文山学院精品课程建设

高等代数（1）习题册

文山学院数学与工程学院 编

班级：****级数学与应用数学*班

学号：________________________

姓名：________________________

任课教师：____________________

2020 年 3 月修订

第一章　多项式

一、是非题（下列命题正确的打√，错误的打×）

1. 数集$F=\{全体非负有理数\}$是数域。 （　　）
2. 数集$F=\{a\sqrt{5}\mid a为任意有理数\}$是数环。 （　　）
3. 零次多项式是零多项式。 （　　）
4. 数域P上任意多项式的次数都大于或等于零。 （　　）
5. 两个多项式之间的整除关系随着系数域的扩大而发生改变。 （　　）
6. 多项式$f(x)$与$cf(x)$（$c\neq 0$）有相同的因式和倍式。 （　　）
7. $(f(x),g(x))=d(x)\Leftrightarrow \exists u(x),v(x):\ f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$。 （　　）
8. 设$f(x),g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，若$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，则

$(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$。 （　　）

9. 如果$f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，则$f(x)=g(x)$。 （　　）
10. 如果$f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则$f(x)\mid h(x)$。 （　　）
11. 若$f(x)\mid g_1(x), f\mid g_2(x)$，　则$f(x)\mid [g_1(x)t_1(x)+g_2(x)t_2(x)]$。 （　　）
12. 设$g_1(x)g_2(x)\mid f_1(x)f_2(x)$，若$g_1(x)\mid f_1(x)$，则$g_2(x)\mid f_2(x)$。 （　　）
13. 如果$p(x)\mid f(x)g(x)$，则$p(x)\mid f(x)$或$p(x)\mid g(x)$。 （　　）
14. 多项式$f(x),g(x)$互素$\Leftrightarrow\exists u(x),v(x)$使得$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$。 （　　）
15. 如果$(f(x),g(x))=1$，且$f(x)\mid g(x)h(x)$，那么$f(x)\mid h(x)$。 （　　）
16. 如果$f_1(x)\mid g(x)$，$f_2(x)\mid g(x)$，那么$f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$。 （　　）
17. 如果$(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，则$(f(x),g(x)h(x))=1$。 （　　）
18. 数域P上多项式的最大公因式不因数域P的扩大而改变。 （　　）
19. 零多项式与零次多项式既不能说是可约的，也不能说是不可约的。 （　　）
20. 多项式的可约性与多项式所在数域无关。 （　　）
21. 若$p(x)$不可约，则对任意常数$c\neq 0$，$cp(x)$也不可约。 （　　）
22. 若$p(x)$不可约，则对任意多项式$f(x)$必有$(p(x),f(x))=1$或$p(x)\mid f(x)$。 （　　）

23. 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式，则 $p(x)$ 一定是 $f(x)$ 的 k 重因式。（ ）

24. 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式, 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式。（ ）

25. 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式，则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式。（ ）

26. 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式，则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式。（ ）

27. $f'(x)$ 的 m 重根一定是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根。（ ）

28. $f(x)$ 在复数域中没有重根的充要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素。( )

29. 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式, b 是 $f(x)$ 的整数根,则 $b|a_0$ 。( )

30. 多项式 $f(x)=x^n+3$ 在有理数域上不可约。( )

31. 实系数多项式总可以分解为实数域上一次和二次多项式的乘积。( )

32. 数域 P 上任一次数大于零的多项式 $f(x)$ 都有惟一的标准分解式。( )

33. $P[x]$ 中 $n(\geq 0)$ 次多项式在数域 P 中的根可能多于 n 个。( )

34. 每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域中至少有一根。( )

35. 每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域中上都可以分解成一次因式的乘积。( )

36. 复数域上次数大于 1 的多项式都是可约的。( )

37. n 次复系数多项式在复数域内恰有 n 个复根。( )

38. 复数域上不可约多项式只能是一次式。( )

39. 有理数域上存在任意高次不可约多项式。( )

40. 实数域上存在任意次数的不可约多项式。( )

41. 两个本原多项式的乘积不是本原多项式。( )

42. 实系数多项式的虚根共轭成对出现。( )

43. 数域 P 上的多项式只有两类，即可约多项式和不可约多项式。( )

二、选择题（从 A、B、C、D 中选出一个正确答案）

44. 关于多项式 $f(x)\neq 0$， $g(x)\neq 0$ 的次数，下列说法错误的是 ( )

A $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$， 若 $a_n\neq 0$，则 n 称为多项式 $f(x)$ 的次数。

B 当 $f(x)\pm g(x)\neq 0$ 时， $\partial(f(x)\pm g(x))\leq \max\{\partial(f(x),\partial(g(x))\}$

C $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$ D $\partial(\dfrac{f(x)}{g(x)})=\partial(f(x))-\partial(g(x))$

45. 设 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，则下列不正确是 ( )

A $(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$ B $(f(x),q(x))=(q(x),r(x))$

$C \quad (f(x),r(x))=(f(x),g(x))$ D 若 $r(x)=0$，则 $q(x)|f(x)$

46. 设 $f(x)$ 是三次实系数多项式，则 ( )

A 至少有一个有理根 B 存在一对非实共轭复根
C 有三个实根 D 至少有一个实根

47. 下列是多项式 $f(x)=4x^4-4x^3-3x^2+2x+1$ 的重因式是 ( )

$A\ 2x^2-x-1$ $B\ x-1$ $C\ 2x-1$ $D\ x^2+2x$

48. 设 $p(x)$ 为 $F[x]$ 中的不可约多项式， $f(x),g(x)\in F[x]$，则错误命题是 ( )

A 若 $p(x)$ 不整除 $f(x)$，则 $(p(x),f(x))=1$

B 若 $(p(x),f(x))\neq 1$ 则 $p(x)|f(x)$

C 若 $p(x)|f(x)g(x)$ 且不整除 $f(x)$，则 $p(x)|g(x)$

D 若 $p(x)|f(x)g(x)$，则 $(f(x),g(x))=1$

49. 下列说法不正确的是 ( )
A 零多项式只能整除零多项式 B 任一多项式一定能整除它自身。
C 任一多项式都可以整除零次多项式 D 零次多项式能整除任一多项式。

50. 在 $F[x]$ 里能整除任意多项式的多项式是 ( )

A．零多项式 B．零次多项式 C．本原多项式 D．不可约多项式

51. 设 $g(x)=x+1$ 是 $f(x)=x^6-k^2x^4+4kx^2+x-4$ 的一个因式，则 k 等于 ( )

A．1 B．2 C．3 D．4

52. 以下命题不正确的是 ( )

A．若 $f(x)|g(x)$，则 $\overline{f(x)}|\overline{g(x)}$； B．集合 $F=\{a+bi|a,b\in Q\}$ 是数域；

C．若 $(f(x),f'(x))=1$，则 $f(x)$ 没有重因式；

D．设 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式，则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式

53. 设 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是 s 个互不相同的素数， $n>1$，那么多项式 $f(x)=x^n-p_1p_2\cdots p_s$ 在有理数域上 ( )
A 可约 B 不可约 C 不一定可约

54. 下列对于多项式的结论不正确的是 ( )

A．如果 $f(x)|g(x),g(x)|f(x)$，那么 $f(x)=g(x)$

B．如果 $f(x)|g(x),f(x)|h(x)$，那么 $f(x)|(g(x)\pm h(x))$

C．如果 $f(x)|g(x)$，那么 $\forall h(x)\in F[x]$，有 $f(x)|g(x)h(x)$

D. 如果 $f(x)|g(x), g(x)|h(x)$，那么 $f(x)|h(x)$

55. 整系数多项式 $f(x)$ 在 Z 不可约是 $f(x)$ 在 Q 上不可约的 ( )

