

7.4 特征值与特征向量

主要内容

- 定义
- 几何意义
- 求法
- 举例
- 特征子空间
- 性质

一、定义

定义4 设 A 是数域 P 上线性空间 V 的一个线性变换，若对于数域 P 中一个数 λ_0 ，存在一个非零向量 ξ ，使得

$$A\xi = \lambda_0\xi.$$

那么 λ_0 称为 A 的一个**特征值**，而 ξ 称为 A 的属于特征值 λ_0 的一个**特征向量**。

- 问：**
1. 您能找出数乘变换特征值与特征向量？
 2. 您能找出零变换的特征值与特征向量？

二、几何意义

线性变换的特征向量的几何意义?

特征向量经过线性变换之后与特征向量保持在同一直线上。

如果 ξ 是线性变换 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量，那么 ξ 的任何一个非零倍数 $k\xi$ 是不是 A 的属于 λ_0 的特征向量？

因为从 $A\xi = \lambda_0\xi$ 可以推出 $A(k\xi) = \lambda_0(k\xi)$ 。

这说明特征向量是不是被特征值唯一决定的？

特征值是不是被特征向量所唯一决定？

三、求法

設 V 是數域 P 上的 n 維線性空間, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是它的一組基, 線性變換 A 在這組基下的矩陣是 A . 又設 λ_0 是 A 的特徵值, ξ 是 A 的屬於 λ_0 的一個特徵向量, ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐標是 $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$.

則 $A\xi$ 的坐標是 $A \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$. $\lambda_0\xi$ 的坐標是 $\lambda_0 \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$.

由 $A\xi = \lambda_0\xi$ 得 $A \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} \iff (\lambda_0 E - A) \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} = 0.$

这说明特征向量 ξ 的坐标 $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ 满足

齐次方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0.$

由于 $\xi \neq 0$, 所以它的坐标 $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$ 不全为零.

即, 齐次方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 有非零解.

齊次線性方程組有非零解的充要條件是其係數行列式等於零，

$$\text{即 } |\lambda_0 E - A| = \begin{vmatrix} \lambda_0 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_0 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_0 - a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

定义5 设 A 是数域 P 上一个 n 级矩阵, λ 是一个文字. 矩阵 $\lambda E - A$ 的行列式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 A 的特征多项式, 这是数域 P 上的一个 n 次多项式.

以上分析说明, 如果 λ_0 是线性变换 A 的特征值, 那么 λ_0 一定是矩阵 A 的特征多项式的一个根;

反过来, 如果 λ_0 是矩阵 A 的特征多项式在数域 P 中的一个根, 即 $|\lambda_0 E - A| = 0$, 那么齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 就有非零解.

若 $(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ 是方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的一个非零解, 那么非零向量 $\xi = x_{01}\varepsilon_1 + x_{02}\varepsilon_2 + \dots + x_{0n}\varepsilon_n$ 满足 $A\xi = \lambda_0\xi$, 即 λ_0 是线性变换 A 的一个特征值 ξ 就是属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

求线性变换 A 的特征值与特征向量的步骤如下：

Step 1 : 在线性空间 V 中取一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$,

写出 A 在这组基下的矩阵 A ;

Step 2 : 计算 A 的特征多项式, 并求出特征方程

$(\lambda E - A) X = 0$ 在数域 P 中的所有根. 设矩阵 A 有 s

个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 它们也就是线性变换 A 的全部特征值.

Step 3 : 对 A 的每个特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, s)$,

求解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A) X = 0$, 该方程组的全部解即为矩阵 A 的对应于 λ_i 的全部特征向量在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标.

矩阵 A 的特征多项式的根有时也称为 A 的特征值, 而相应的线性方程组 $(\lambda_i E - A) X = 0$ 的解也就称为 A 的属于这个特征值的特征向量.

四、举例

例 2 求下列线性变换的特征值和特征向量.

(1) 设 τ 是 \mathbb{R}^2 上的一个线性变换, 对于 $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 有

$$\tau \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}.$$

(2) 设线性变换 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 3 在空间 $P[x]_n$ 中, 线性变换

$$Df(x) = f'(x)$$

求线性变换 D 的特征值和相应的特征向量.

例 4 平面上全体向量构成实数域上一个二维线性空间,

求 7.1 节例 1 中旋转 S_θ 的特征值和相应的特征向量.

