第六章 线性空间

线性空间是高代（2）的中心内容，它是几何空间的抽象和推广. 本章的内容包括集合・映射、线性空间的定义与简单性质、维数・基与坐标、基变换与坐标变换、线性子空间、子空间的交与和、子空间的直和、线性空间的同构.

6. 1 集合・映射

教学的时间：**年**月**日　　　　教学学时数:2 学时**

一、教学目标

1. 理解集合、集合之间的关系、集合的运算等相关概念；

2. 掌握映射、单射、满射、双射、逆映射的定义；

3. 掌握映射的乘积及其性质.

二、教学重点

1. 映射、单射、满射、双射、逆映射的定义；

2. 映射的乘积及其性质.

三、教学难点

映射的定义

四、教学过程

（一）集合

1. 集合、元素

集合是数学中最基本的概念之一，所谓集合就是指把具有某种属性的一些事物汇集到一起组成的一个整体就叫做集合，常用大写字母 A、B、C 等表示集合. 组成集合的每一个事物称为这个集合的元素，用小写字母 a、b、c 等表示集合的元素.

当a是集合M的元素，记为：$a\in M$，读作：a属于M.

当a不是集合M的元素，记为：$a\notin M$，读作：a不属于M.

2. 集合的表示方法

集合的表示方法一般有两种：描述法、列举法

列举法是列出集合的全部元素.描述法是指给出这个集合是具备有哪些性质的元素组成.

例 集合 M 是由 1,2,3 组成的集合，记为$M=\{1,2,3\}$.

例 适合方程 $x^2+y^2=4$ 的全部点的集合 M，记为 $M=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4\}$.

例 适合方程 $x^2-1=0$ 的全部点的集合 M，记为 $M=\{(x,y)\,|\,x^2-1=0\}=\{-1,1\}$.

不包含任何元素的集合称为**空集**，记作 ϕ.例一个无解的线性方程组的解集合就是空集.

3. 集合间的关系

若集合 M 的元素全是集合 N 的元素，即 $\forall a\in M$ 有 $a\in N$，则 M 就称为 N 的**子集合**，记为 $M\subset N$ 或 $N\supset M$.例如 $Z\subset R$.

若集合 M 与 N 含有完全相同的元素，即 $a\in M$ 当且仅当 $a\in N$，则它们就称为相等，记为 $M=N$.

两个集合 M 和 N 如果同时满足 $M\subset N$ 和 $N\subset M$，则 M 和 N **相等**.

4. 集合间的运算

交：设 M 和 N 是两个集合，既属于 M 又属于 N 的全体元素所成的集合称为 M 与 N 的**交**，记为 $M\cap N$.即 $M\cap N=\{x\,|\,x\in M, x\in N\}$.显然 $M\cap N\subset M$，$M\cap N\subset N$.

例 方程 $2x-1=1$ 的解集合与方程的 $x-2y=2$ 的解集合的交就是方程组 $\begin{cases}2x-1=1\\ x-2y=2\end{cases}$ 的解集合.

并：属于集合 M 或者属于集合 N 的全体元素所成的集合称为 M 与 N 的**并**，记为 $M\cup N$.即 $M\cup N=\{x\,|\,x\in M 或 x\in N\}$. 显然 $M\subset M\cup N$，$N\subset M\cup N$.

例 $\{1,2,3\}U\{2,3,4\}=\{1,2,3,4\}, \{1,2,3\}\cap\{2,3,4\}=\{2,3\}$.

（二）映射

1. 映射的定义

设 M 和 M' 是两个集合，所谓集合 M 到集合 M' 的一个映射就是指一个法则，**它使 M 中每一个元素 a 都有 M' 中确定的元素 a' 与之对应**. 若映射 σ 使元素 $a'\in M'$ 与元素 $a\in M$ 对应，则记：$\sigma(a)=a'$，a' 称为 a 在映射 σ 下的**像**，而 a 称为 a' 在映射 σ 下的一个**原像**.

2. 变换的概念 M 到 M 自身的映射，有时也称为 M 到自身的变换.

3. 映射的相等

M 到集合 M' 的两个映射 σ 及 τ，若 $\forall\alpha\in M$，$\sigma(\alpha)=\tau(\alpha)$，则称它们相等，记：$\sigma=\tau$.

例 判断下列 M 到 M′ 对应法则是否为映射

1）$M=\{a,\ b,\ c\}$，$M'=\{1,2,\ 3,4\}$ σ：$\sigma(a)=1$，$\sigma(b)=1$，$\sigma(c)=2$（是）

δ：$\delta(a)=1$，$\delta(b)=2$，$\delta(c)=3$，$\delta(c)=4$ （不是） τ：$\tau(b)=2$，$\tau(c)=4$（不是）

2）$M=Z$，$M'=Z^+$， σ：$\sigma(n)=|n|$，$\forall n\in Z$ （不是） τ：$\tau(n)=|n|+1$，$\forall n\in Z$ （是）

例 1 M 是全体整数的集合，M' 是全体偶数的集合，定义

$$\sigma(n)=2n, n\in M,$$

这是 M 到 M' 的一个映射.

例 2 M 是数域 P 上全体 n 级矩阵的集合，定义

$$\sigma_1(A)=|A|, A\in M.$$

这是 M 到 P 的一个映射.

例 3 M 是数域 P 上全体 n 级矩阵的集合，定义

$$\sigma_2(a)=aE, a\in P.$$

E 是 n 级单位矩阵，这是 P 到 M 的一个映射.

例 4 对于 $f(x)\in P[x]$,定义

$$\sigma(f(x))=f'(x)$$

这是 $P[x]$ 到自身的一个映射.

例 5 设 M，M' 是两个非空的集合，a_0 是 M' 中一个固定的元素，定义

$$\sigma(a)=a_0, a\in M.$$

这是 M 到 M' 的一个映射.

例 6 设 M 是一个集合，定义

$$\sigma(a)=a, a\in M.$$

即 σ 把 M 的每个元素都映到它自身，称为集合 M 的恒等映射或单位映射，记为 1_M.

例 7 任意一个定义在全体实数上的函数

$$y=f(x)$$

都是实数集合到自身的映射，因此**函数可以认为是映射的一个特殊情形**.