A. 充分条件 B. 充分必要条件 C. 必要条件 D. 既不充分也不必要条件

56. 下面论述中，错误的是 ( )

A. 奇数次实系数多项式必有实根； B. 代数基本定理适用于复数域；

C. 任一数域包含 Q； D. 在 $P[x]$ 中，$f(x)g(x)=f(x)h(x) \Rightarrow g(x)=h(x)$

57. 关于多项式最大公因式性质的说法错误的是 ( )

A $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一定有最大公因式。

B 两个零多项式的最大公因式是零多项式。

C 两个不全为零的多项式的最大公因式是非零多项式且唯一。

D $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式是唯一的。

三、填空题（请用正确答案填空）

58. 最小的数域是 ＿＿＿＿＿＿，最大的数域是＿＿＿＿＿＿。

59. 一非空数集 P, 包含 0 和 1，且对加减乘除四种运算封闭，则其为＿＿＿＿＿＿。

60. 两本原多项式的乘积是＿＿＿＿＿＿多项式。

61. 若 $p(x)$ 是不可约多项式，$f(x)$ 是任意多项式, 则 $(p(x), f(x)) \neq 1$ 时, 有＿＿＿＿＿＿。

62. 设 $f(x), g(x) \in F[x]$，若 $\partial(f(x))=0, \partial(g(x))=m$，则 $\partial(f(x)\cdot g(x))=$＿＿＿＿＿＿。

63. 在实数域上，任意次数≥＿＿＿＿＿＿多项式都可约.

64. 有理数域多项式存在＿＿＿＿＿＿不可约多项式。

65. 实数域上的不可约多项式只有＿＿＿＿＿＿和＿＿＿＿＿＿。

66. 当且仅当 $f(x)$ 是＿＿＿＿＿＿多项式时，任意多项式 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的最大公因式都是 $g(x)$。

67. 求用 $x-2$ 除 $f(x)=x^4+2x^3-x+5$ 的商式为＿＿＿＿＿＿，余式为＿＿＿＿＿＿。

68. 设 $f(x)=x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$，则 $f(x)$ 的标准分解式为＿＿＿＿＿＿。

69. 把 $f(x)=x^4-5$ 表成 $x-1$ 的多项式是＿＿＿＿＿＿。

70. 令 $f(x)=(x^{10}-x^9+x^8-x^7+\cdots-x+1)(x^{10}+x^9+\cdots x+1)$，则 $f(x)$ 的奇次项系数之和＿＿＿＿＿＿。

71. 多项式 $f(x)$ 除以 $ax-b$（$a \neq 0$）所得余式为＿＿＿＿＿＿。

72. 把 $f(x)=2x^3-x^2+3x-5$ 表成 $x-1$ 的多项式是＿＿＿＿＿＿。

73. 设 $g(x)|f(x)$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式为＿＿＿＿＿＿。

74. 多项式$f(x)$、$g(x)$互素的充要条件是存在多项式$u(x)$、$v(x)$使得__________。

75. 设$d(x)$为$f(x)$，$g(x)$的一个最大公因式，则$d(x)$与$(f(x),g(x))$的关系是_______。

76. 在有理数域上将多项式$f(x)=x^3+x^2-2x-2$分解为不可约因式的乘积是________________________________。

77. 在实数域上将多项式$f(x)=x^3+x^2-2x-2$分解为不可约因式的乘积是________________________________。

78. 多项式$f(x)$没有重因式的充要条件是__________________。

79. 多项式$f(x)=8x^3+9$除以$2x+3$所得的余数是_______________。

80. 假设$f(x)=2x^3-3x^2+ax+b$除以$x+1$所得余数是 7，除以$x-1$所得余数是 5，则$a=$______ $b=$_______________。

81. 如果$f(x)=x^4-3x^3+6x^2+ax+b$能被x^2-1整除，求$a=$_____ $b=$_______。

82. 若-1是多项式$f(x)=x^5-ax^2-ax+1$的重根，则$a=$_____________________。

83. 2 是$g(x)=x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8$的_________重根。

84. 设$f(x)$除以$g(x)\neq 0$所得的商及余式分别为$q(x)$和$r(x)$，则$f(x)$除以$cg(x)$（c为非零常数）所得的商及余式为________________________。

85. 设$f(x)$除以$g(x)\neq 0$所得的商及余式分别为$q(x)$和$r(x)$，$h(x)$为任一非零多项式。则$f(x)h(x)$除以$g(x)h(x)$所得的商及余式为___________ 。

四、计算题

求用$g(x)$去除$f(x)$所得的商$q(x)$及余式$r(x)$。

86. $f(x)=x^3+x^2+x+1$，　$g(x)=x^2+3x+2$。

87. $f(x)=x^5-x^3+3x^2-1$，$g(x)=x^3-3x+2$。

利用综合除法，求用 $g(x)$ 去除 $f(x)$ 所得的商及余式。

88. $f(x)=2x^5-5x^3-8x$， $g(x)=x+3$。

89. $f(x)=x^5-3x-1, g(x)=x-2$。

把下列各多项式 $f(x)$ 表成 $x-x_0$ 的多项式，即表成 $c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_n(x-x_0)^n$，其中 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 为常数。

90. $f(x)=x^5$， $x_0=1$。

91. $f(x)=x^4-2x^2+3$， $x_0=-2$。

92. 试求 $x^3-3px+2q$ 能被 $x^2+2ax+a^2$ 整除的条件。

93. 确定 m,p 的值，使 $x^2+3x+2 \mid x^4+mx^2-px+2$。

94. 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$ 与 $g(x)=x^3+tx^2+2u$ 在实数域上的最大公因式是一个二次多项式，求 t,u 的值。

95. 如果 $(x-1)^2 \mid ax^4+bx^2+1$，求 a,b.

a 与 b 是什么数时，下列各题中的 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除，第 96-100 题

96. $f(x)=x^4-3x^3+6x^2+ax+b$， $g(x)=x^2-1$。

97. $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+bx-2$, $g(x)=(x-1)^2$。

98. $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+bx-2$， $g(x)=x^2-x-2$。

99. $f(x)=ax^4+bx^3+1$， $g(x)=(x-1)^2$。

100. $f(x)=x^4+3x^2+ax+b$， $g(x)=x^2-2ax+2$。

求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，且求 $u(x)$， $v(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$ 第 101-106 题

101. $f(x)=x^3-7x^2+7x+15$， $g(x)=x^2-x-20$。

102. $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+1$， $g(x)=5x^4+4x^3+2x^2+2x$。

103. $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$， $g(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4$。

104. $f(x)=x^3-2x^2+x-1$， $g(x)=x^2+x-3$。

105. $f(x)=x^3-3x+1$， $g(x)=x^2+x+1$。

106. $f(x)=x^3-x^2+2x-4$， $g(x)=x+3$。

判断下列多项式有无重因式第 107-110 题

107. $f(x)=x^4-x^3-3x^2+5x-2$。

108. $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$。

109. $f(x)=x^4+4x^2-4x+3$。

110. $f(x)=x^4-6x^2-8x-3$。

111.求t值使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$有重根。

112.求多项式 x^3+px+q 有重根的条件。

113. k 取何值时，多项式 $f(x)=x^3+3x^2+kx+1$ 有重根。

求下列有理系数方程的有理根，第 114-119 题。

114. $2x^5-4x^4-5x^3+10x^2-3x+6=0$。

115. $5x^4+3x^3-x^2+2x+14=0$。

116. $12x^4-20x^3-11x^2+5x+2=0$。

117. $x^3-6x^2+15x-14$。

118. $4x^4-7x^2-5x-1$。

119. $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$。

120. $f(x)=x^3+6x^2+3px+8$，试确定 p 的值，使 $f(x)$ 有重根，并求其根。

121.当 a,b 满足什么条件时，多项式 $f(x)=x^4+4ax+b$ 有重根。

判断下列多项式在有理数域上是否可约第 122-127 题

122. x^3+3x+1。

123. $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}$ （p 为素数）。

124. $x^4-8x^3+12x^2+2$。

125. x^6+x^3+1。

126. x^p+px+1， p 为奇素数。

127. $x^4+4kx+1$， k 为整数。

五、证明题

128.证明 $F=\{a+b\sqrt{3}i \mid a,b\text{为任意有理数}\}$ 作成数域。

129.设 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$。证明：如果 $(f(x),g(x))=d(x)$，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零，则 $(f_1(x),g_1(x))=1$。

