文山学院
WENSHAN UNIVERSITY

第 5章　二次型

第 3 节　唯 一 性

主要内容

- 问题的提出
- 复数域的情形
- 实数域的情形

一、问题的提出

问题1 二次型$f=X^TAX \xrightarrow{X=BY}$ 二次型$f=Y^T(B^TAB)Y$

$$=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\dots+d_ry_r^2,\quad d_i\neq 0,\ i=1,2,\dots,r.$$

秩(A)与秩(B^TAB)是否相等?

二次型经过非退化线性替换所得的标准形中，系数不为零的平方项的个数是唯一确定的，与所作的非退化线性替换无关. 称二次型矩阵的秩为二次型的秩.

问题2 求 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$经线性替换(1)和(2)所得的结果？

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

化成的标准形为

$$2u_1^2+6u_2^2-2u_3^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1^2+\frac{2}{3}v_2^2-\frac{1}{2}v_3^2 .$$

二次型的标准形不是唯一的，与所作的非退化线性替换有关.

问题： 如何在一般数域P上，进一步“规范” 平方项非零系数的形式？

二、复数域的情形

设 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是一个复系数的二次型.

经过一适当的非退化线性替换后 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 化成标准形， 不妨假设它的标准形是

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \ldots + d_ry_r^2, \quad d_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, r,$$

其中 r 是 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的矩阵的秩.

因为复数总可以开平方，所以再作一非退化线性替换

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}} z_i (i=1,2,\cdots,r), y_j = z_j (j=r+1,r+2,\cdots,n)$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1 \\ \cdots\cdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r \\ y_{r+1} = z_{r+1} \\ \cdots\cdots \\ y_n = z_n \end{cases}$$

$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \ldots + d_r y_r^2$， $d_i \neq 0$，

$i = 1, 2, \ldots, r$，就化成 $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2$.

称为复二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的**规范形**.

问：这里的 r 是怎么确定的？

r 是 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的矩阵的秩.

定理 3 任意一个复二次型，经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的.

定理 3′ 任一复数的对称矩阵A合同于一个形式为

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的对角矩阵，其中r是A的秩.

从而有，两个复数对称矩阵合同的充分必要条件是它们的秩相等.

例1 求 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 在复数域上的规范形，并写出所作的非退化的线性替换.

解

经线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

化成的标准形为 $2u_1^2+6u_2^2-2u_3^2$

令 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{-2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 得 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 在复数域上的规范形 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

因为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{-2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

所以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{6} & 1/\sqrt{-2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{-2} \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

三、实数域的情形

二次型 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 经线性替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

化成的标准形为

$$2u_1^2+6u_2^2-2u_3^2$$

令 $u_1=\dfrac{y_1}{\sqrt{2}}$，$u_2=\dfrac{y_2}{\sqrt{6}}$，$u_3=\dfrac{y_3}{\sqrt{2}}$

得 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 在R上的标准形 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

三、实数域的情形

二次型 f=$2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$经线性替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

化成的标准形为

$$2v_1^2+\frac{2}{3}v_2^2-\frac{1}{2}v_3^2 .$$

令 $u_1=\frac{y_1}{\sqrt{2}}, u_2=\frac{\sqrt{3}y_2}{\sqrt{2}}, u_3=\sqrt{2}y_3$

得f=$2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$在R上的标准形 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

三、实数域的情形

设 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是一个实系数的二次型.

经过一适当的非退化线性替换，再适当排列文字的次序，可使 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 变成标准形

$$d_1y_1^2 + \ldots + d_py_p^2 - d_{p+1}y_{p+1}^2 - \ldots - d_ry_r^2, \qquad (*)$$

其中 $d_i > 0$, $i = 1, \ldots, r$; r 是 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$的秩.

思考：1. 二次型(*)中作线性替换

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{d_i}} z_i, y_j = z_j, i = 1, 2, \cdots, p, j = r+1, \cdots, n$$

所得的二次型中带正号的项数不会因为线性变换的不同而改变，这是为什么？

思考2 在复数域化二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=-4x_1^2-13x_2^2+91x_3^2-8x_1x_2-18x_2x_3$$

为规范形.

对该二次型的标准形在R上作思考1的线性变换.

小结和作业

1.如何将二次型在复数域上化为其规范型？

2.复数域上的任意的对称矩阵合同与一个对角矩阵，这个对角矩阵的主对角线上的元素满足什么特征？

3.作业见学习通.