排 列

文山学院 数学与工程学院
黄卫华（副教授）

主要内容

- 一、定义
- 二、性质

一、定义

定义1由1, 2, … , n 组成的一个有序数组称为一个 n **级排列.**

例如，2431是一个 4 级排列，45231是一个 5 级排列.

问：一个n 级排列的总个数是多少个？

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

$$1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n = n!.$$ 读为 n 阶乘.

例如：$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24, 5! = 120$.

$n!$ 随着 n 的增大迅速地增大. 例如, $10! = 3628800$.

问：$12\ldots n$ 这个 n 级排列，具有什么特征？

定义2 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数.

排列 $j_1 j_2 \ldots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)$.

定义3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，
逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例1 求排列32541的逆序数?并判断是奇排列、偶排列。

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列．这样一个变换称为一个**对换**.

例如，经过1, 2对换，排列2431就变成了1432，

排列2134就变成了1234.

二、性质

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

证明 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1 \ldots a_l a b b_1 \ldots b_m$, 对换 a 与 b , 则排列变为$a_1 \ldots a_l b a b_1 \ldots b_m$. 显然, 排列 $a_1 \ldots a_l$ 和 $b_1 \ldots b_m$ 经对换后的逆序数并不改变, 而 a , b 这两个元素的逆序数改变为: 当$a<b$时, 经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变; 当$a>b$时, 经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆数减少 1. 所以排列$a_1 \ldots a_l a b b_1 \ldots b_m$ 与排列 $a_1 \ldots a_l b a b_1 \ldots b_m$的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1 \ldots a_l a b_1 \ldots b_m b c_1 \ldots c_n$，把它作 m 次相邻对换, 调成 $a_1 \ldots a_l a b b_1 \ldots b_m c_1 \ldots c_n$，再作 m+1 次相邻对换, 调成$a_1 \ldots a_l b b_1 \ldots b_m a c_1 \ldots c_n$. 之, 经 2$m$+1 次相邻对换, 排列

$$a_1 \ldots a_l a b_1 \ldots b_m b c_1 \ldots c_n$$

调换成排列

$$a_1 \ldots a_l b b_1 \ldots b_m a c_1 \ldots c_n,$$

所以这两个排列的奇偶性相反. 证毕

推论 在全部n级排列中，奇、偶排列的个数相同，各有$n!/2$.

定理 2 任意一个 n 级排列与排列$12\ldots n$ 都可经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

证明 我们对排列的级数 n 作数学归纳法，现在来证任意一个 n 级排列都可经过一系列对换变成$12\ldots n$.

1 级排列只有一个，结论显然成立.

假设结论对 $n-1$ 级排列已经成立，现在来证对对 n 级排列的情形结论也成立.

设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列，如果 $j_n=n$，那么根据归纳法假设，$n-1$ 级排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 可以经过一系列对换变成 $12\ldots n-1$，于是这一系列对换也就把 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成了 $12\ldots n$. 如果 $j_n\neq n$，那么对 $j_1j_2\cdots j_n$ 作 j_n, n 对换，它就变成 $j_1'j_2'\cdots j'_{n-1}n$，这就归结成上面的情形，因此结论普遍成立.

相仿地，$12\ldots n$ 也可用一系列对换变成 $j_1j_2\cdots j_n$，因为 $12\ldots n$ 是偶排列，所以根据定理1所作对换的个数与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 有相同的奇偶性.

证毕

小结和作业

1. 排列逆序数如何计算？逆序数的奇偶判断的依据？

2. 排列有哪些性质？

3. 作业见习题册.