130.设 $f(x),g(x)$ 与 $h(x)$ 均为实数域上的多项式。证明：若 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$。

131.证明：$(8x^9-6x^7+4x-7)^3(2x^5-3)^7$ 的展开式中各项系数之和为 1。

132. $(6-\frac{1}{\sqrt{2}}x-5x^2-x^3)^{97}(1-6x^2+5x^4+\sqrt{2}x^6)^{99}$ 的展开式中各项的系数之和为-2。

133.设 $f(x)$，$g(x)$ 及 $h(x)\neq 0$ 为三个多项式，证明：$h(x)\mid(f(x)-g(x))$ 当且仅当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 除以 $h(x)$ 所得的余式相等。

134.如果 $f(x),g(x)$ 不全为零，证明：$(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))})=1$。

135.证明：如果 $f(x),g(x)$ 不全为零，且 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$，那么 $(u(x),v(x))=1$。

136.如果 $f(x)$，$g(x)$ 不全为零，$(f(x),g(x))=d(x)$，$f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，则 $(f_1(x),g_1(x))=1$。

137.设 $g_1(x)g_2(x)|f_1(x)f_2(x)$，证明：若 $f_1(x)|g_1(x)$，且 $f_1(x)\neq 0$，则必有 $g_2(x)|f_2(x)$。

138.设 $f(x)|g_1(x)-g_2(x)$，$f(x)|h_1(x)-h_2(x)$，证明：$f(x)|g_1(x)h_1(x)-g_2(x)h_2(x)$。

139.证明：如果 $(f(x),g(x))=1$,那么 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$。

140.设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且 $ad-bc\neq 0$，证明：

$(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x))$。

141.证明：如果 $(f(x), g(x)) = 1$，$(f(x), h(x)) = 1$，那么 $(f(x), g(x)h(x)) = 1$。

142.证明：如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，那么 $f(x^m)$ 与 $g(x^m)$ $(m \geq 1)$ 也互素。

143.证明：如果 $x-1 \mid f(x^n)$，则必 $x^n - 1 \mid f(x^n)$。

144.设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式。证明：$d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式的充要条件是 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$。

145.证明：如果 $(x^2 + x + 1) \mid f_1(x^3) + xf_2(x^3)$，那么 $(x-1) \mid f_1(x)$，$(x-1) \mid f_2(x)$。

146.设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为两个非零的多项式。证明：如果对任意的多项式 $h(x)$，由 $f(x) \mid g(x)h(x)$ 都可得到 $f(x) \mid h(x)$，则必 $(f(x), g(x)) = 1$；

147.用 f_1,g_1,f_2,g_2 表示四个首项系数为 1 的多项式，证明：$(f_1,g_1,f_2,g_2)=((f_1,g_1),(f_2,g_2))$

148.证明：$x^d-1 \mid x^n-1$ 当且仅当 $d \mid n$。

149.证明：如果 $f(x) \mid f(x^n)$，那么 $f(x)$ 的根只能是零或单位根。

150.设 m 为任一正整数。证明：$g^m(x) \mid f^m(x)$，当且仅当 $g(x) \mid f(x)$

151.如果 $f'(x) \mid f(x)$，证明：$f(x)$ 有 n 重根，其中 $n=\partial(f(x))$。

152.设复系数非零多项式 $f(x)$ 没有重因式，证明：$(f(x)+f'(x),f(x))=1$。

153.设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，试证：如果 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数，那么 $f(x)$ 不能有整数根。

154.设 $p(x)$ 为数域 F 上的次数大于零的多项式。证明：如果 $p(x)$ 对任意多项式 $f(x)$，或 $p(x) \mid f(x)$

或$(p(x), f(x))=1$，则 $p(x)$ 必为 F 上的不可约多项式。

155.设 $p(x)$ 为数域 F 上一个次数大于零的多项式，当 $p(x)$ 整除任何两个多项式的乘积时，必整除其中一个，证明，$p(x)$ 一定是 F 上的不可约多项式。

156.设 $f(x)$ 是一次数大于零的多项式，证明：$f(x)$ 是某个不可约多项式方幂的充要条件是，对任意多项式 $g(x)$，$h(x)$，由 $f(x)|g(x)h(x)$ 可推出 $f(x)|g(x)$，或有某正整数 m，使 $f(x)|h^m(x)$。

157.证明：多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是对任意正整数 n，$f^n(x)$ 与 $g^n(x)$ 都互素。

158.设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为数域 F 上的多项式。证明：如果 $f^2(x)|g^2(x)$，则必 $f(x)|g(x)$。

159.证明：若 $\alpha \neq \pm 1$ 是整系数多项式 $f(x)$ 的整数根，则 $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ 与 $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$ 都是整数。

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为两个不全为零的多项式，n 是任意一个正整数。证明：$(f(x),g(x))^n=(f^n(x),g^n(x))$。证明下列多项式在有理数域上不可约。第 160-163 题

160. $5x^4-6x^3+12x+6$。

161. x^6+10x^3+2。

162. x^4-10x^2+1。

163. $x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$。

164. 设 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是 s 个互不相同的素数，$n>1$，证明：$\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_s}$ 是无理数。

165. 设整系数多项式 $f(x)$ 对某个整数 m，$f(m)$ 和 $f(m+1)$ 都是奇数，证明：$f(x)$ 无整根。

第二章　行列式

一、是非题（下列命题正确的打√，错误的打×）

1. 9 级排列 134782695 的逆序数是 10. (　　)
2. n个数码的任何一个排列都可经过一系列对换化为自然排列$12...n$. (　　)
3. $(n-1)(n-2)...21n$的逆序数是$n-1$. (　　)
4. 若行列式D为零，则D中必有两行对应成比例. (　　)
5. 一个行列式为零，则这个行列式必有一行（列）元素全为零. (　　)
6. 由$n(n\ge 2)$个数码构成的排列中,奇排列和偶排列的个数都为$\frac{n!}{2}$个. (　　)
7. 设D为n阶行列式，k为常数，则行列式kD 等于k乘以 D 的每一个元素.（　）
8. 对任一排列施行一次对换后，排列的奇偶性改变. (　　)
9. 交换行列式的某两列，行列式的值保持不变. (　　)
10. 行列互换，行列式的值不变. (　　)
11. 对任一排列施行偶数次对换后，排列的奇偶性不变. (　　)
12. 以一数乘行列式的一行就相当于用这个数乘此行列式.
13. 若行列式中所有元素都是整数，且有一行中元素全为偶数，则行列式的值一定是偶数. (　　)
14. 若n级行列式D恰有n个元素非 0，则$D\ne 0$. (　　)
15. n阶行列式主对角线上元素乘积项带正号，副对角线上元素乘积项带负号. (　　)
16. n阶行列式的值等于它的第i列元素与自己的余子式的乘积之和. (　　)
17. 范德蒙行列式为零的充要条件是$a_1,a_2,...,a_n$这n个数中至少有两个相等. (　　)
18. 如果齐次线性方程组有非零解，那么系数行列式一定为零. (　　)
19. 如果线性方程组的系数矩阵的行列式不等于零，那么方程组有唯一解. (　　)
20. 齐次线性方程组一定有解. (　　)

