

第三节 向量组的线性相关性

主要内容

- 向量组等价
- 向量组的线性相关性
- 用定义判别线性相关性
- 线性相关性的判别定理
- 极大线性无关组
- 方程组与向量组的关系的进一步研究

一、向量组等价 1. 线性表出

【问题提出】一个混凝土生产企业可以生产出三种型号不同的混凝土，它们具体的配方比例如下表所示：

	型号1混凝土	型号2混凝土	型号3混凝土
水	10	10	10
水泥	22	26	18
沙子	32	31	29
石头	53	64	50
煤炭灰	0	5	8

问：现在客户要求混凝土中含水，水泥，沙子，石头，煤炭灰的配比分别为：24, 52, 73, 133, 12, 那么，能否用这三种混凝土配出满足其要求的混凝土？

【关系建立】首先将三种型号的混凝土分别表示为

	型号1	型号2	型号3
水	10	10	10
水泥	22	26	18
沙子	32	31	29
石头	53	64	50
煤炭灰	0	5	8

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 32 \\ 53 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 31 \\ 64 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 29 \\ 50 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$b_1^T = (24, 52, 73, 133, 12)$$

【关系建立】客户要求混凝土是否被这三种型号的混凝土表示的问题就转换成

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 52 \\ 73 \\ 133 \\ 12 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 32 \\ 53 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 31 \\ 64 \\ 5 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 29 \\ 50 \\ 8 \end{pmatrix}$$

简记为

$$b_1 = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$$

例 设有方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

则方程组所对应的向量组为

$$\alpha_1 = (2, -1, 3, 1), \alpha_2 = (4, -2, 5, 4), \alpha_3 = (2, -1, 4, -1)$$

此时, $\alpha_3 = 3\alpha_1 - \alpha_2$.

定义 9 向量 α 称为向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的一个**线性组合**, 如果有数域 P 中的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使

$$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + \beta_s.$$

这时也称向量 α 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ **线性表出**.

问题：线性表出在线性方程组中的意义？

例 设有方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

则方程组所对应的向量组为

$$\alpha_1 = (2, -1, 3, 1), \alpha_2 = (4, -2, 5, 4), \alpha_3 = (2, -1, 4, -1)$$

因为 $\alpha_3 = 3\alpha_1 - \alpha_2$ ，则方程组的第三个方程是多余的，去掉它也不影响方程组的解。

因为满足第一、第二个方程的解一定满足第三个方程，方程组的解完全由前两个方程确定，第三个方程是多余的。

【问题提升】

第二家生产混凝土企业，也可以生产出三种不同型号的混凝土，它们具体的配方表如下表所示：

	型号1混凝土	型号2混凝土	型号3混凝土
水	12	8	9.5
水泥	26.4	20.8	17.1
沙子	38.4	24.8	27.55
石头	63.6	51.2	47.5
煤炭灰	0	4	7.6

问题：

第二家生产的这三种混凝土是否可以代替第一家企业的三种混凝土？

【问题分解】 设第二家生产的三种型号的混凝土分别表示为

	型号1	型号2	型号3
水	12	8	9.5
水泥	26.4	20.8	17.1
沙子	38.4	24.8	27.55
石头	63.6	51.2	47.5
煤炭灰	0	4	7.6

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 26.4 \\ 38.4 \\ 63.6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 20.8 \\ 24.8 \\ 51.2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 9.5 \\ 17.1 \\ 27.55 \\ 47.5 \\ 7.6 \end{pmatrix}$$

则该问题转向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 能否被向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 线性表出?

第一家企业的三种产品可以代替第二家企业的产品吗?

则该问题转向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 能否被向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?

3. 两个向量组等价的定义

定义 10 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 中每一个向量 α_i ($i = 1, 2, \dots, t$) 都可以经向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 就称为可以经向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出.

如果两个向量组互相可以线性表出, 它们就称为**等价**.

例如, 设 $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 0);$

$\beta_1 = (1, 0, 2), \beta_2 = (0, 1, -1).$

求向量组 α_1, α_2 与向量组 β_1, β_2 是否等价?

4. 等价向量组的性质

1) 反身性：每一个向量组都与它自身等价.

2) 对称性：如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 等价，那么向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 等价.

3) 传递性：如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 等价， $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 与 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ 等价，那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 与 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ 等价.