4. 关于 M 到 M' 的映射 σ 应注意：

1） M 与 M' 可以相同，也可以不同；

2）对于 M 中每个元素 a，需要有 M' 中有，而且只能有一个确定的元素 a' 与它对应；

3）一般，M' 中元素不一定都是 M 中元素的像；

4）M 中不相同元素的像可能相同；

5）两个集合之间可以建立多个映射.

5. 映射的乘积及其性质

对于映射可以定义乘法,设σ及τ分别是集合M到M'，M'到M''的映射，乘积$\tau\sigma$定义为

$$(\tau\sigma)(a)=\tau(\sigma(a))\ ,a\in M\ ,$$

即相继施行σ和τ的结果，$\tau\sigma$是M到M''的一个映射.

例 8 例 2 与例 3 中的映射的乘积分别求$\sigma_1\sigma_2$，$\sigma_2\sigma_1$？从例 8 可以得：**映射的乘积一般情况下,不满足交换律.**

例 9 对于集合M到M'的任何一个映射σ显然都有

$$1_{M'}\sigma=\sigma 1_M=\sigma .$$

映射的乘法适合结合律.设σ,τ,ψ分别是集合M到M'，M'到M''，M''到M'''的映射，映射乘法的结合律就是$(\psi\tau)\sigma=\psi(\tau\sigma)$.

证明：$\forall\alpha\in M$有$((\psi\tau)\sigma)(\alpha)=\psi(\tau(\sigma(\alpha)))$，$\psi((\tau\sigma)(\alpha))=\psi(\tau(\sigma(\alpha)))$，所以$(\psi\tau)\sigma=\psi(\tau\sigma)$.

6. 满射 单射 双射 逆映射

（1）满射 设σ是集合M到M'的一个映射，用$\sigma(M)$代表M在映射σ下像的全体，称为M在映射σ下的像集合.显然$\sigma(M)\subset M'$.如果$\sigma(M)=M'$,映射σ称为**映上的或满射**.

（2）单射 如果在映射σ下，M中不同元素的像也一定不同，即由$a_1\neq a_2$一定有$\sigma(a_1)\neq\sigma(a_2)$,那么映射$\sigma$就称为**$1-1$的或单射**.

（3）双射 一个映射如果既是单射又是满射就称**$1-1$对应或双射**.

对于有限个元素组成的集合来说双射的充要条件是他们所含的元素个数相等.但对于无限集来讲不一定如此.

（4）逆映射

对于M到M'的双射σ可以定义它的逆映射，记为σ^{-1}.因为σ为满射，所以M'中每个元素都有原像，又因为σ是单射，所以每个元素只有一个原像，定义

$$\sigma^{-1}(a')=a\ ,当\sigma(a)=a'.$$

显然，σ^{-1}是M'到M的一个双射，并且

$$\sigma^{-1}\sigma=1_M\ ,\sigma\sigma^{-1}=1_{M'}.$$

不难证明，如果σ,τ分别是M到M'，M'到M''的双射，那么乘积$\tau\sigma$就是M到M''的一个双射.

五、小结

1.集合的表示方法有哪些？集合的交与并运算如何求解？

2.本节中重点是映射，映射实际是种法则，这种法则使得集合之间产生了联系，使得某个集合中的元素有唯一的像与之对应.

3.想想什么是单射、满射、双射、逆映射.

六、作业（习题册）

七、教学反思

6.2 线性空间的定义与简单性质

教学的时间：**年**月**日** **教学学时数:2 学时**

一、教学目标

1. 正确理解和掌握线性空间的定义及性质；
2. 会判断一个代数系统是否是线性空间.

二、教学重点

线性空间的定义及性质

三、教学难点

线性空间的定义

四、教学过程

线性空间是线性代数最基本的概念之一. 这一节节我们来介绍它的定义，并讨论它的一些最简单的性质. 线性空间也是我们碰到的第一个抽象的概念, 为了说明它的来源，在引入定义之前，先看几个熟知的例子.

（一）问题引入

例 1 在解析几何中, 讨论过平面上和空间的向量. 向量的基本属性是可以按平行四边形规律相加，也可以作实数与向量的乘法. 不少几何和力学对象的性质是可以通过向量的这两种运算来描述的.

例 2 令集合 $V=\{X=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)|X\text{是齐次线性方程组}AX=0\text{的解}\}$. V 对于加法和数与解向量的乘法满足上述规律.

例 3 对于函数，也可以定义加法和函数与实数的数量乘法. 譬如说，考虑全体定义在区间[a, b]上的连续函数. 我们知道，连续函数的和是连续函数，连续函数与实数的数量乘积还是连续函数.

从这些例子中我们看到，所考虑的对象虽然完全不同，但是它们有一个共同点，那就是它们都有加法和数量乘法这两种运算. 当然，随着对象不同这两种运算的定义也是不同的. 为了抓住它们的共同点，把它们统一起来加以研究，我们引入线性空间的概念. 例 2 中用什么数和向量相乘，就要看具体情况. 例如，在有理数域中解线性方程组时，用有理数去作数量乘法就已经足够了，而在复数域中解线性方程组时，就需要用复数去作乘法运算. 可见，不同的对象与不同的数域相联系. 选定一个确定的数域作为基础是必须的.

（二）线性空间的定义

定义 1 令V是一个非空集合，P是一个数域. 在集合V的元素之间定义了一种代数运算，叫做**加法**；这就是说给出了一个法则，对于V中任意两个向量α与β, 在V中都有唯一的一个元素γ与它们对应, 称为α与β的和, 记为$\gamma=\alpha+\beta$. 在数域P与集合V的元素之间还定义了一种运算，叫做**数量乘法**；这就是说，对于数域P中任一个数k与V中任一个元素α, 在V中都有唯一的一个元素δ与它们对应, 称为k与α的数量乘积, 记为$\delta=k\alpha$. 如果加法与数量乘法满足下述规则，那么V称为数域P上的线性空间.

加法满足下面四条规则：

1） $\alpha+\beta=\beta+\alpha$； 2） $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

3）在V中有一个元素 0, $\forall\alpha\in V$, 都有$0+\alpha=\alpha$（具有这个性质的元素 0 称为V的零元素)；

4） $\forall\alpha\in V,\exists\beta\in V, st \quad \alpha+\beta=0$（$\beta$称为$\alpha$的负元素).