二、选择题（从 A、B、C、D 中选出一个正确答案）

21. 行列式$\begin{vmatrix}4 & 1 & 0\\ 3 & -2 & a\\ 6 & 5 & -7\end{vmatrix}$中，元素$a$的代数余子式是 (　　)

$A.\ \begin{vmatrix}4 & 0\\ 6 & -7\end{vmatrix}$　　$B.\ \begin{vmatrix}4 & 1\\ 6 & 5\end{vmatrix}$　　$C.\ -\begin{vmatrix}4 & 0\\ 6 & -7\end{vmatrix}$　　$D.\ -\begin{vmatrix}4 & 1\\ 6 & 5\end{vmatrix}$

22. 以下乘积中5阶行列式$D=\left|a_{ij}\right|$中取负号的项是 (　　)

$A.$ $a_{31}a_{45}a_{12}a_{24}a_{53}$；$B.$ $a_{45}a_{54}a_{42}a_{12}a_{33}$；$C.$ $a_{23}a_{51}a_{32}a_{45}a_{14}$；$D.$ $a_{13}a_{32}a_{24}a_{45}a_{54}$

23. 以下乘积中 4 阶行列式$D=\left|a_{ij}\right|$中取负号的项是 (　　)

A．$a_{11}a_{23}a_{33}a_{44}$； B．$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$； C．$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$； D．$a_{23}a_{41}a_{32}a_{11}$

24. 设$|A|$为四阶行列式，且$|A|=-2$，则$||A|A|=$ （ ）

A．4 B．2^5 C．-2^5 D．8

25. n 级行列式 D 的元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与代数余子式 A_{ij} 的关系是 ( )

A． $M_{ij}=-A_{ij}$ B． $A_{ij}=M_{ij}$ C． $M_{ij}=(-1)^n A_{ij}$ D． $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

26. 位于 n 级排列 $i_1,i_2...i_{k-1}1i_{k+1}...i_n$ 中的数 1 与其余数形成的逆序个数为 ( )

A． $k-1$ B． $n-k-1$ C． C_n^k D． C_n^2-k

27. 一个不等于 0 的 n 级行列式中非零元素个数至少为 ( )

A． $n(n-1)$ B． n^2 C． $(n-1)^2$ D． n

三、填空题（请用正确答案填空）

28. 在全部 n 级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有__________个.

29. n 个数码的排列 $i_1,i_2,...,i_n$ 的逆序数是 k，则排列 $i_ni_{n-1},..i_2,i_1$ 的逆序数为___________.

30. 排列 $n,n-1,...,2,1$ 的逆序数为___________.

31. 要使排列 127i56j94 为奇排列，则必须 i ＝________， j ＝_________.

32. 排列 542163 的逆序数为____________.

33. 排列 523146879 的逆序数为________.

34. n 级行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ 是_______项的代数和，其一般项是__________________.

35. 从 n 级行列式的第 $i_1,i_2,...,i_n$ 行和第 $j_1,j_2,...,j_n$ 列取出的元素作乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}...a_{i_nj_n}$，这里 $i_1,i_2,...,i_n$ 与 $j_1,j_2,...,j_n$ 都是 $1,2,...,$n 这 n 个数码的排列，那么这一项在行列式中的符号是________________。

36. 设 M_{ij} 是 n 级行列式 D 的元素 a_{ij} 的余子式，若 a_{ij} 在 D 中位于第 i 行和第 j 列．则 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=$_____________.

37. 行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$中元素$a_{23}$的代数余子式$A_{23}=$________.

38. 当一个n级行列式中等于零的元素的个数大于n^2-n时，该行列式的值________.

39. 行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=$________.

40. 设行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$中，代数余子式$A_{21}=3$，则$a=$________.

41. 设行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$中，余子式$M_{22}=3$，则$a=$________.

42. 在行列式中，某一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和等于________.

43. 在$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$中$x^3$的系数是________.

44. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 101 & 202 & 303 \\ 10 & 20 & 30 \end{vmatrix}=$________.

45. $\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a & b & 1 \\ b & a & 1 \end{vmatrix}=$________.

46. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=$ ________.

47. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$________.

48. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 301 \\ 1 & 2 & 102 \\ 2 & 4 & 199 \end{vmatrix}$ = ________________.

四．计算题

49. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

50. $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$

51. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

52. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

53. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

54. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

55. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

56. $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & b \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

57. $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

58. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 5 & -2 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & -4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

59. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$

60. $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

61. $\begin{vmatrix} 0 & a & a & \cdots & a & a \\ a & 0 & a & \cdots & a & a \\ a & a & 0 & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 0 & a \\ a & a & a & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}$

62. $\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ a & x-a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$

63. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}$

64. $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x-1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}$

65. $D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & x & y & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & x & y \\ y & 0 & 0 & ... & 0 & x \end{vmatrix}$

66. $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

67. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1}-b_{n-1} & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n-b_n & a_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}.$

68. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

69. $\begin{vmatrix} a_1-m & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-m & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-m \end{vmatrix}$

70. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$

71. $D_n = \begin{vmatrix} x_1+1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n+1 \end{vmatrix}$

72. 用克拉默法则解线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$

73. 用克拉默规则解方程组$\begin{cases} x_1+\quad\ +x_3=4 \\ -x_1+x_2+x_3=4 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \end{cases}$.

五、证明题

74. 证明：一个n级行列式$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，如果满足$a_{ij}=-a_{ji}$，$i,j=1,2,\cdots,n$，则当$n$为奇数时，$D_n$为零.

75. 由行列式的定义证明：在一个n阶列式D_n中，若0的个数比n^2-n还要多，则D_n为零.

76. 由行列式的定义证明$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$

77. 由$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$，证明：奇偶排列各半.

78. 已知$546, 273, 169$都是13的倍数，用行列式的性质证明$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$也是$13$的倍数.

79. 证明：$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

80. 证明：$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$

81. 证明：$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0$

82. 证明：$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

83. 证明：$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

84. 证明：$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

85. 证明：$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha$$

86. 证明：$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$

87. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是数域P中互不相同的数，$b_1,b_2,\cdots,b_n$是数域P中任一组给定的数，用克拉默法则证明：存在唯一的数域P上的多项式$f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}x$使$f(a_i)=b_i, i=1,2,\cdots,n$

88. 证明：若n阶行列式$D\neq 0$，则D至少有一个$n-1$阶子式不等于0.

