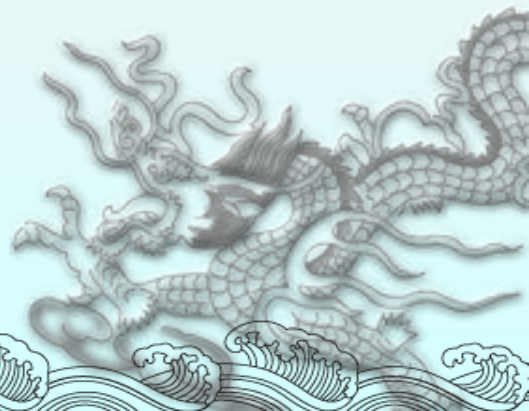


5.5 二次曲线的主直径与主方向



一. 二次曲线的主直径与主方向

定义1 二次曲线的垂直于其共轭弦的直径叫做二次曲线的主直径，主直径的方向与垂直于主直径的方向都叫做二次曲线的主方向。

主直径是二次曲线的对称轴，因此主直径也叫做二次曲线的轴，轴与曲线的交点叫做曲线的顶点。

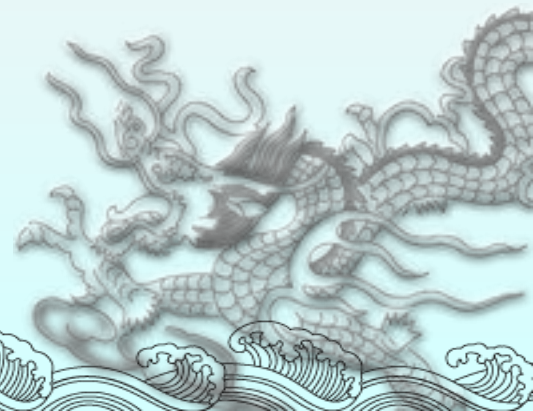


求二次曲线的

$$F(x, y) \equiv \quad (1)$$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

主方向与主直径



二. 主方向与主直径的求法

$X:Y$ 成为主方向的条件:

$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}Y = \lambda X \\ a_{12}X + a_{22}Y = \lambda Y \end{cases} \quad (5.5-1) \quad \text{或} \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)X + a_{12}Y = 0 \\ a_{12}X + (a_{22} - \lambda)Y = 0 \end{cases} \quad (5.5-1')$$

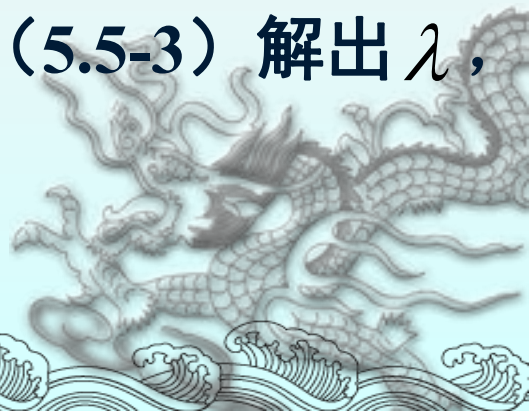
从而

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5.5-2)$$

即

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0 \quad (5.5-3)$$

因此1.对于中心二次曲线来说, 只要由 (5.5-3) 解出 λ , 再代入 (5.5-1) 就能得到它的主方向.



二. 主方向与主直径的求法

当 (1) 为非中心二次曲线, 那么它的任何直径的方向总是它的唯一的渐近方向.

$$X_1 : Y_1 = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : (-a_{12})$$

垂直于它的方向显然为:

$$X_2 : Y_2 = a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22}$$

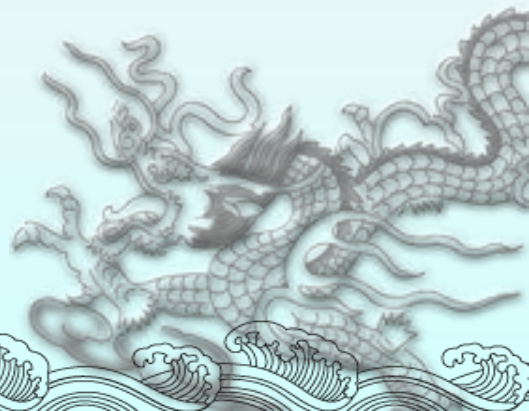
所以非中心二次曲线 (1) 的**主方向**为:

渐近主方向:

$$X_1 : Y_1 = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : (-a_{12})$$

非渐近主方向:

$$X_2 : Y_2 = a_{11} : a_{12} = a_{12} : a_{22}$$



二. 主方向与主直径的求法

如果把 (5.5-2) 或 (5.5-3) 推广到非中心二次曲线,

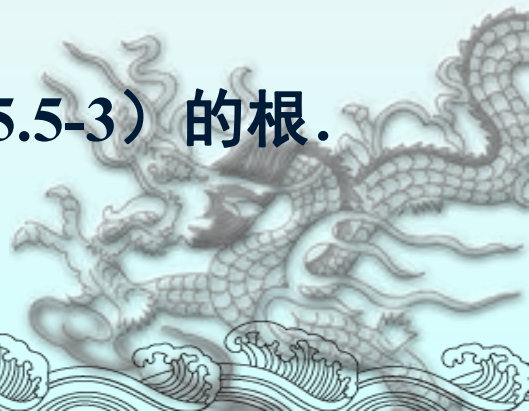
即 $I_2 = 0$

方程 (5.5-3) 的两根为

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = I_1 = a_{11} + a_{22},$$

把它代入 (5.5-1) 或 (5.5-1') 所得的主方向, 正是非中心二次曲线的渐近主方向与非渐近主方向.

