

量组线性表出，即

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \ldots + 1\alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \ldots + 0\alpha_s, \quad i = 1,2, \ldots, r.$$

下证 $\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}, \boxed{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_s}$ 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表出.

由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是极大线性无关组得 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_j$ 线性相关，其中 j= r+1, …,s .

所以 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots k_r\alpha_r + l\,\alpha_j = 0$， 且 $l \neq 0$.

若不然 $l = 0$ 则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性相关，与已知矛盾.

上式可改写为

$$\alpha_j = -\frac{k_1}{l}\alpha_1 - \frac{k_2}{l}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_r}{l}\alpha_r\ ,\ (r < j \le s).$$

这就是说， $\alpha_j\ (r < j \le s)$ 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表出.

于是证明了向量组与它的极大线性无关组的等价性.

由性质 3和等价的传递性可推出如下结论:

性质4 一向量组的任意两个极大线性无关组都是等价的.

定理2 推论3

两个线性无关的等价的向量组，必含有相同个数的向量.

定理 3 一向量组的极大线性无关组含有相同个数的向量.

三、向量组的秩

定义 14 向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的**秩**.

例如,向量组

$$\alpha_1=(2,-1,3,1),\alpha_2=(4,-2,5,4),\alpha_3=(2,-1,4,-1)$$

关于向量组的秩的性质：

1) 一个向量组线性无关的充分必要条件是它的秩与它所含向量的个数相同.

2) 等价的向量组必有相同的秩.

3) 含有非零向量的向量组一定有极大无关组，且任一个无关的部分组都能扩充成一个极大无关组.

全部由零向量组成的向量组没有极大线性无关组.

规定其秩为零.

思考与作业

1.请思考极大线性无关组在解线性方程组中的作用.

2.作业见习题册.