第三章 线性方程组

一、是非题（下列命题正确的打√，错误的打×）

1. 如果向量组的一部分组线性相关，那么这个向量组就线性相关.　（　　）
2. 线性无关的向量组中一定不能包含两个成比例的向量.　（　　）
3. 由n维单位向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$组成的向量组线性相关.　（　　）
4. 任意$n+1$个n维向量必线性相关.　（　　）
5. 线性方程组有解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩.　（　　）
6. 一个线性方程组的增广矩阵的秩比系数矩阵的秩最多大 1.　（　　）
7. 齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数矩阵的秩小于未知量的个数（　　）
8. 两个等价线性无关的向量组的所含的向量的个数一定相等.　（　　）
9. 若两个向量组等价，则它们所包含的向量的个数相同.　（　　）
10. 未知量个数大于方程个数的线性方程组一定有解.　(　　)
11. 对线性方程组施行初等变换不改变方程组的解.　（　　）
12. 若n元线性方程组有无穷多解，则任意n个数均为其解.　（　　）
13. 若线性方程组的每一个方程均有解，则方程组一定有解.　（　　）
14. 系数矩阵的秩等于未知量的个数的线性方程组有解.　（　　）
15. 系数矩阵的秩等于未知量的个数的齐次线性方程组只有零解.　（　　）
16. 若含有n个未知量的$m(m<n)$个方程的齐次线性方程组的系数矩阵的秩为m，则方程组有无穷多解.　（　　）
17. n个未知量的n个方程的线性方程组增广矩阵的秩为n，则方程组有解.（　　）
18. n个未知量的n个方程的线性方程组增广矩阵的秩小于n，则方程组有无穷多解.　（　　）
19. 含有n个未知量m个方程的齐次线性方程组，有非零解的必要条件是$m<n$.　（　　）
20. 若矩阵A的秩为r，则A中任意一个$m(m>r)$阶子式全为零.　（　　）
21. 若矩阵A的秩为r，则A中至少存在一个$m(r>m)$阶子式不为零.　（　　）
22. n个未知量n个方程的齐次线性方程组只有零解的充要条件是它的系数行列式不等于零.　（　　）
23. 若n个未知量n个方程的非齐次线性方程组系数行列式等于零，则这个方程组无解.　（　　）
24. 若非齐次线性方程组有解，它的解唯一的充要条件是它的导出组只有零解.（　　）
25. 数域F上一个含m个未知量齐次线性方程组的系数矩阵的秩为r，那么它的自由未知量的个数是$m-r+1$.　（　　）
26. 若一个矩阵A的秩为r，则所有的r阶子式不等于零.　（　　）
27. 若一个矩阵A的秩为$r+1$，则至少有一个r阶子式不等于零.　（　　）
28. 对线性方程组的增广矩阵施行列初等变换，也能解线性方程组.　（　　）
29. 在一个秩为r的矩阵中，一定不存在非零的$r+1$阶子式.　（　　）

30. 在一个秩为r的矩阵中，一定存在非零的$r-1(r\geq 2)$阶子式． （ ）

31. 在一个秩为r的矩阵中，一定不存在等于零的r阶子式． （ ）

32. 方程数和未知量数相等的线性方程组有唯一解． （ ）

二、选择题（从 A、B、C、D 中选出一个正确答案）

33. 如果矩阵A的秩等于r，则 （ ）

A．至多有一个r阶子式不为零； B．所有r阶子式都不为零；

C．所有$r+1$阶子式全为零，而至少有一个r阶子式不为零；

D．所有低于r阶子式都不为零

34. n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ $(3\leq s\leq n)$线性无关的充分必要条件是 （ ）A．存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s\neq 0$

B． $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$中任意两个向量组都线性无关

C． $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$中存在一个向量，它不能用其余向量线性表示

D． $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$中任意一个向量都不能由其余向量线性表示

35. R^3的向量$\alpha_1=(1,-2,3),\alpha_2=(2,1,0),\alpha_3=(1,-7,9)$ （ ）

A．线性相关； B． 线性无关； C．线性相关或线性无关； D．不一定

36. R^3的向量$\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,1,1)$ （ ）

A．线性相关； B． 线性无关； C．线性相关或线性无关； D．不一定

37. R^3的向量$\alpha_1=(3,1,4),\alpha_2=(2,5,-1),\alpha_3=(4,-3,7)$ （ ）

A．线性相关； B． 线性无关； C．线性相关或线性无关； D．不一定

38. 设向量组Ⅰ（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$），Ⅱ（$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$）则必须有 （ ）

A． Ⅰ无关$\Rightarrow$Ⅱ无关 B． Ⅱ无关$\Rightarrow$Ⅰ无关

C． Ⅰ无关$\Rightarrow$Ⅱ相关 D． Ⅱ相关$\Rightarrow$Ⅰ相关

39. 设A是$m\times n$矩阵，若（ ），则n元线性方程组$AX=0$有非零解．

A． $m<n$ B． A的秩等于n C． $m>n$ D． A的秩等于m

40. 设线性方程组$AX=b$及相应的齐次线性方程组$AX=0$，则 （ ）

A． $AX=0$只有零解时， $AX=b$有唯一解；

B． $AX=0$有非零解时， $AX=b$有无穷多个解；

C． $AX=b$有唯一解时， $AX=0$只有零解；

D． $AX=b$解时， $AX=0$也无解

41. 设n元齐次线性方程组$AX=0$的系数矩阵A的秩为r，则$AX=0$有非零解的充分必要条件是 （ ）

A． $r=n$ B． $r<n$ C． $r\geq n$ D． $r>n$

A．线性相关； B．线性无关； C． 线性相关或线性无关； D．不一定

42. 如果线性方程组$\begin{cases} x_1-3x_3=4 \\ 3x_1+2x_2-x_3=2 \\ x_2+4x_3=a \end{cases}$有解，那么$a=$（　　　）

A．-3；　　　　B．-4；　　　　C．-5；　　　　D．-6

三、填空题（请用正确答案填空）

43. 含有n个未知量n个方程的齐次线性方程组有非零解的充分且必要条件是____________.

44. 线性方程组有解的充分必要条件是________________.

45. 方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=a_1 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4=a_2 \\ -2x_2+2x_3-x_4=a_3 \end{cases}$有解的充要条件是______________.

46. 方程组$\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_1=a_3 \end{cases}$有解的充要条件是________________.

47. 已知向量组$\alpha_1=(1,2,3,4)$，$\alpha_2=(2,3,4,5)$，$\alpha_3=(3,4,5,6)$，$\alpha_4=(4,5,6,7)$

则向量$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=$ ________________.

48. 已知向量组$\alpha_1=(1,2,3,4)$，$\alpha_2=(2,3,4,5)$，$\alpha_3=(3,4,5,6)$，$\alpha_4=(4,5,6,7)$

则该向量组的秩是__________.

49. 单个向量α线性无关的充要条件是____________.

50. 已知向量组$\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(2,2,3),\alpha_3=(1,3,t)$线性无关，则$t\neq$ __________.

四、计算题

51. 解线性方程组$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1 \end{cases}$.

52. 解线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_4+2x_5=1 \\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7 \\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25 \end{cases}$.

53. 解线性方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2+x_4=1 \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$.

54. 解线性方程组$\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$.

55. 解线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4 \end{cases}$

56. 解线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2 \end{cases}$.

57. 已知$\beta=(1,2,1,1)$ $\alpha_1=(1,1,1,1)$，$\alpha_2=(1,1,-1,-1)$，$\alpha_3=(1,-1,1,-1)$，$\alpha_4=(1,-1,-1,1)$，把β

表示成α_1, α_2, α_3, α_4的线性组合.

58. 判别向量组$\alpha_1=(0,0,2,3)$，$\alpha_2=(1,2,3,4)$，$\alpha_3=(1,2,1,1)$，$\alpha_4=(1,0,1,0)$是否线性相关，并求α_1, α_2, α_3, α_4的一个极大线性无关组.

59. 求向量组$\alpha_1=(6,4,1,-1,2)$，$\alpha_2=(1,0,2,3,-4)$，$\alpha_3=(1,4,-9,-16,22)$，$\alpha_4=(7,1,0,-1,3)$的极大无关组与秩.

60. 求向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(0,3,1,2)$，$\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,-1,2,0)$，$\alpha_5=(2,1,5,6)$的极大无关组与秩．并求出组中其余向量被该极大无关组线性表出的表达式.