数量乘法满足下面两条规则：

5） $1\alpha=\alpha$； 6） $k(l\alpha)=(kl)\alpha$；

数量乘法与加法满足下面两条规则：

7） $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$； 8） $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta.$

在以上规则中，k,l等表示数域P中任意数；α,β,γ等表示集合V中任意元素.

以上的例 1--例 3 分别是数域 R，P，R 上的线性空间.

思考：1. 复数域 C 能否看作是实数域 R 上的线性空间？（Y）

2. 数域P按照本身的加法与乘法，能否构成 P 上的线性空间？（Y）

例 4 （1）数域P上一元多项式环$P[x]$, 按通常的多项式加法和数与多项式的乘法，能否构成一个数域P上的线性空间？（Y）

（2）如果只考虑其中次数小于n的多项式，再添上零多项式，用$P[x]_n$表示. $P[x]_n$能否构成数域P上的一个线性空间？（Y）

例 5 元素属于数域P的$m\times n$矩阵，按矩阵的加法和数与矩阵的数量乘法，用$P^{m\times n}$表示，能否构成数域P上的一个线性空间？（Y）

例 6 全体实函数，按函数加法和数与函数的数量乘法，能否构成一个实数域上的线性空间？（Y）

例 7 设V是正实数集，R为实数域. 规定

$\alpha \oplus \beta = \alpha\beta$（即$\alpha$与$\beta$的积），

$a \odot \alpha = \alpha^a$（即$\alpha$的$a$次幂），

其中$\alpha, \beta \in V, a \in R$. 则$V$对于加法$\oplus$和数乘$\odot$能否作成$R$上的线性空间？（Y）

（特别注意：这里的零元是正实数 1，α的负元素是正实数$\dfrac{1}{\alpha}$）

（三）线性空间的简单性质

线性空间的元素也称为**向量**. 当然这里的向量比几何中所谓向量的涵义要广泛得多. 线性空间有时也称为向量空间. 以下用黑体的小写希腊字母$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$代表线性空间$V$中的元素，用小写拉丁字母$a, b, c, \cdots$代表数域$P$中的数.

1. 零元素是唯一的.

2. 负元素是唯一的. 由负元素是唯一，从而记α的负元素为$-\alpha$. 由此定义线性空间中向量的减法.

3. $0\alpha = 0; k0 = 0; (-1)\alpha = -\alpha.$

证明 $0\alpha + \alpha = (0+1)\alpha = \alpha$ 等式的两边同时加上$-\alpha$得：$0\alpha + \alpha + (-\alpha) = \alpha + (-\alpha)$

$$\begin{aligned}&左边 = 0\alpha + \alpha + (-\alpha) = 0\alpha + [\alpha + (-\alpha)] = 0\alpha + 0 = 0\alpha\\ &右边 = \alpha + (-\alpha) = 0\end{aligned}$$，从而$0\alpha = 0$.

4. 如果$k\alpha = 0$，那么$k = 0$或者$\alpha = 0$.

五、小结

1.线性空间的定义中规定的运算有哪几种？满足那 8 条运算性质？

2.线性空间的性质有哪些？

六、作业（习题册）

七、教学反思

6.3 维数・基与坐标

教学的时间：**年　月　日　　　　　　　　　教学学时数:2 学时**

一、教学目标

1. 理解线性组合、线性表示、线性相关、线性无关等概念；

2. 掌线性空间的维数、基与坐标等概念.

二、教学重点

线性空间的维数、基与坐标等概念

三、教学难点

线性空间的维数、基与坐标等概念

四、教学过程

问题引入：已知在向量空间 R_n 中，线性无关的向量组最多由 n 个向量组成，而任意 n+1 个向量都是线性相关的.

问题 1：在线性空间中是否也可以定义线性无关的概念?

问题 2：线性空间的一个重要特征——在线性空间 V 中，最多能有多少线性无关的向量?

（一）向量的线性相关与线性无关

定义 2 设 V 是数域 P 上的一个线性空间，$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r\ (r\geq 1)$ 是 V 一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 是数域 P 中的数，那么向量

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2.\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$$

称为**向量组 $\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的一个线性组合**，有时也说**向量 α 可以用向量组 $\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出**.

定义 3 设

$$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r; \qquad (1)$$

$$\beta_1,\beta_2,\cdots.\beta_s \qquad (2)$$

是 V 中两个向量组，如果（1）中每个向量都可以用向量组（2）线性表出，那么称向量（1）可以用向量组（2）线性表出. 如果（1）与（2）可以互相线性表出，那么向量组（1）与（2）称为等价的.

定义 4 线性空间V中向量$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r\ (r\geq 1)$称为**线性相关**，如果在数域$P$中有$r$个不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_r$，使

$$k_1\alpha_1+k_2.\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0. \qquad (3)$$

如果向量$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r$不线性相关，就称为**线性无关.** 换句话说，向量组$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r$称为**线性无关**，如果等式（3）只有在$k_1=k_2=\cdots k_r=0$时才成立.

数域 P 中线性空间 V 中向量的线性相关性几个常用的结论：

1. 单个向量α线性相关的**充要条件**是$\alpha=0$. 两个以上的向量$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关的**充要条件**是其中有一个向量是其余向量的线性组合.

2. 如果向量组$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，而且可以被$\beta_1,\beta_2,\cdots.\beta_s$线性表出，那么$r\leq s$. 由此推出，**两个等价的线性无关的向量组，必含有相同个数的向量**.

3. 如果向量组$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，但$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$线性相关，那么$\beta$可以由被$\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出，而且表示法是唯一的.

在一个线性空间中究竟最多能有几个线性无关的向量，显然是线性空间的一个重要属性.

（二）线性空间的基与维数

1. 线性空间的维数

定义 5 若在线性空间V中有n个线性无关的向量，但没有更多数目的线性无关的向量，则V就称为n**维的**；若在V中可以找到任意多个线性无关的向量，则V就称为**无限维的**.

例 （1）平面上的向量作成实数域上的线性空间，它是 2 维的.

（2）$P[x]_n$是数域 P 上的 n 维线性空间.

（3）线性空间$P[x]$是无限维的，这是因为$P[x]$存在$1,x^2,x^3,x^4,\cdots,x^n,\cdots$线性无关.