二、向量组的线性相关性

1. 定义

定义 11 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 2$) 中有一个向量可以由其余向量线性表出, 那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 称为**线性相关的**.

例如, 向量组

$$\alpha_1 = (2, -1, 3, 1), \alpha_2 = (4, -2, 5, 4), \alpha_3 = (2, -1, 4, -1)$$

是线性相关的, 因为 $\alpha_3 = 3\alpha_1 - \alpha_2$.

问：任意一组包含零向量的向量组一定是线性相关吗？

定义 11' 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 1$) 称为**线性相关**,

如果有数域 P 中不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0.$$

问：1. 定义 11 与定义 11' 的区别和联系？

2. 能否证明当 n 大于等于 2 时，它们是一致？

定义 12 一向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 1$) 不线性相关, 即没有不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}.$$

就称为**线性无关**; 或者说, 一向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 称为线性无关, 如果由

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

可以推出

$$k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0.$$

2. 向量组与其部分组的线性相关性的关系

若一向量组的部分组线性相关，则该向量组线性相关；

若一向量组线性无关，则它的任何一个非空的部分组也线性无关。

证明 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_r$ ($s \leq r$) 的一个部分组,不妨设为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 即有不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}.$$

由上式显然有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s + 0\alpha_{s+1} + \dots + 0\alpha_r = \mathbf{0}$.

因为 k_1, k_2, \dots, k_s 不全为 0, 所以

$$k_1, k_2, \dots, k_s, 0, \dots, 0$$

也不全为 0, 因而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_r$ 线性相关.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 不妨假设

它的一个部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则由上

述已证的结论知, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_r$ 线性相关

矛盾, 所以它的任何一个非空的部分组都是线性

无关的.

3. 特殊向量组线性相关的充要条件

1) 由一个向量构成的向量组 $A: a$ 线性相关的充要条件是:

$$a = 0.$$

2) 由两个向量 a_1, a_2 线性相关的充要条件是:

a_1, a_2 的分量对应成比例.

例如 向量组: $a_1 = (1 \ -1 \ 2), a_2 = (3 \ -3 \ 6)$

因为 $-3a_1 + a_2 = 0,$

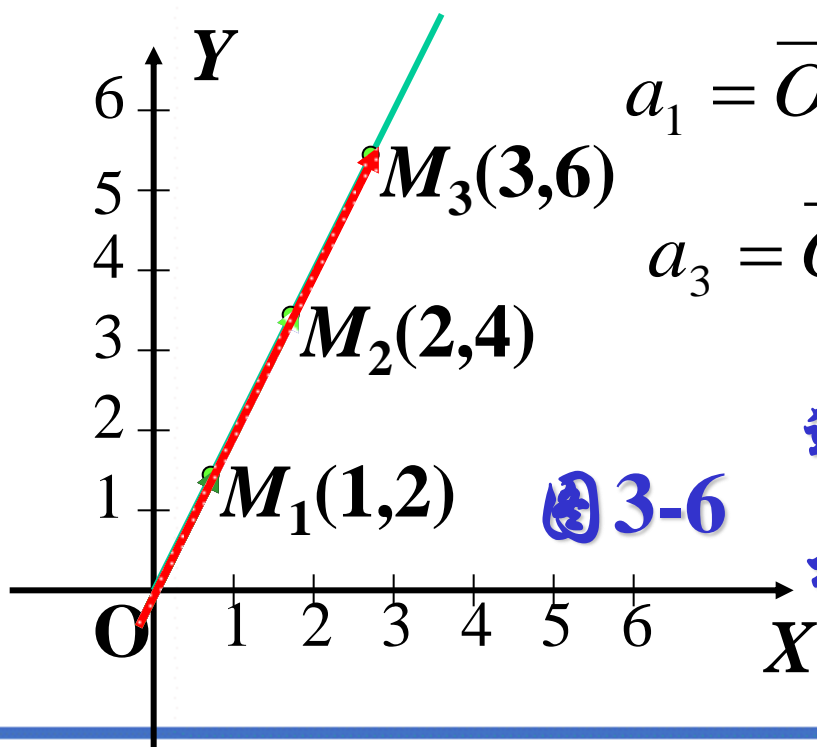
所以线性相关. 而这两个向量的对应分量的比都是 $1/3$.