61. 求向量组$\alpha=(1,1,1)$，$\beta=(1,2,3)$，$\gamma=(3,4,5)$的一个极大线性无关组，并将其余向量表为该极大线性无关组的线性组合.

62. 已知向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$线性相关，求$a$的值.

63. 求矩阵$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$的秩.

64. 求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$的秩.

65. 求矩阵$\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}$的秩.

66. 求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$的秩.

67. 求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$的秩.

68. λ 取怎样的数值时，线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ \lambda^2 x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ \lambda^3 x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$ 有唯一解，没有解，有无穷多个解.

69. λ 取怎样的数值时，线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解，没有解，有无穷多解.

70. λ 取怎样的数值时，线性方程组 $\begin{cases} (\lambda + 3) x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda - 1) x_2 + x_3 = 2\lambda \\ 3(\lambda + 1) x_1 + \lambda x_2 + (\lambda + 3) x_3 = 3 \end{cases}$ 有唯一解，没有解，有无穷多个解.

71. λ 取怎样的数值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = \lambda \end{cases}$ 有唯一解，没有解，有无穷多个解.

72. a,b 取怎样的数值时，线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ 有唯一解，没有解，有无穷多个解.

73. 讨论a取何值时，方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=a-3 \\ x_1+ax_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+ax_3=-2 \end{cases}$ 有解，并求解.

74. 讨论a取什么值时，方程组$\begin{cases} x_1+(a^2+1)x_2+2x_3=a \\ ax_1+ax_2+(2a+1)x_3=0 \\ x_1+(2a+1)x_2+2x_3=2 \end{cases}$有解，并求解.

75. a取什么值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-x_4=2 \\ 3x_1+4x_2+5x_3-4x_4=a \end{cases}$ 有解？在有解的情形，求全部解.

76. a,b取什么值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$ 有解？在有解的情形，求全部解.

77. 选择λ，使方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=4 \\ 2x_1+x_2-2x_3=6 \\ \lambda x_1+x_2-x_3=4 \end{cases}$无解.

78. 确定 λ 的值，使齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解.

79. 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解？

80. 齐次线性方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 k 为何值？

81. 问 λ， μ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解？

82. 问 λ 取何值时，非线性方程组 $\begin{cases} (1+\lambda) x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda) x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda) x_3 = \lambda \end{cases}$ 有无限多个解？

83. 齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + bx_4 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 a,b 应满足什么条件？

84. 确定λ的值，使线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+\lambda x_3=3 \\ x_1+\lambda x_2+3x_3=2 \end{cases}$无解？有惟一解？有无穷多解？

85. λ取怎样的数值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+9x_2+3x_3-5x_4=\lambda \end{cases}$有解，并求出一般解.

86. 设线性方程组为$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3+(\lambda-1)x_4=1 \end{cases}$讨论$\lambda$为何值时，下面线性方程组有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解（要求用导出组的基础解系及它的特解形式表示其通解）.

87. 求线性齐次方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$的基础解系.

88. 求线性齐次方程组$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$的基础解系.

89. 求线性齐次方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4-x_5=0 \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0 \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$的基础解系.

90. 求线性齐次方程组$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$的基础解系.

91. 求线性齐次方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0 \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0 \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0 \end{cases}$的基础解系.

92. 求线性齐次方程组$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=0 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系.

93. 求线性齐次方程组$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_5=0 \\ -x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2-2x_3-x_5=0 \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$的基础解系.

94. 求线性齐次方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_2=0 \end{cases}$ 的基础解系.

95. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$ 的通解.

96. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0 \end{cases}$ 的通解.

五、证明题

97. 证明一个线性方程组的增广矩阵的秩比系数矩阵的秩最多大 1.

98. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量，已知单位向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可被它们线性表出，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

99. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关.

100. 证明：与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系.

101. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩为 r，证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意$r$个线性无关的向量都构成它的一个极大无关组.

102. 设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，证明表法唯一的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

103. $\alpha_i=\left(a_{i1},a_{i2},\cdots a_{in}\right),\mathrm{i}=1,2,\cdots,n.$证明：如果$\left|a_{ij}\right|\neq 0$，那么$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

104. 设$t_1,\mathrm{t}_2,\cdots t_r$是互不相同的数，$r\leq n$. 证明：$\alpha_i=\left(1,\mathrm{t}_i,\cdots,\mathrm{t}_i^{n-1}\right),\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{r}.$是线性无关的.

105. 设在向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$中，$\alpha_1\neq 0$并且每一$\alpha_i$都不能表成它的前$i-1$个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$的线性组合，证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

106. 设$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$，证明向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

107. 设 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$. 用线性方程组的理论证明，若是 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根，那么 $f(x)$ 是零多项式.

第四章 矩阵

一、是非题（下列命题正确的打√，错误的打×）

1. A,B,C 为 n 阶方阵，若 $AB=AC$， 则 $B=C$. ( )

2.设 A 是 n 阶矩阵，则 $A^kA^l=A^{k+l},\left(A^k\right)^l=A^{kl}$. ( )

3.设 A,B 为 n 阶矩阵，则 $(AB)^k=A^kB^k$. ( )

4.如果 $A^2=0$, 那么 $A=0$. ( )

5. n 阶数量矩阵与所有 n 阶矩阵作乘积时是可交换的. ( )

6.设 A,B 为 n 阶矩阵，则 $(AB)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$. ( )

7.设 A,B 为 n 阶矩阵，则 $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^T+B^T$. ( )

8.设矩阵 A 是矩阵，则 $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=-A^{\mathrm{T}}$ ( )

9.设矩阵 A 是矩阵， k 是任意实数，则 $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$. ( )

10. 设 A,B 为 n 阶矩阵，则 $|AB|=|A||B|$. ( )

11. A,B 是 n 阶矩阵， AB 为退化的充要条件是 A,B 中至少有一个是退化的. ( )

12. 秩 (AB) = 秩 (A) + 秩 (B). ( )

13. 若矩阵 A 可逆，则矩阵 AB 的秩等于矩阵 B 的秩. ( )

14. 若矩阵 A,B 都可逆，则矩阵 $A+B$ 也可逆. ( )

15. 若矩阵 AB 不可逆，则矩阵 A,B 都不可逆. ( )

16. 若矩阵 A,B 都可逆，则矩阵 AB 也可逆. ( )

17. 若矩阵 A,B 都可逆，则 $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$. ( )

18. 若矩阵 A 都可逆，则 $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$. ( )

19. n 阶矩阵 A 可逆，则 A^* 也可逆. ( )

20. 若 $A+A^2=E$， 则 A 为可逆矩阵. ( )

21. A,B,C 为 n 阶方阵，若 $AB=AC$, 且 A 可逆， 则 $B=C$. ( )

22. 初等矩阵都是可逆矩阵. ( )

23. 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘上相应的 m 阶初等矩阵. ( )

24. 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘上相应的 n 阶初等矩阵. ( )

25. 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘上相应的 n 阶初等矩阵. ( )

26. 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘上相应的 m 阶初等矩阵. ( )

27. n 阶矩阵 A 可逆的充要条件是 A 能表示成一些初等矩阵的乘积. ( )

28. 可逆矩阵一定能经过一系列的初等变换化为单位矩阵. ( )

二、选择题（从 A、B、C、D 中选出一个正确答案）

29. 设 A,B 是 $m\times n$ 矩阵，则下列矩阵的乘积有意义的是 （ ）

A. AB, AB^T B. AB^T, A^TB C. AB, A^TB D. AB, BA

30. 已知 $A=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 1 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$，下列运算有意义的是 （ ）