2. 线性空间的基与坐标

定义 6 在n维线性空间V中，n个线性无关的向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$称为$V$**的一组基**. 若$\alpha$是$V$中任一向量，于是$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\alpha$是线性相关的，因此$\alpha$可以被基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性表出：

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n.$$

其中系数$a_1,a_2,\cdots,a_n$是被向量α和基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$唯一确定的，这组数就称为$\alpha$ **在基**

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ **下的坐标，记为** $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.（由此可知，在给出空间 V 的一组基之前必须先确定其的维数.）

如果这两个问题常常是同时解决，那就更好，下面就想办法同时解决这两个问题.

3. 维数与基的关系

定理 1 如果在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量 $\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，且 V 中任一向量都可以用它们线性表出，**那么** V 是 n 维的，而 $\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 就是 V 的一组基.

证明 因为向量 $\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间 V 中有 n 个线性无关，那么线性空间 V 的维数至少是 n. 下面只需证 V 中任意的 $n+1$ 个向量必定是线性相关的. 设

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$$

是 V 中任意 $n+1$ 个向量. 因为 V 中任一向量都可以用 $\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出, 所以向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$ 可由向量组 $\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.因此向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$ 线性相关.若不然 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$ 线性无关就有 $n+1\le n$，这与事实矛盾.因此一定有向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_{n+1}$ 线性相关，从而线性空间 V 中最多只能有 n 个线性无关的向量. 也就是说 V 是 n 维的, 而 $\alpha_1,.\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 就是 V 的一组基.

例 1 在线性空间 $P[x]_n$ 中，

$$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$$

是 n 个线性无关的向量，而且每一个次数小于 n 的数域 P 上的多项式和零多项式都可以被它们线性表出，所以 $P[x]_n$ 是 n 维的，而 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 就是它的一组基.

多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 关于基 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 的坐标是？

例 2 $V=R^3$ 中 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 线性无关，而且 V 中的任意一个向量 α 都可以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性表示. **由定理 1 知**：V 是 3 维的线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是它的一个基.

对于 V 中的任意一个向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标就是 (a_1,a_2,a_3).

设 $\varepsilon_1'=(1,0,0),\varepsilon_2'=(0,1,1),\varepsilon_3'=(1,1,1)$，则这组向量组是不是 V 的一组基？

对于 V 中的任意一个向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ 关于基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$ 下的坐标？

同一个向量在不同基下的坐标，不相同。你有什么想法？

例 3 如果把复数域 C 看作是自身上的线性空间，那么它是一维的，数 1 就是它的一组基.若把复数域 C 看作是实数域上的线性空间，那么就是 2 维的，数 1，i 就是它的一组基.**这个例子指出：维数是和所考虑的数域有关的.**

五、小结

1. 请叙述线性空间的基与维数的概念.

2. 线性空间的元素在给定基下的坐标:

(1) 把抽象的向量与具体的数组向量联系起来;

(2) 把抽象的线性运算与数组向量的线性运算联系起来.

六、作业（习题册）

七、教学反思

6.4 基变换与坐标变换

教学的时间：**年**月**日** **教学学时数:2 学时**

一、教学目标

掌握基变换与坐标变换的关系

二、教学重点

基变换与坐标变换的公式

三、教学难点

坐标变换的公式的推导

四、教学过程

(一)基变换

在n维线性空间中，任意n个线性无关的向量都可以取作空间的基. 对于不同的基，同一个向量的坐标一般是不同的. 随着基的改变，向量的坐标是怎样变化？先研究一下两组基之间的关系，然后再研究同一个向量在不同基下的坐标.

1. 基变换

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$与$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$是$n$维线性空间$V$中两组基，它们的关系是

$$\begin{cases}\varepsilon_1'=a_{11}\varepsilon_1+a_{21}\varepsilon_2+\cdots+a_{n1}\varepsilon_n\ ,\\ \varepsilon_2'=a_{12}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{n2}\varepsilon_n\ ,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varepsilon_n'=a_{1n}\varepsilon_1+a_{2n}\varepsilon_2+\cdots+a_{nn}\varepsilon_n\ .\end{cases}\tag{1}$$

称为(1)为**基变换公式**

2. 基变换的矩阵表示式

设向量ξ在这两组基下的坐标分别是$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$(x_1',x_2',\cdots,x_n')$，即

$$\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n=x_1'\varepsilon_1'+x_2'\varepsilon_2'+\cdots+x_n'\varepsilon_n'.\tag{2}$$

为了写起来方便，引入一种形式的写法. 把向量$\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$.

写成

$$\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\tag{3}$$

由(2)有 $\xi=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$.

(1)可以写成 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$. (4)

矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$ 称为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 的**过渡矩阵**.

思考：1. 过渡矩阵 A 是否可逆？为什么？　　2. ε_i' 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的坐标是?

3. 满足的运算规律

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 中两个向量组，$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ 是两个 $n\times n$ 矩阵，那么

$$((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A)B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(AB)\text{；}$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(A+B)\text{；}$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)A=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)A.$$

(二)坐标变换公式

设向量 ξ 在这两组基下的坐标分别是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$，即

$$\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n=x_1'\varepsilon_1'+x_2'\varepsilon_2'+\cdots+x_n'\varepsilon_n'. \quad (2)$$

现在的问题找出 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$ 的关系？

先研究一下一个线性空间不同的基之间的关系.

用(4)代入，得

$$\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}.$$

与(3)比较，由基向量的线性无关性，得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \tag{5}$$

或者

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

(5)与(6)给出了在基变换(4)下，**向量的坐标变换公式**.

上节课例题 $V=R^3$ 中 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 是它的一个基.

$\varepsilon_1'=(1,0,0),\varepsilon_2'=(0,1,1),\varepsilon_3'=(1,1,1)$，也是 V 的一组基.

(1) 求由第一组基到第二组基的过渡矩阵？

(2) 对于 V 中的任意一个向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标就是 (a_1,a_2,a_3)，该向量关于基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$ 下的坐标？

例 1 在 P^4 中，由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵，并求向量 ξ 在基下的坐标.

其中 $\varepsilon_1=(1,2,2,-1)$，$\varepsilon_2=(1,1,-3,3)$，$\varepsilon_3=(1,1,-1,2)$, $\varepsilon_4=(3,2,0,-1)$,

$\eta_1=(1,1,-2,0)$，$\eta_2=(2,1,3,-1)$，$\eta_3=(-2,2,1,-1)$，$\eta_4=(1,3,1,2)$， $\xi=(3,-1,2,4)$.

