5.5二次曲线的主直径与主方向

一. 二次曲线的主直径与主方向

定义1 二次曲线的垂直于其共轭弦的直径叫做二次曲线的主直径，主直径的方向与垂直于主直径的方向都叫做二次曲线的主方向.

主直径是二次曲线的对称轴，因此主直径也叫做二次曲线的轴，轴与曲线的交点叫做曲线的顶点.

求二次曲线的

$$F(x,y)\equiv \qquad (1)$$

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

主方向与主直径

二. 主方向与主直径的求法

$X:Y$ 成为主方向的条件：

$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}Y = \lambda X \\ a_{12}X + a_{22}Y = \lambda Y \end{cases} \text{（5.5-1）} \quad \text{或} \quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)X + a_{12}Y = 0 \\ a_{12}X + (a_{22}-\lambda)Y = 0 \end{cases} \text{（5.5-1}'\text{）}$$

从而

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{（5.5-2）}$$

即

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0 \qquad \text{（5.5-3）}$$

因此1.对于中心二次曲线来说，只要由（5.5-3）解出 λ，再代入（5.5-1）就能得到它的主方向.

二. 主方向与主直径的求法

当（1）为非中心二次曲线，那么它的任何直径的方向总是它的唯一的渐近方向.

$$X_1 : Y_1 = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : (-a_{12})$$

垂直于它的方向显然为：

$$X_2 : Y_2 = a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22}$$

所以非中心二次曲线（1）的主方向为：

渐近主方向：

$$X_1 : Y_1 = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : (-a_{12})$$

非渐近主方向：

$$X_2 : Y_2 = a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22}$$

二. 主方向与主直径的求法

如果把（5.5-2）或（5.5-3）推广到非中心二次曲线，

即 $I_2=0$

方程（5.5-3）的两根为

$$\lambda_1=0\ ，\ \lambda_2=I_1=a_{11}+a_{22}\ ，$$

把它代入（5.5-1）或（5.5-1′）所得的主方向，正是非中心二次曲线的渐近主方向与非渐近主方向.

因此，一个方向$X:Y$成为二次曲线（1）的主方向的条件是（5.5-1）成立，这里的λ是方程（5.5-2）或（5.5-3）的根.

三. 二次曲线的特征根

定义5.5.2 方程（5.5-2）或（5.5-3）叫做（1）的特征方程，特征方程的根叫做二次曲线的特征根.

从二次曲线（1）的特征方程（5.5-3）求出特征根λ，

把它代入（5.5-1）或（5.5-1）′，就得到相应的主方向.

如果主方向为非渐近方向，那么由（5.4-1）就能得到共轭于它的主直径.

三. 二次曲线的特征根

定理5.5.1 二次曲线的特征根都是实数.

$$\lambda^2 - \mathrm{I}_1\lambda + \mathrm{I}_2 = 0$$

其中

$$I_1 = a_{11} + a_{12} \quad , \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

定理5.5.2 二次曲线的特征根不能全为零.

定理5. 5. 3 由二次曲线（1）的特征根λ确定的主方向$X:Y$

当 $\lambda \neq 0$ 时，为二次曲线的非渐近主方向；

当 $\lambda = 0$ 时，为二次曲线的渐近主方向.

定理5. 5. 4 中心二次曲线至少有两条主直径，非中心二次曲线只有一条主直径.

例 1 求 $F(x,y)\equiv x^2-xy+y^2-1=0$ 的主方向与主直径.

解 $\because\ I_1=1+1=2$, $I_2=\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}\neq 0$.

$\therefore$曲线为中心曲线，它的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+\frac{3}{4}=0$,

解之，得 $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{3}{2}$,

由 $\lambda_1=\frac{1}{2}$ 确定的主方向为 1：1

由 $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ 确定的主方向为 $X_2 : Y_2 = -\frac{1}{2} : \left(\frac{3}{2} - 1\right) = -1 : 1$，又因为

$F_1(x,y) = x - \frac{1}{2}y$， $F_2(x,y) = -\frac{1}{2}x + y$，

所以曲线的主直径为 $\left(x - \frac{1}{2}y\right) + \left(-\frac{1}{2}x + y\right) = 0$ 与

$-\left(x - \frac{1}{2}y\right) + \left(-\frac{1}{2}x + y\right) = 0$，

即 $x + y = 0$ 与 $x - y = 0$.

例 2　求曲线 $F(x,y)\equiv x^2-2xy+y^2-4x=0$ 的主方向与主直径.

解　$\because$ $I_1=1+2$, $I_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0$,

$\therefore$ 曲线为非中心曲线，它的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda=0$,

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=0$.

由这两特征根所确定的主方向为：非渐近主方向

$X_1:Y_1=-1:(2-1)=-1:1$，渐近主方向

$X_2:Y_2=-1:(0-1)=1:1$,

又因此为

$F_1(x,y)=x-y-2$，$F_2(x,y)=-x+y$，

所以曲线的唯一主直径为

$$-(x-y-2)+(-x+y)=0$$，

即

$$x-y-1=0$$

四.课堂小结

1. 求解曲线的主方向;

2. 求解曲线的主直径。