A. $A+B$ B. $A-B$ C. AB D. $AB-BA$

31. 设 A, B 分别是 $m\times n$, $n\times s$ 矩阵，若 A 的第 i 行元素全为 0,则下列正确的是（ ）

A. AB 的第 i 行元素全为 0 B. BA 的第 i 行元素全为 0

C. AB 的第 i 列元素全为 0 D. BA 的第 i 列元素全为 0

32. A 是 $m\times k$ 矩阵, B 是 $k\times t$ 矩阵, 若 B 的第 j 列元素全为 0，则下列正确的是（ ）

A. AB 的第 j 行元素全为 0 B. AB 的第 j 列元素全为 0

C. BA 的第 j 行元素全为 0 D. BA 的第 j 列元素全为 0

33. 设 A, B, C 是 n 阶矩阵，则下列正确的是 （ ）

A. 若 A 是可逆矩阵，则由 $AB=AC$ 得 $BA=CA$ B. 若 A 是可逆矩阵，则 $AB=BA$

C. 若 $A\neq 0$,则由 $AB=AC$ 得 $B=C$ D. 若 $B\neq C$，则 $BA\neq CA$

34. 设A,B,C是n阶矩阵，则下列不正确的是 （ ）

A. 若$AB=AC$，则$B=C$ B. 若$AB=AC$且$|A|\neq 0$，则$B=C$

C. $(AB)C=A(BC)$ D. $(A+B)C=AC+BC$

35. 设A是任意一个n阶矩阵，下列矩阵是对称矩阵的是 （ ）

A. AA^T B. $A-A^T$ C. A^T-A D. A^2

36. 若矩阵A可逆，则下列正确的是 （ ）

A. A与任意一个同阶矩阵的乘积仍是可逆矩阵

B. 若B是同阶的初等矩阵，则AB是可逆矩阵

C. 若B是同阶的可逆矩阵，则$A+B$的行列式不等于 0

D. A与任意一个常数的乘积仍然是可逆的

37. 下列命题正确的是 （ ）

A. 若$AB=AC$，则$B=C$ B. 若$AB=AC$，且$B\neq 0,C\neq 0$，则$B=C$

C. 若$A\neq 0$,则由$AB=AC$得$B=C$ D. 若$AB=AC$，且$|A|\neq 0$，则$B=C$

38. 设A,B为n阶方阵，E为n阶单位阵，则以下命题中正确的是 （ ）

A. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ B. $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

C. $(AB)^2=A^2B^2$ D. $A^2-E^2=(A+E)(A-E)$

39. 设A,B是两个$m\times n$矩阵，C是n阶矩阵，则以下命题中正确的是 （ ）

A. $C(A+B)=CA+CB$ B. $(A^T+B^T)C=A^TC+B^TC$

C. $C^T(A+B)=C^TA+C^TB$ D. $(A+B)C=AC+BC$

40. 下列命题中正确的是 （ ）

A. n阶数量阵与任何一个n阶矩阵都是可交换的

B. 若矩阵A满足$A^2=0$，则$A=0$

C. 若行列式$|A|=0$,则$A=0$

D. 对任意方阵A,B，有$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

41. 设A是n阶对称矩阵，B是n阶反对称矩阵$(B^T=-B)$,则下列矩阵中为反对称矩阵的是

( )

A. $AB-BA$　B. $AB+BA$　C. $(AB)^2$　D. BAB

42. A,B为n阶矩阵,下列命题不正确的是 ( )

A. $|AB|=|A||B|$　B. $AB=BA$　C. 秩$(AB)\le$秩(A)

D. AB退化的充要条件是A,B中至少有一个退化.

43. 若矩阵A可逆，则下列关于A的伴随矩阵A^*正确的是 ( )

A. $\frac{1}{|\mathrm{A}|}A$　B. $\frac{1}{|\mathrm{A}|}A^{-1}$　C. $|\mathrm{A}|A$　D. $|\mathrm{A}|A^{-1}$

44. 设A是5阶方阵，且$|A|\neq 0$，则A的伴随矩阵A^*的行列式等于 ( )

A. $|A|$　B. $|A|^2$　C. $|A|^3$　D. $|A|^4$

45. 设$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$，且$AP=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$，则$P=$ ( )

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

46. 设$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$，若$AP=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 2b_1 \\ a_2 & c_2 & 2b_2 \\ a_3 & c_3 & 2b_3 \end{bmatrix}$，则$P=$ ( )

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

47. 下列是n阶矩阵A是可逆矩阵的充要条件是 ( )

A. $|A|=1$　B. $|A|=0$　C. $A=A^T$　D. $|A|\neq 0$

48. A,B,C均是n阶矩阵，E为n阶单位矩阵，若$ABC=E$，则有 ( )

A. $ACB=E$　B. $BAC=E$　C. $BCA=E$　D. $CBA=E$

49. A是n阶方阵，A^*是其伴随矩阵，则下列结论不正确的是 ( )

A.若A是可逆矩阵，则A^*也是可逆矩阵

B.若A是不可逆矩阵，则A^*也是不可逆矩阵

C. 若$\left|A^*\right|\neq 0$，则A是可逆矩阵　　　D. $\left|AA^*\right|=\left|A\right|$.

50. 设$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$,其中$A_{ij}$是$a_{ij}$的代数余子式，则（　　）

A. A是B的伴随　B. B是A的伴随　C. B是A'的伴随　D. 以上结论都不对

51. 设A是一个上三角阵，且$\left|A\right|=0$，那么A的主对角线上的元素　（　　）

A. 全为零　B. 只有一个为零　C. 至少有一个为零 D. 可能有零，也可能没有

52. 设$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，则$A^{-1}=$　（　　）

A. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

53. 设同阶矩阵A,B都可逆,则下列哪项也可逆　（　　）

A. $A+B$　B. $A-B$　C. $A^{-1}+B^{-1}$　D. AB

三、填空题

54. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 $3A+2B=$________；$AB=$______；$B^T=$________.

55. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$，则$3A-B=$______，$A^{-1}B=$____________.

56. 设$AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$,$\left|A\right|=3$.则$\left|B\right|=$____________________ .

57. 设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$,$C=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，则$\left|B(2A-C)\right|=$____________

58. 设A为三阶矩阵，且$\left|A\right|=2$，则$\left|2A^*-A^{-1}\right|=$_________.

59. 设矩阵 A 为 3 阶方阵，且|A|=5，则$\left|A^*\right|=$_________，|$\left|2A\right|=$____________ .

60. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$，则$AB^T=$ ___________.

61. 若 A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 则 r(A)=________________.

62. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$， $B=A^2-3A+2I$ ，则 $B^{-1}=$___________.

63. 设 A 是方阵，已知 $A^2-2A-2I=O$ ，则 $(A+I)^{-1}=$_____________.

64. 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4I=O$ ，则 $(A-I)^{-1}=$______________.

65. 设 A 是 4×3 矩阵且 $r(A)=2$ ， $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，则 $r(AB)=$____________.

66. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ，则 $(A^*)^{-1}=$_______________________ .

67. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，则 $(A-2I)^{-1}=$_________________ .

68. 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，则 $A^{-1}=$ ___________ .

69. 设 A 为三阶方阵， A^* 为 A 的伴随矩阵，有 $|A|=2$ ，则 $\left|(\frac{1}{3}A)^{-1}-2A^*\right|=$__________.

70. 已知 A 为四阶方阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$ ，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$ _____________.

71. 设 A,B 为 4 阶方阵，且 $|A|=3$ ，则 $\left|-(3A)^{-1}\right|=$________， $\left|BA^2B^{-1}\right|=$_______.

72. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$, $A^2=$ __________， $A^n=$__________.