参考答案： $C=A^{-1}B=\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 39 & 20 \\ 22 & -32 & 40 & 4 \\ -28 & 42 & -56 & 14 \\ 5 & 8 & -17 & -8 \end{pmatrix}$. $\left(-\dfrac{109}{85},-\dfrac{4}{85},-\dfrac{8}{5},\dfrac{20}{17}\right)$.

例 2 在 P^3 中，求向量 $\alpha=(3,7,1)$ 在基 $\alpha_1=(1,3,5)$，$\alpha_2=(6,3,2)$，$\alpha_3=(3,1,0)$ 下的坐标.

参考答案： $\alpha=(33,-82,154)^{\mathrm T}$

例 3 在 $P[x]_4$ 中取两个基 $\alpha_1=x^3+2x^2-x,\ \alpha_2=x^3-x^2+x+1,\ \alpha_3=-x^3+2x^2+x+1,\ \alpha_4=-x^3-x^2+1;$ 及 $\beta_1=2x^3+x^2+1,\ \beta_2=x^2+2x+2,\ \beta_3=-2x^3+x^2+x+2,\ \beta_4=x^3+3x^2+x+2.$ 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵和坐标变换公式.

参考答案： $A^{-1}B=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

五、小结

1.设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 是 n 维线性空间 V 中两组基，若有 $(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$，则由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 的过渡矩阵就是矩阵 A.

2.由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 的过渡矩阵为 A，向量 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，向量 α 在基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 下的坐标为 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$，这两组基下的坐标的关系？

六、作业（习题册）

七、教学反思

6.5 线性子空间

教学的时间：**年**月**日 教学学时数:2 学时**

一、教学目标

1.理解线性子空间的定义及判别定理;

2.掌握向量组生成子空间的定义及等价条件.

二、教学重点

1.线性子空间的判别;

2.向量组生成子空间的定义及等价条件.

三、教学难点

线性子空间的判别

四、教学过程

(一)线性子空间的概念及其判别条件

1.线性子空间的概念

定义 7 数域P上的线性空间V的一个非空子集合W，如果W对于V的两种运算也构成数域P上的线性空间，称为W是V的一个线性子空间（或简称子空间）.

2.非空子集构成子空间的条件

一个非空子集合要满足什么条件才能成为子空间?

设 W 是 V 的子集合.因为 V 是线性空间,所以对于原有的运算，W 中的向量满足线性空间定义中的的八条运算规则 1),2),5),6),7),8)是显然成立的.为了使 W 自身构成一线性空间，主要的条件是要求 W 对于 V 中原来运算的封闭性，以及规则 3)与 4)成立.也就是

1. **W 对加法运算封闭，**即若$\forall\alpha\in V,\forall\beta\in V$ 有$\alpha+\beta\in V$.

2. **W 对数量乘法运算封闭**即若$\forall k\in P,\forall\alpha\in V$ 有$k\alpha\in V$.

3. $0\in W$.

4. $\forall\alpha\in V,-\alpha\in V$.**事实上，只要第一二条成立，第三四条一定会成立.**

定理 2 若线性空间V的一个非空集合W对于V两种运算是封闭的，也就是满足 1）$\forall\alpha,\beta\in W$有$\alpha+\beta\in W$，2）$\forall k\in P,\alpha\in W$有$k\alpha\in W$，则$W$就是一个子空间.

数域P上线性空间V的一个非空子集W是V的一个子空间的**充要条件**

$\forall a,b\in F,\alpha,\beta\in W$, 有 $a\alpha+b\beta\in W$.

既然线性子空间本身也是一个线性空间，上面引入的概念，如维数、基、坐标等，当然也可以应用到线性子空间上. 因为要线性子空间中不可能比在整个子空间中有更多数目线性无关的向量. 所以，**任何一个线性子空间的维数不能超过整个空间的维数**.

3. 子空间的例子

例 1 在线性空间中，由单个的零向量所组成的子集合是一个线性子空间，它叫做**零子空间**.

例 2 线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间.

在线性空间中，零子空间和线性空间本身这两个子空间有时叫做 V **的平凡子空间**，而其它的线性子空间叫做非平凡子空间.

例 3 在全体实函数组成的空间中，所有的实系数多项式组成一个子空间.

例 4 $P[x]_n$ 是线性空间 $P[x]$ 的子空间.

例 5 在线性空间 P^n 中，齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

的全部解向量组成一个子空间，这个子空间叫做**齐次线性方程组的解空间**. 解空间的基就是方程组的基础解系，它的维数等于 $n-r$ ，其中 r 为系数矩阵的秩.

例 6 下列非空子集是不是 R^3 的子空间？

$$W_1=\left\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3 \mid \frac{x}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-1}{-3}\right\};\ W_2=\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3 \mid x-y=0 \text{ 且 } x+y+z=0\}.$$

参考答案：第一个不是子空间，第二个是子空间.

例 7 证明 $W=\left\{(0,x_2,x_3,\cdots,x_n)\in \mathrm{R}^n \mid x_2,x_3,\cdots,x_n\in R\right\}$ 是 R^n 的子空间，并求它的一组基，确定它的维.

（二）生成子空间及其性质

1. 生成子空间的定义

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是线性空间 V 中一组向量，这组向量所有可能的线性组合

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$$

所成的集合是非空的，而且对两种运算封闭，因而是V的一个子空间，这个子空间叫做**由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$生成的子空间**，记为$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$.

由子空间的定义可知，如果V的一个子空间 W 包含向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，那么就一定包含它们所有的线性组合，也就是说，一定包含$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$作为 W 的子空间.

在有限维线性空间中，任何一个子空间都可以这样得到. 事实上，设W是V的一个子空间，W当然也是有限维的. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$W$的一组基，就有

$$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r).$$

2. 生成子空间的性质

定理 3 1)两个向量组生成相同子空间的**充要条件**是这两个向量组等价.