4. 向量组线性相关的几何意义

1) 由两个2维向量构成的向量组 $A: a_1, a_2$

线性相关的几何意义是: a_1, a_2 共线.

在直线 $y = 2x$ 取三点 M_1, M_2, M_3 , 作三个向量:



$$a_1 = \overrightarrow{OM_1} = (1,2) \quad a_2 = \overrightarrow{OM_2} = (2,4)$$

$$a_3 = \overrightarrow{OM_3} = (3,6)$$

图3-6

这三个向量中的任意两个向量
构成的向量组都是线性相关的。

2) 由3个3维向量构成的向量组线性相关的几何意义是

这3个向量共面. 如给定平面 $\pi: x+y+z=3$.

在 π 上取四点: $M_1(1,1,1)$, $M_2(2,0,1)$, $M_3(0,2,1)$, $R(0,0,3)$,

作三个向量: $a_1 = \overrightarrow{RM_1} = (1,1,-2)$ $a_2 = \overrightarrow{RM_2} = (2,0,-2)$

$$a_3 = \overrightarrow{RM_3} = (0,2,-2)$$

向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关, 因为 $2a_1 - a_2 - a_3 = 0$.

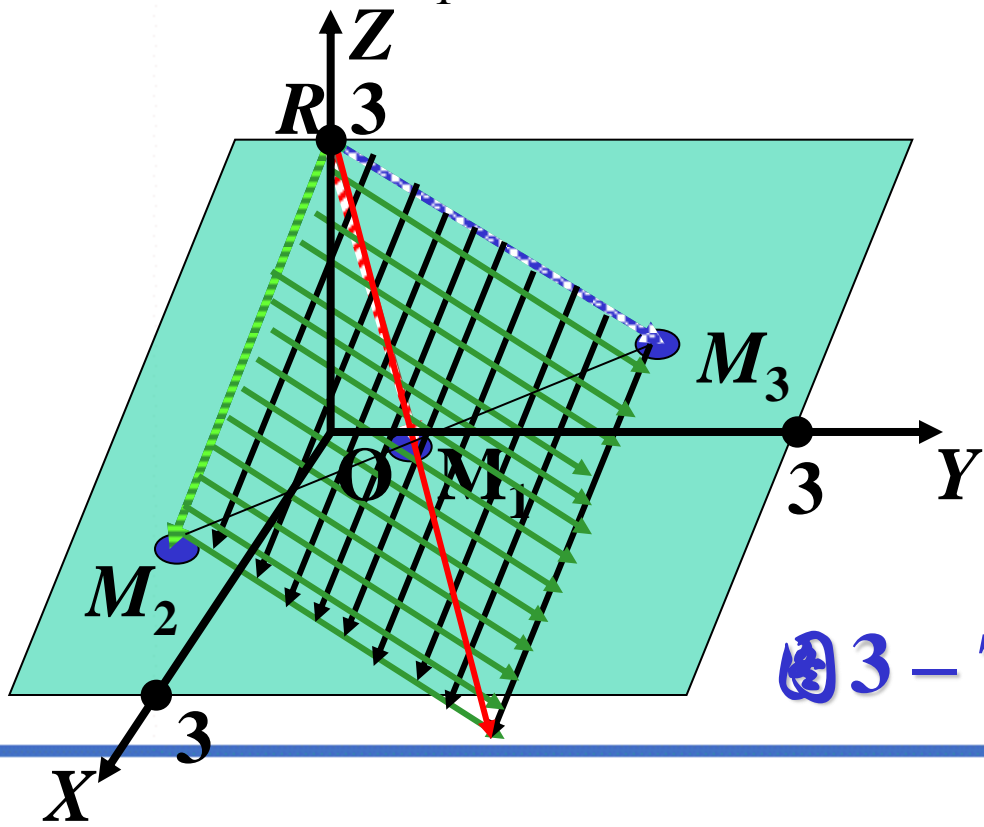


图3-7

三、用定义判别线性相关性

例 1 判别 n 维单位坐标向量组

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0), \\ \varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0), \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 1), \end{array} \right.$$

的线性相关性.

例 2 判断向量组

$$\alpha_1 = (2, -1, 3, 1), \alpha_2 = (4, -2, 5, 4), \alpha_3 = (2, -1, 4, -1)$$

的线性相关性.