73. 若 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,则 $A^*=$____________ ， $A^{-1}=$ __________ .

74. 设 A 可逆，则数乘矩阵 kA 可逆的充要条件是__________________.

75. 设A为三阶方阵，A^*为A的伴随矩阵，有$|A|=2$，则$\left|(\frac{1}{3}A)^{-1}-2A^*\right|=$_________ .

76. 设$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{bmatrix}$，则$(A^*)^{-1}=$ ________________.

77. 设$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$， 则$(A+2I)^{-1}(A^2-4I)=$________________________ .

78. 设$A=\begin{pmatrix}5&-2\\-3&1\end{pmatrix}$,则$A^*=$_________,$A^{-1}$ =_________.

79. 已知$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$,则$X=$_____________________ .

80. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}3&4&1\\2&-7&-1\\8&1&5\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}8&1&5\\2&-7&-1\\3&4&1\end{pmatrix}$,且$PA=B$， P为初等矩阵,则$P=$______.

81. 三阶对角矩阵$A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$，则$A$的伴随矩阵$A^*=$_____________ .

82. 设A,B都是可逆矩阵，矩阵$C=\begin{bmatrix}0&A\\B&0\end{bmatrix}$的逆矩阵为_____________.

83. A既是对称，又是反对陈矩阵，则矩阵$A=$ ___________.

四、计算题

84. 设$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,计算$AB$， $AB-BA$.

85. $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\\1&1&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&a&c\\1&b&b\\1&c&a\end{pmatrix}$,计算$AB$， $AB-BA$.

86. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB=A+2B$ ，求 B.

87. 设 $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，求 B^n.

88. 设 $P^{-1}AP=B$，其中 $P=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，求 A^{11}.

89. 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

90. 计算 $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

91. 计算 1）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$ 2）计算 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^n$.

92. 计算$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

93. 设 $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$，$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求 $f(A)$.

94. 设 $f(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+3$，$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$，求 $f(A)$.

95. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵.

96. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵.

97. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵.

98. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$.

99. 设$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$.

100. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$.

101. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$.

102. 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$.

103. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

104. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \\ -1 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

105. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}.

106. 设求 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, A^{-1}.

107. 设 $X=\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix}$, 已知 A^{-1},C^{-1}存在，求 X^{-1}.

108. 设 $X=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，求 X^{-1}.

109. 设 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

110. 设 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

111. 设 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

112. 设 $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X

113. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 且 $A^2-AX=I$，求矩阵 X .

114. 解矩阵方程 $X\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ ，求矩阵 X 。

115. 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，证明 A 及 $A+2E$ 都可逆，并求 A^{-1}, $\left(A+2E\right)^{-1}$.

五、证明题

116. 证明：$\left|A^*\right|=\left|A\right|^{n-1}$，其中 A 是 $n\times n$ 矩阵 $(n>2)$.

117. 设 A 和 B 均为 n 阶可逆矩阵，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵， B^* 是 B 的伴随矩阵，证明：$(AB)^*=B^*A^*$，其中 $(AB)^*$ 是 AB 的伴随矩阵.

118. 证明：如果 A 是 $n\times n$ 矩阵 $(n>2)$，那么 $rank(A^*)=\begin{cases}n, & 当rank(A)=n\\ 1, & 当rank(A)=n-1\\ 0, & 当rank(A)<n-1\end{cases}$.

119. 设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ 其中 $a_i \ne a_j$（当 $i \ne j$ 时）（$i, j=1,2,\cdots,n$）. 证明：与 A 可交换的矩阵只能是对角矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$.

120. 设 $A=\begin{pmatrix} a_1E_1 & & & \\ & a_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_rE_r \end{pmatrix}$, 其中 $a_i \ne a_j$（当 $i \ne j$ 时）（$i, j=1,2,\cdots,r$），E_i 是 n_i 阶单位矩阵，$\sum_{i=1}^{r} n_i = n$, 证明：与可交换的矩阵只能是准对角矩阵 $\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$, 其中 A_i 是 n_i 阶矩阵（$i=1,2,\cdots,r$）.

121. 用 E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素（即 (i,j) 元）为 1，而其余元素全为零的 $n\times n$ 矩阵，而 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 证明：1）如果 $AE_{12}=E_{12}A$，那么当 $k\ne 1$ 时 $a_{k1}=0$，当 $k \ne 2$ 时 $a_{2k}=0$；

2）如果 $AE_{ij}=E_{ij}A$，那么当 $k \ne i$ 时 $a_{ki}=0$，当 $k \ne j$ 时 $a_{jk}=0$，且 $a_{ii}=a_{jj}$；

3）如果 A 与所有的 n 阶矩阵可交换，那么 A 一定是数量矩阵，即 $A=aE$.

122. 如果 $AB=BA, AC=CA$ ，证明： $A(B+C)=(B+C)A,\ A(BC)=(BC)A$.

123. 如果 $A=\frac{1}{2}(B+E)$ ，证明： $A^2=A$ 当且仅当 $B^2=E$.

124. 矩阵称 A 为对称的，如果 $A=A'$. 证明：如果 A 是实对称矩阵，且 $A^2=0$ ，那么 $A=0$.

125. 设 A,B 都是 $n\times n$ 对称矩阵，证明： AB 也对称当且仅当 A,B 可交换.

126. 矩阵 A 称为反对称的，如果 $A'=-A$ ，证明：任一 $n\times n$ 矩阵都可表为一对称矩阵与一反对称矩阵之和.

127. 如果对称矩阵 A 为非奇异, 试证: A^{-1} 也是对称矩阵.

128. 设 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k(k=0,1,2\cdots)$ $a_{ij}=s_{i+j-2}$ $(i,j=1,2,\cdots n)$. 证明： $\left|a_{ij}\right|=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2$.

129. 设A是$n\times n$矩阵，证明：存在一个$n\times n$非零矩阵B使$AB=0$的充分必要条件是$|A|=0$.

130. 设A是$n\times n$矩阵，若对任一n维向量$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$都有$AX=0$，则$A=0$.

131. 设B为一$r\times r$矩阵，C为$r\times n$矩阵，且$rank(C)=r$. 证明：若$BC=0$，则$B=0$；若$BC=C$，则$B=E$.

132. 证明：$rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$.

133. 设A,B为$n\times n$矩阵，证明：如果$AB=0$，那么$rank(A)+rank(B)\le n$.

134. 证明：若$A^k=0$，则$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

135. 证明：1）如果A可逆对称（反对称），那么A^{-1}也对称（反对称）；2）不存在奇数阶的可逆反对称矩阵.

136. 矩阵$A=(a_{ij})$称为上（下）三角矩阵，如果当$i>j(i<j)$时有$a_{ij}=0$.

证明：1) 两个上（下）三角形矩阵的乘积仍是上（下）三角矩阵；

2) 可逆的上（下）三角矩阵的逆仍是上（下）三角矩阵.

137. 设 A,B,C 都是 n 阶方阵，且 C 可逆，C^{-1} =（$C^{-1}B+E$）A^{T},

证明：A 可逆且 A^{-1} =（$B+C$）$^{\mathrm{T}}$.

138. 证明：若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 为不可逆矩阵。

139. 试证：对任意方阵 $\boldsymbol{A}$，均有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{T}$ 为对称矩阵， $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{T}$ 为反对称矩阵.

140. 设矩阵 A 是 2 阶方阵，证明：若 $A^l=0, l\geq 2$， $A^2=0$.

141. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，证明：若 $A^2=E$，则秩$\left(A+E\right)$+秩$\left(A-E\right)=n$..

142. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，证明：若 $A^2=A$，则秩$\left(A\right)$+秩$\left(A-E\right)=n$.