2）$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$的维数等于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的秩.（**证明略**）

定理 4 设W是数域P上n维线性空间V的一个m维子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$W$的一组基，那么这组向量必可扩充为整个空间的基. 也就是说，在V中必定可以找到$n-m$个向量$\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$使得$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的一组基.（**证明略**）

五、小结

1. 线性子空间是线性空间吗？如何判断一个线性空间 V 的一个非空子集是不是 V 的子空间？

2. 你能叙述一下由某个向量组生成子空间的定义吗？

3. 生成相同的子空间的充要条件？

4. 生成子空间的维数如何计算？

5. 生成子空间的任意一组基能否扩充成为线性空间 V 的基？为什么？

六、作业（习题册）

七、教学反思

6.6 子空间的交与和

教学的时间：**年**月**日** **教学学时数:2 学时**

一、教学目标

1.掌握子空间的交与和的定义及性质；

2.熟练掌握维数公式及其推论.

二、教学重点

子空间的交与和的定义及性质、维数公式及其推论.

三、教学难点

维数公式及其推论的证明

四、教学过程

问题引入： 若W_1,W_2是线性空间V的两个子空间，则W_1,W_2是集合，集合之间的运算还记得有哪些？它们经过集合之间的运算之后能否作成V的子空间？

1. 子空间的交

定理 5 如果V_1, V_2是线性空间V的两个子空间,那么它们的交$V_1\cap V_2$也是V的子空间.

证明 因为$0\in V_1,0\in V_2$，所以$0\in V_1\cap V_2$，从而$V_1\cap V_2$是V的非空子集.

$$\forall\alpha,\beta\in V_1\cap V_2,\text{则}\begin{matrix}\alpha\in V_1,\ \ \alpha\in V_2;\\ \beta\in V_1,\ \ \beta\in V_2.\end{matrix}\text{从而}\alpha+\beta\in V_1,\ \ \alpha+\beta\in V_2.\text{也就是}\alpha+\beta\in V_1\cap V_2.$$

$$\forall k\in P,\forall\alpha\in V_1\cap V_2,\text{则}\alpha\in V_1,\ \ \alpha\in V_2.\text{从而}k\alpha\in V_1,\ \ k\alpha\in V_2,\text{则}k\alpha\in V_1\cap V_2.$$

因此，若V_1, V_2是线性空间V的两个子空间，那么它们的交$V_1\cap V_2$也是V的子空间.

子空间的交适合下列运算规律：

$$V_1\cap V_2=V_2\cap V_1\text{（交换律）},\qquad (V_1\cap V_2)\cap V_3=V_1\cap(V_2\cap V_3)\text{（结合律）}.$$

可定义多个子空间的交：$V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_s=\bigcap\limits_{i=1}^{s}V_i$，也是子空间.

2. 子空间的和

定义 8 设V_1, V_2是线性空间V的子空间，所谓V_1与V_2的和，是指由所有能表示成$\alpha_1+\alpha_2$，而$\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$的向量组成的子集合，记作$V_1+V_2$.

定理 6 如果V_1, V_2是线性空间V的子空间，那么它们的和V_1+V_2也是V的子空间.

（证明过程仿照定理 5，由同学们下去自己证明）

子空间的和适合下列运算规律：

$V_1+V_2=V_2+V_1$（交换律）， $(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$（结合律）.

可以定义多个子空间的和$V_1+V_2+\cdots+V_s=\sum_{i=1}^{s}V_i$.

它是由所有表示成

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\ \alpha_i\in V_i(i=1,2,\cdots,s)$$

的向量组成的子空间.

3. 子空间的交与和的其性质

性质 1 设V_1,V_2,W都是子空间，那么由$W\subset V_1$与$W\subset V_2$可推出$W\subset V_1\cap V_2$；而由$W\supset V_1$与$W\supset V_2$可推出$W\supset V_1+V_2$.

性质 2. 对于子空间V_1与V_2，以下三个论断是等价的：

1）$V_1\subset V_2$； 2）$V_1\cap V_2=V_1$； 3）$V_1+V_2=V_2$.

4. 例

例 1 在三维几何中用V_1表示一条通过原点的直线，V_2表示一张通过原点而且与V_1垂直的平面，那么，V_1与V_2的交是$\{0\}$，而V_1与V_2的和是整个空间.

例 2 在线性空间P^n中，用V_1与V_2分别表示齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0, \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=0, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1+b_{t2}x_2+\cdots+b_{tn}x_n=0 \end{cases}$$

的解空间，那么$V_1\cap V_2$正好是齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解空间.

例 3 在一个线性空间V中，有

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t).$$

5. 子空间的交与和的维数

关于两个子空间的交与和的维数，有以下定理.

定理 7（维数公式） 如果V_1，V_2是线性空间V的两个子空间，那么

维(V_1)+维(V_2)=维(V_1+V_2)+维$(V_1\cap V_2)$.

从维数公式可以看到，和的维数往往要比维数的和来得小.

（证明过程参考教材第 260—261 页，由同学们下去自己证明）

推论 如果n维线性空间V中两个子空间V_1，V_2的维数之和大于n，那么V_1，V_2必含有非零的公共向量.

证明 维(V_1+V_2)+维$(V_1\cap V_2)$=维(V_1)+维(V_2)大于n，由于维(V_1+V_2)是 v 的一个子空间，从而其维数小于等于于 n. 从而维$(V_1\cap V_2)$大于 0，这就是说$V_1\cap V_2$中含有非零向量.

五、小结

1. 子空间的交与和都是 v 的子空间，思考子空间的并是不是 V 的子空间？
2. 子空间的交与和的其性质有哪些？
3. 子空间的交与和的维数有什么关系？

六、作业

1. 设V_1,V_2是线性空间 V 的两个子空间，什么情况下V_1的维数与V_2的维数和与V_1+V_2的维数相等？此时V_1+V_2中的向量的表示是否唯一？

2. 设β,γ_1,γ_2是线性空间 V 的向量，且$V_1=L(\beta,\gamma_1),V_2=L(\beta,\gamma_2)$，则$V_1,V_2$是线性空间

V 的两个子空间. 向量$\alpha = 3\beta + \gamma_1 + \gamma_2$是不是$V_1 + V_2$中的向量？为什么？（写在课本 262 页空白处）

七、教学反思

6.7 子空间的直和

教学的时间：**年　月 日**　　　　**教学学时数:2 学时**

一、教学目标

1. 理解子空间的直和的概念；

2. 理解子空间的和为直和的充要条件；

3. 了解余子空间以及多个子空间的之和及其性质.

二、教学重点

1.子空间的直和的概念；

2.子空间的和为直和的充要条件.