解 设有 3 个数 x_1, x_2, x_3 , 使 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \mathbf{0}$.

这个向量等式对应的线性方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

用消元法求解得, 它有无穷多解, 当然有非零解. 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

用定义判别向量组 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, s$ 的线性相关性的方法是：设有 s 个数 x_1, x_2, \dots, x_s , 使

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \mathbf{0}.$$

该向量方程所对应的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{s1}x_s = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{s2}x_s = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{sn}x_s = 0, \end{cases}$$

若该线性方程组有非零解，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关；

若它只有零解，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关。

一、向量组等价

1. 线性表出
2. n 维单位坐标向量
3. 两个向量组等价的定义
4. 等价向量组的性质

二、向量组的线性相关性

1. 定义
2. 向量组与其部分组的线性相关性的关系
3. 特殊向量组线性相关的充要条件
4. 向量组线性相关的几何意义

三、用定义判别线性相关性

四、线性相关性的判别定理

判别方法 1 设向量组

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), i = 1, 2, \dots, s$$

线性无关. 在每一个向量上添一个分量所得到的 $n+1$ 维的向量组

$$\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, a_{i,n+1}), i = 1, 2, \dots, s$$

问: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性相关性?

这个结论能否推广到添几个分量的情形?

答: 线性无关, 而且可以推广.

证明 因为向量组

$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), i = 1, 2, \dots, s$ 线性无关,

所以方程 $x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + \dots + x_n \beta_n = 0$ 只有零解.

也就是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{s1}x_s = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{s2}x_s = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{sn}x_s = 0, \end{cases} \quad (1) \text{ 只有零解.}$$

要找向量组 $\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, a_{i,n+1}), i = 1, 2, \dots, s$

线性相关性, 只需要找到方程 $x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + \dots + x_n \beta_n = 0$

是否有非零解.

只需证明它对应的线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{s1}x_s = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{s2}x_s = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{sn}x_s = 0, \\ a_{1,n+1}x_1 + a_{2,n+1}x_2 + \cdots + a_{s,n+1}x_s = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

是否有非零解. 因为方程组 (2) 中的前 s 个方程即为方程组 (1), 所以方程组 (2) 的解全是方程组 (1) 的解.

方程组 (1) 只有零解, 因而方程组 (2) 也只有零解.

综上所述, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 也线性无关.

判别方法 2 (定理 2)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是两个向量组. 如果

1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出,

2) $r > s$,

那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关性? 答: 线性相关

分析: 为了证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 必线性相关,

只需找一组不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_r , 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = \mathbf{0}.$$

这也就是要证明 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_r\alpha_r = \mathbf{0}$ 有非零解.

因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出,

$$\alpha_1 = t_{11}\beta_1 + t_{21}\beta_2 + t_{31}\beta_3 + \dots + t_{s1}\beta_s$$

$$\alpha_2 = t_{12}\beta_1 + t_{22}\beta_2 + t_{32}\beta_3 + \dots + t_{s2}\beta_s$$

.....

$$\alpha_r = t_{1r}\beta_1 + t_{2r}\beta_2 + t_{3r}\beta_3 + \dots + t_{sr}\beta_s$$

所以 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_r\alpha_r = (t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \dots + t_{1r}x_r)\beta_1 +$
 $(t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \dots + t_{2r}x_r)\beta_2 + \dots +$
 $(t_{s1}x_1 + t_{s2}x_2 + \dots + t_{sr}x_r)\beta_s$

要想使 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_r\alpha_r = 0$, 可以考虑

$$\begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \dots + t_{1r}x_r = 0 \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \dots + t_{2r}x_r = 0 \\ \dots \dots \\ t_{s1}x_1 + t_{s2}x_2 + \dots + t_{sr}x_r = 0 \end{cases}$$

已知 $r > s$,

从而左边的方程组
有非零解.