因此, 一个方向 $X:Y$ 成为二次曲线 (1) 的主方向的条件是 (5.5-1) 成立, 这里的 λ 是方程 (5.5-2) 或 (5.5-3) 的根.

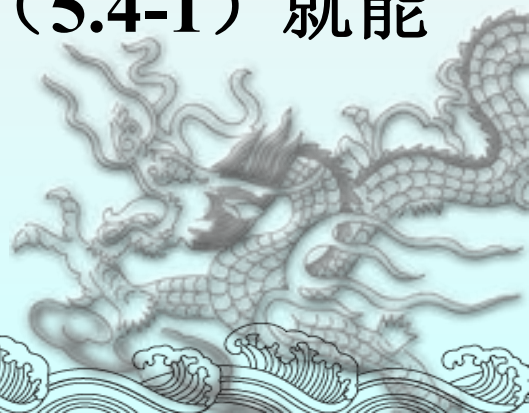


三. 二次曲线的特征根

定义5.5.2 方程 (5.5-2) 或 (5.5-3) 叫做 (1) 的特征方程, 特征方程的根叫做二次曲线的特征根.

从二次曲线 (1) 的特征方程 (5.5-3) 求出特征根 λ , 把它代入 (5.5-1) 或 (5.5-1)', 就得到相应的主方向.

如果主方向为非渐近方向, 那么由 (5.4-1) 就能得到共轭于它的主直径.



三. 二次曲线的特征根

定理5.5.1 二次曲线的特征根都是实数.

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$$

其中

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

定理5.5.2 二次曲线的特征根不能全为零.

定理5.5.3 由二次曲线 (1) 的特征根 λ 确定的主方向 $X : Y$

当 $\lambda \neq 0$ 时, 为二次曲线的非渐近主方向;

当 $\lambda = 0$ 时, 为二次曲线的渐近主方向.

定理5.5.4 中心二次曲线至少有两条主直径, 非中心二次曲线只有一条主直径.



例 1 求 $F(x, y) \equiv x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$
的主方向与主直径.

解 $\because I_1 = 1 + 1 = 2$, $I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \neq \frac{3}{4} \neq 0$.

\therefore 曲线为中心曲线, 它的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = 0$,

解之, 得 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$,

由 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ 确定的主方向为 1: 1

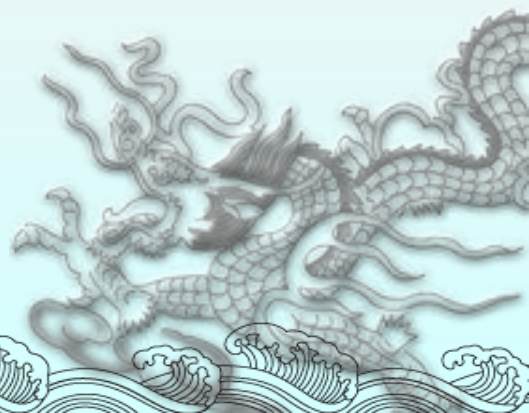
由 $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ 确定的主方向为 $X_2 : Y_2 = -\frac{1}{2} : \left(\frac{3}{2} - 1\right) = -1 : 1$ ，又因为

$$F_1(x, y) = x - \frac{1}{2}y, \quad F_2(x, y) = -\frac{1}{2}x + y,$$

所以曲线的主直径为 $\left(x - \frac{1}{2}y\right) + \left(-\frac{1}{2}x + y\right) = 0$ 与

$$-\left(x - \frac{1}{2}y\right) + \left(-\frac{1}{2}x + y\right) = 0,$$

即 $x + y = 0$ 与 $x - y = 0$.



例 2 求曲线 $F(x, y) \equiv x^2 - 2xy + y^2 - 4x = 0$ 的主方向与主直径.

解 $\because I_1 = 1 + 2, I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

\therefore 曲线为非中心曲线, 它的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda = 0,$
 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0.$

由这两特征根所确定的主方向为: 非渐近主方向
 $X_1 : Y_1 = -1 : (2 - 1) = -1 : 1,$ 渐近主方向

$X_2 : Y_2 = -1 : (0 - 1) = 1 : 1,$

又因此为

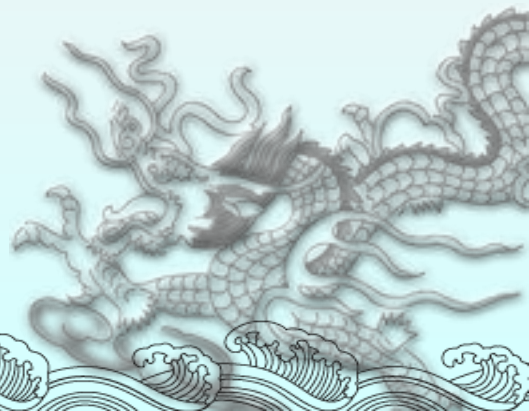
$$F_1(x, y) = x - y - 2, \quad F_2(x, y) = -x + y,$$

所以曲线的唯一主直径为

$$-(x - y - 2) + (-x + y) = 0,$$

即

$$x - y - 1 = 0$$



四.课堂小结

1. 求解曲线的主方向;

2. 求解曲线的主直径。