三、教学难点

子空间的和为直和的充要条件

四、教学过程

上一次课留下的作业：1. 设V_1,V_2是线性空间 V 的两个子空间，什么情况下V_1的维数与V_2的维数和与V_1+V_2的维数相等？ 此时V_1+V_2中的向量的表示是否唯一？

2.设β,γ_1,γ_2是线性空间 V 的向量，且$V_1=L(\beta,\gamma_1),V_2=L(\beta,\gamma_2)$，则$V_1,V_2$是线性空间 V 的两个子空间.向量$\alpha=3\beta+\gamma_1+\gamma_2$是不是$V_1+V_2$中的向量？为什么？你们的答案是什么？

1.直和的定义

定义 9 设V_1,V_2是线性空间V的子空间，如果和V_1+V_2中每个向量α的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$$

是唯一的，这个和就称为直和，记为$V_1\oplus V_2$.

2.直和的判断方法

定理 8 和V_1+V_2是直和的充要条件是等式

$$\alpha_1+\alpha_2=0,\ \alpha_i\in V_i\ \ (i=1,\ 2)$$

只有在α_i全为零时才成立.

证明　（定理的条件实际上就是：零向量的分解是唯一的）

（必要性）　因为V_1+V_2是直和，所以零向量只能分解为零向量与零向量的和.

（充分性）　设$\forall\alpha\in V_1+V_2$，它有两个分解式$\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$，$\alpha_1,\beta_1\in V_1$; $\alpha_2,\beta_2\in V_2$.

于是$(\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)=0$.又已知等式$\alpha_1+\alpha_2=0$，$\alpha_i\in V_i$ $(i=1,\,2)$只有在α_i全为零时才成立.

所以$\alpha_1-\beta_1=0$，$\alpha_2-\beta_2=0$.即$\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2$.也就是V_1+V_2中任意的向量α的分解是唯一才，从而V_1+V_2是直和.

推论 和V_1+V_2是直和$\Leftrightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$.

证明　**（必要性）**$\forall\alpha\in V_1\cap V_2$，于是零向量可以表示为：$0=\alpha+(-\alpha),\alpha\in V_1,-\alpha\in V_2$. 因为$V_1+V_2$是直和，所以$\alpha=-\alpha=0$.也就是$V_1\cap V_2=\{0\}$.

（充分性）　**(要证明**和V_1+V_2是直和，由定理 8 知只需要证明零向量的分解唯一即可.)

设$0=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$.于是$\alpha_1=-\alpha_2\in V_2$, $\alpha_1\in V_1$即$\alpha_1\in V_1\cap V_2$,而已知$V_1\cap V_2=\{0\}$.所以$\alpha_1=0$,从而$\alpha_2=0$,也就是零向量只能分解为零向量与零向量的和，所以V_1+V_2是直和.

定理 9 设V_1,V_2是线性空间V的子空间，令$W=V_1+V_2$，则

$$W=V_1\oplus V_2\Leftrightarrow \text{维}(W)=\text{维}(V_1)+\text{维}(V_2).$$

3. 余子空间以及多个子空间的之和

定理 10 设U是线性空间V的一个子空间，那么一定存在一个子空间W使$V=U\oplus W$.

证明　取U的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$.把它扩充为 V 的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$.

令$W=L(\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n)$.显然$\dim U+\dim W=\dim(U+W)$且$U+W=V$，由定理 9 知：$U$是线性空间$V$的一个子空间，那么一定存在一个子空间$W$使$V=U\oplus W$.

子空间的直和的概念可以推广到多个子空间的情形.

定义 10 设$V_1,V_2,\cdots,V_s$都是线性空间V的子空间，如果和$V_1+V_2+\cdots+V_s$中每个向量α的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\alpha_i\in V_i(i=1,2,\cdots,s)$$

是唯一的，这个和就称为直和，记为$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$.

定理 11 $V_1, V_2, \cdots, V_s$是线性空间V的一些子空间，下面这些条件是等价的：

1）$W = \sum V_i$ 是直和；

2）零向量的表法唯一；

3）$V_i \cap \sum\limits_{j \neq i} V_j = \{0\} \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$;

4）维(W)=$\sum$维(V_i).

五、小结

1.请同学们叙述子空间的之和；

2. 判断子空间的和式为直和的方法有哪几种？

3.想想余子空间的作用是什么？

4. 判断多个子空间的和是直和的方法有哪几种？

六、作业（习题册）

七、教学反思

6.8 线性空间的同构

教学的时间：**年　月　日　　　　　　　　教学学时数:2 学时**

一、教学目标

1.理解线性空间同构的概念；

2.掌握线性空间同构的性质以及有限维线性空间同构的判别方法；

3.了解线性空间同构的思想方法.

二、教学重点

线性空间同构的概念以及有限维线性空间同构的判别方法

三、教学难点

线性空间同构的概念和判别的方法

四、教学过程

研究线性空间，主要是研究它的代数结构.前面所讲的内容是从线性空间的向量之间的关系的角度来讨论的.本节以分类的思想，利用映射的方法从两个线性空间之间的联系来研究它们的代数结构.因此本节内容对未知的有限维线性空间的研究转化为对已知的有限维线性空间来研究、对有限维线性空间起到分类的作用.

1. 引入

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是线性空间$V$的一组基，在这组基下，$V$中每个向量都有确定的坐标，而向量的坐标可以看成$P^n$元素，因此向量与它的坐标之间的对应实质上就是$V$到$P^n$的一个映射. 显然这个映射是单射与满射，换句话说，坐标给出了线性空间V与P^n的一个双射. 这个对应的重要性表现在它与运算的关系上. 设

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n,$$

$$\beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n$$

而向量$\alpha,\beta,$的坐标分别是$(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，那么

$$\alpha+\beta = (a_1+b_1)\varepsilon_1 + (a_2+b_2)\varepsilon_2 + \cdots + (a_n+b_n)\varepsilon_n;$$

$$k\alpha = ka_1\varepsilon_1 + ka_2\varepsilon_2 + \cdots + ka_n\varepsilon_n.$$

于是向量$\alpha+\beta,\ k\alpha$的坐标分别是

$$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

$$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)=k(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

以上的式子说明在向量用坐标表示之后，它们的运算就可以归结为它们坐标的运算.因而线性空间V的讨论也就可以归结为P^n的讨论.