证明 由 1) 有 $\alpha_i = \sum_{j=1}^s t_{ji} \beta_j, \quad i = 1, 2, \dots, r.$

为了证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 只要证可以找到不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_r , 使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_r \alpha_r = \mathbf{0}.$$

为此, 作线性组合

$$\begin{aligned} x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_r \alpha_r &= \sum_{i=1}^r x_i \sum_{j=1}^s t_{ji} \beta_j \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s t_{ji} x_i \beta_j = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^s t_{ji} x_i \right) \beta_j \end{aligned}$$

如果我们能找到不全为零的数 x_1, x_2, \dots, x_r , 使 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的系数全为零, 那就证明了 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关性. 这一点是能够做到的, 因为由条件 2), 即 $r > s$, 齐次方程组

$$\begin{cases} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1r}x_r = 0, \\ t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \cdots + t_{2r}x_r = 0, \\ \dots\dots\dots \\ t_{s1}x_1 + t_{s2}x_2 + \cdots + t_{sr}x_r = 0, \end{cases}$$

中未知量的个数大于方程的个数, 根据定理1

它有非零解.

证毕

问题1 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$

线性表出, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关,

那么 r 与 s 的大小关系? **答: $r \leq s$**

问题2 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关性? **答: 线性相关**

证明 因为每个 n 维向量都可以被 n 维单位向量

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, 线性表出, 且 $n+1 > n$, 所以必线性相关.

问题3 两个线性无关的等价的向量组, 所含向量的个数

是否相等? **答: 相等**

五、极大线性无关组

1. 定义

定义 13 一个向量组的一个部分组称为一个**极大线性无关组**，如果这个部分组本身是线性无关并且从这向量组中任意添一个向量（如果还有的话），所得的部分向量组都线性相关。

例 3 设有向量组 $\alpha_1 = (2, -1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (4, -2, 5, 4)$, $\alpha_3 = (2, -1, 4, -1)$

求该向量组的极大线性无关组。提示： $3\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3$

一个向量组的极大无关组并不是唯一的。

性质1 任一极大线性无关组都与向量组本身是否等价?

答: 等价

一向量组的任意两个极大线性无关组都是否等价的?

答: 等价

定理3 一向量组的极大线性无关组含有相同个数的向量.



极大线性无关组都与向量组本身是否等价?

证明

设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$,

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是它的一个极大线性无关组.

所谓等价就是它们可以互相线性表出. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots,$

α_r 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一部分, 当然可以被这个向

量组线性表出, 即

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \dots + 1\alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \dots + 0\alpha_s, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

下证 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_s$ 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出.

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是极大线性无关组得 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_j$ 线性相关, 其中 $j = r+1, \dots, s$.

所以 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r + l\alpha_j = 0$, 且 $l \neq 0$.

若不然 $l = 0$ 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 与已知矛盾.

上式可改写为

$$\alpha_j = -\frac{k_1}{l}\alpha_1 - \frac{k_2}{l}\alpha_2 - \dots - \frac{k_r}{l}\alpha_r, \quad (r < j \leq s).$$

这就是说, α_j ($r < j \leq s$) 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出.

于是证明了向量组与它的极大线性无关组的等价性.

证毕

由性质 1 可推出如下结论: 一向量组的任意

两个极大线性无关组都是等价的.

定理 3 一向量组的极大线性无关组含有相同个数的向量。

证明 一向量组的任意两个极大线性无关组是等价的，
再由两个等价的线性无关向量组所含的向量个数相同。

由此即得定理 3。

证毕

3. 向量组的秩

定义 14 向量组的极大线性无关组所含向量的个数
称为这个向量组的秩。

例如，向量组 $\alpha_1 = (2, -1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (4, -2, 5, 4)$, $\alpha_3 = (2, -1, 4, -1)$
的秩为多少？ **答：秩为 2。**

关于向量组的秩的性质：

- 1) 一个向量组线性无关的充分必要条件是它的秩与它所含向量的个数相同。
- 2) 等价的向量组必有相同的秩。
- 3) 全部由零向量组成的向量组没有极大线性无关组，规定其秩为零。

设另有一个方程 $b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = d$, (B)

它对应的向量为 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n, d)$. 则 β 是

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_s\alpha_s$$

当且仅当

$$B = l_1(A_1) + l_2(A_2) + \dots + l_s(A_s),$$

即方程 (B) 是方程 $(A_1), (A_2), \dots, (A_s)$ 的线性组合.

容易验证, 方程组 $(A_1), (A_2), \dots, (A_s)$ 的解一定满

足方程 (B).

小结和作业

1. 请叙述数线性相关和线性无关的定义，及其判断向量组线性相关性的方法。
2. 请叙述极大线性无关组及其在解线性方程组中的作用。
3. 作业见学习通。