五、特征子空间

对于线性变换 A 的任一个特征值 λ_0 ，全部适合条件

$$A\alpha = \lambda_0\alpha$$

的向量 α 所成的集合，

即 A 的属于 λ_0 的全部特征向量再添上零向量所成的集合，是 V 的一个子空间，称为 A 的一个特征子空间，记为 V_{λ_0} 。

问：特征子空间 V_{λ_0} 的维数？

特征子空间的维数就是属于 λ_0 的线性无关的特征向量的最大个数。

六、性质

性质 1

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$

的 n 个特征值 (k 重特征值算作 k 个特征值), 则

$$(1) \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn};$$

$$(2) \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|.$$

特征值自然是被线性变换所决定的。但是在有限维空间中，任取一组基之后，特征值就是线性变换在这组基下矩阵的特征多项式的根。随着基的不同，线性变换的矩阵一般是不同的。这些矩阵之间是什么关系？

问：相似矩阵的特征多项式相同吗？

定理 6 相似的矩阵有相同的特征多项式。

定理 6说明，线性变换的矩阵的特征多项式与基的选取无关，它直接被线性变换决定的。

因此，以后就可以说**线性变换的特征多项式**了。

既然相似的矩阵有相同的特征多项式，当然特征多项式的各项系数对于相似的矩阵来说都是相同的。

比如说，考虑特征多项式的常数项，得到：

相似矩阵有相同的行列式。

因此，以后就可以说**线性变换的行列式**了。

定理 6 的逆对吗? 即特征多项式相同的矩阵一定相似吗?

例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

它们的特征多项式都是 $(\lambda - 1)^2$, A 和 B 相似吗?

因为和 A 相似的矩阵只能是 $X^{-1} A X$ 就是本身.

特征多项式相同的矩阵**不一定**相似.

性质 3

设 A 是数域 P 上一个 $n \times n$ 矩阵, $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 是 A 的特征多项式, 则 $f(A) = ?$

设 $B(\lambda)$ 是 $\lambda E - A$ 的伴随矩阵,

$$B(\lambda)(\lambda E - A) = |\lambda E - A|E = f(\lambda)E.$$

由于矩阵 $B(\lambda)$ 的元素是 $|\lambda E - A|$ 的各个代数余子式, 都是 λ 的多项式, 其次数不超过 $n - 1$.

于是 $B(\lambda)$ 可以写成 $B(\lambda) = \lambda^{n-1}B_0 + \lambda^{n-2}B_1 + \dots + B_{n-1}$. 其中 B_0, B_1, \dots, B_{n-1} 都是 $n \times n$ 数字矩阵.

再设 $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$, 则

$$f(\lambda)E = \lambda^n E + a_1\lambda^{n-1}E + \dots + a_{n-1}\lambda E + a_n E.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } B(\lambda)(\lambda E - A) &= \lambda^n B_0 + \lambda^{n-1}(B_1 - B_0 A) + \lambda^{n-2}(B_2 - B_1 A) \\ &\quad + \dots + \lambda(B_{n-1} - B_{n-2} A) - B_{n-1} A. \end{aligned}$$

比较上述两式，得

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 = E, \\ B_1 - B_0 A = a_1 E, \\ B_2 - B_1 A = a_2 E, \\ \dots\dots\dots \\ B_{n-1} - B_{n-2} A = a_{n-1} E, \\ -B_{n-1} A = a_n E. \end{array} \right.$$

以 $A^n, A^{n-1}, \dots, A, E$ 依次从右边乘上式中的第一式，第二式， \dots ，第 n 式，第 $n+1$ 式，得

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 A^n = EA^n = A^n, \\ B_1 A^{n-1} - B_0 A^n = a_1 EA^{n-1} = a_1 A^{n-1}, \\ B_2 A^{n-2} - B_1 A^{n-1} = a_2 EA^{n-2} = a_2 A^{n-2}, \\ \dots\dots\dots \\ B_{n-1} A - B_{n-2} A^2 = a_{n-1} EA = a_{n-1} A, \\ -B_{n-1} A = a_n E. \end{array} \right.$$

把上式中的 $n + 1$ 个式子一起加起来，左边变成零
右边即为 $f(A)$ ，故 $f(A) = O$ 。

性质 3

哈密顿 - 凯莱 (Hamilton-Caylay) 定理

设 A 是数域 P 上一个 $n \times n$ 矩阵, $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 是 A 的特征多项式, 则

$$f(A) = A^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})A^{n-1} + \dots + (-1)^n |A|E = O.$$

因为线性变换和矩阵的对应是保持运算的，

所以由哈密顿-凯莱定理得

推论 设 A 是有限维空间 V 的线性变换，

$f(\lambda)$ 是 A 的特征多项式，那么 $f(A) = 0$ 。