2. 线性空间同构的定义

定义 11 数域P上两个线性空间V与V'称为同构的，若由V到V'有一个双射σ，满足：

1）$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$； 2）$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$.

其中α,β是V中任意向量，k是P中任意数.这样的映射σ称为同构映射.

前面的讨论说明在n维线性空间V中取定一组基后，向量与它的坐标之间的对应就是V到P^n的一个同构映射.因而，数域P上任一个n维线性空间都与P^n同构.

3.同构映射σ具有的性质

设σ是线性空间V到V'的同构映射：

性质 1 $\sigma(0)=0,\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$.

性质 2 $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)$.

性质 3 V中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关$\Leftrightarrow$它们的象$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$线性相关.

证明 因为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关即$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$得

$\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=\sigma(0)$即$k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)=0$.

因此，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关可得$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$线性相关.

若$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$线性相关即$k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)=0$，于是有$\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=0$，又因为$\sigma$是双射，$\sigma(0)=0$，所以$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$.

因此，向量组$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$线性相关可得$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关.

因为维数就是线性空间中线性无关的向量组中的向量的最多个数，所以由同构映射的性质可以推知，**同构的线性空间有相同的维数.**

性质 4 如果V_1是V的一个线性子空间，那么，V_1在σ下的像集合

$$\sigma(V_1)=\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V_1\}$$

是$\sigma(V)$的子空间，并且V_1与$\sigma(V_1)$维数相同.

证明　设σ是线性空间V到V'的同构映射，由于V_1是V的一个线性子空间，所以$\sigma(V_1)\subset\sigma(V)$，又因为$\sigma(0)=0\in\sigma(V_1)$，所以$\sigma(V_1)\neq\varnothing$. 容易证明$\sigma(V_1)$是$\sigma(V)$的子空间. 要证明$V_1$与$\sigma(V_1)$维数相同，若设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$V_1$的一组基，那么只需要证$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$是$\sigma(V_1)$的一组基即可.

性质 5　同构映射的逆映射以及两个同构映射的乘积还是同构映射.

证明　设$\sigma:V\to V'$都是同构映射，所以$\sigma:V\to V'$是双射，从而存在逆映射$\sigma^{-1}:V'\to V$也是双射.而且还满足：

$\forall\alpha',\beta'\in V'$，则$\exists\alpha,\beta\in V$使得$\sigma(\alpha)=\alpha'$，$\sigma(\beta)=\beta'$，也就是$\sigma^{-1}(\alpha')=\alpha$，$\sigma^{-1}(\beta')=\beta$.

所以$\sigma^{-1}(\alpha'+\beta')=\sigma^{-1}(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta))=\sigma^{-1}(\sigma(\alpha+\beta))=\sigma^{-1}\sigma(\alpha+\beta)=\alpha+\beta=\sigma^{-1}(\alpha')+\sigma^{-1}(\beta')$

即$\sigma^{-1}(\alpha'+\beta')=\sigma^{-1}(\alpha')+\sigma^{-1}(\beta')$.

$\forall\alpha'\in V'$，$\forall k\in P$，则$\exists\alpha\in V$使得$\sigma(\alpha)=\alpha'$，也就是$\sigma^{-1}(\alpha')=\alpha$.

所以$\sigma^{-1}(k\alpha')=\sigma^{-1}(k\sigma(\alpha))=\sigma^{-1}(\sigma(k\alpha))=\sigma^{-1}\sigma(k\alpha))=k\alpha=k\sigma^{-1}(\alpha')$，即$\sigma^{-1}(k\alpha')=k\sigma^{-1}(\alpha')$.

因此，同构映射的逆映射还是同构映射.

设$\sigma:V\to V'$，$\tau:V'\to V''$都是同构映射，则$\tau\sigma:V\to V''$是双射，且

$\forall\alpha,\beta\in V$，$\tau\sigma(\alpha+\beta)=\tau(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta))=\tau\sigma(\alpha)+\tau\sigma(\beta)$；

$\forall k\in P,\forall\alpha\in V$，有$\tau\sigma(k\alpha)=\tau(\sigma(k\alpha))=\tau(k\sigma(\alpha))=k\tau(\sigma(\alpha))$.

因此，$\tau\sigma$是V到U的同构映射，同构映射的乘积还是同构映射.

同构具有反身性、对称性与传递性，因此同构作为线性空间之间的一种关系.

既然数域P上任意一个n维线性空间都与P^n同构，由同构的对称性与传递性即得，数域P上任意两个 n 维线性空间都同构.

4.两个有限维线性空间同构的条件

定理 12　数域P上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们有相同的维数.

由线性空间的抽象讨论中，并没有考虑线性空间的元素是什么，也没有考虑其中运算是怎样定义的，而只涉及线性空间在所定义的运算下的代数性质. 从这个观点看来，同构

的线性空间是可以不加区别的. 因之，定理 12 说明了，维数是有限维线性空间的唯一的本质特征.

特别指出：数域 P 上任意的一个 n 维线性空间与 n 元数组所的线性空间 P^n 同构，而同构的线性空间具有相同的性质. 由此可知，以前所得到的关于 n 元数组的一些结论在一般的线性空间中也是成立的，不用一一证明了.

5.例

例 1 $P[x]_3$ 与 P^3 同构对于任意的多项式 $f(x)$有:$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ $\sigma(f(x))=(a_0,a_1,a_2)$，显然，$\sigma$是同构映射.$\sigma$ 把 $P[x]_3$ 的基 $1,x,x^2$ 映射成 P^3 哪些向量?

例 2 设 V 是全体复数在实数域 R 上构成的线性空间，问：1）V 的维数.

2）找一个线性空间使它与 V 同构,并指出其同构映射

3）所找到的同构映射把 v 的基映射成哪些向量?

例 3 数域 P 上的空间 $P^{2\times2}$ 与 P^4 同构. 其同构映射为$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=(a,b,c,d)$.设 P^4 的一组基为 $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$，则可得 $P^{2\times2}$ 的一组基为$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

思考：线性空间同构的作用是什么？

五、小结

1.请学生叙述线性空间同构的定义，同构映射与一般映射的区别与联系.

2.同构映射具有哪些性质？

3.两个有限维线性空间同构的充要条件.

六、作业（习题册 97、113、150、）

七、教学反思