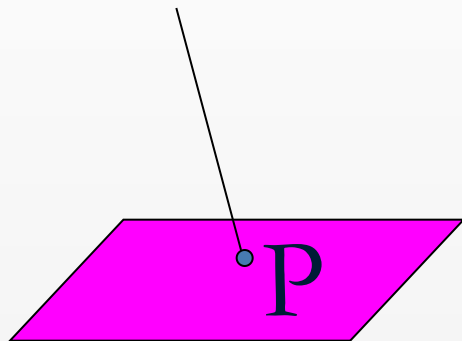


直线与平面的相关位置

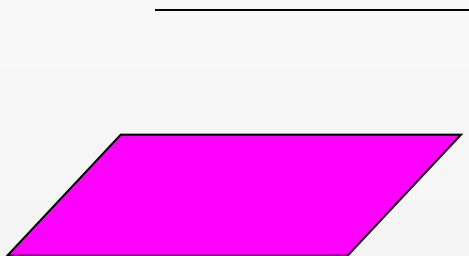
A pencil and a ruler are positioned diagonally across the right side of the slide. The pencil is at the top right, and the ruler is below it, showing markings for 9 and 10. The background is a light, neutral color.

主讲人：周平

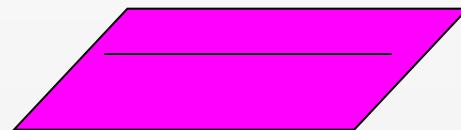
空间直线与平面的三种位置关系：



相交



平行



直线在平面上

想一想：空间直线与平面的位置关系有哪些？

思考：如何判定以上三种相关位置呢？


1. 直线与平面的相关位置成立的条件

设直线 l 与平面 π 的方程分别为:

$$l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}, \quad (1)$$

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

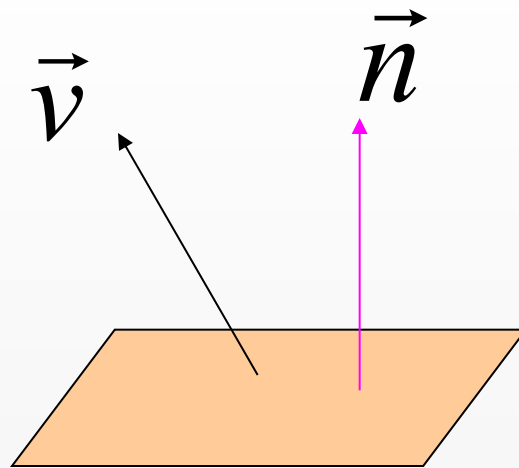
因为直线 l 的方向向量为 $\vec{v} = \{X, Y, Z\}$, $P_0(x_0, y_0, z_0) \in l$, 平面 π 的法向量 $\vec{n} = \{A, B, C\}$, 所以在直角坐标系下, 从几何上看, 如下图所示:



(1) l 与 π 的相交条件:

$$AX + BY + CZ \neq 0$$

即 \vec{v} 不垂直于 \vec{n} ;



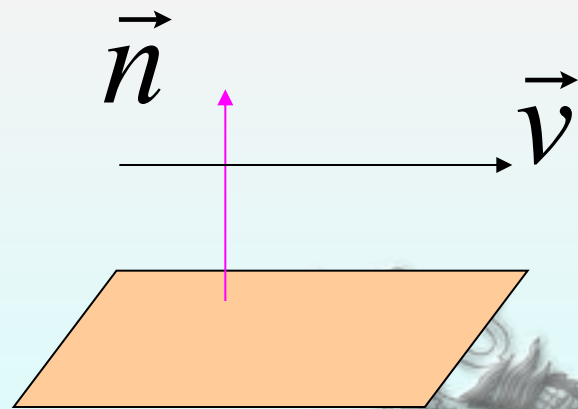
相交

(2) l 与 π 的平行条件:

$$AX + BY + CZ = 0,$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

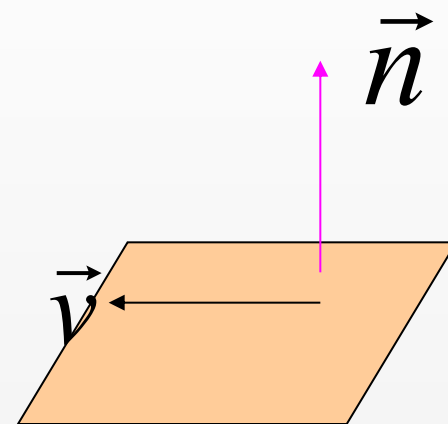
即 $\vec{v} \perp \vec{n}$, 且 l 上的点 (x_0, y_0, z_0) 不在 π 上;



平行

(3) l 在 π 上的条件:

$$\begin{aligned}AX + BY + CZ &= 0, \\Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= 0\end{aligned}$$



直线在平面上

即 $\vec{v} \perp \vec{n}$, 且 l 上的点 (x_0, y_0, z_0) 在 π 上.



定理3.5.1 直线(1)与平面(2)的相关位置关系有如下充要条件

1° 相交:

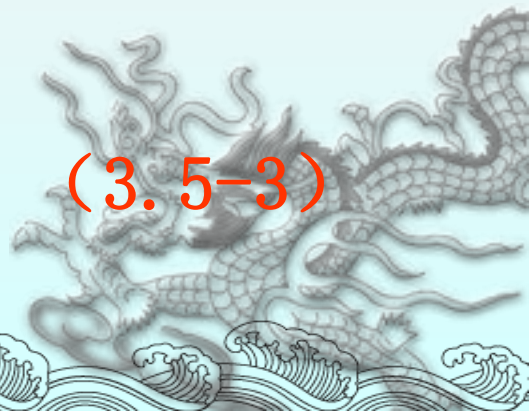
$$AX + BY + CZ \neq 0; \quad (3.5-1)$$

2° 平行:

$$\begin{aligned} AX + BY + CZ = 0, \text{ 且} \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0; \end{aligned} \quad (3.5-2)$$

3° 直线在平面上:

$$\begin{aligned} AX + BY + CZ = 0, \text{ 且} \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{aligned} \quad (3.5-3)$$



2. 直线与平面的交点

设直线 l 与平面 π 的方程分别为:

$$l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}, \quad (3)$$

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4)$$

第一步: 将 l 的方程改写成参数式:

$$\begin{cases} x = x_0 + Xt, \\ y = y_0 + Yt, \\ z = z_0 + Zt. \end{cases} \quad \text{其中 } t \text{ 为参数.} \quad (5)$$



问: 怎样求 l 与 π 的交点呢?

第二步：把(5)式代入(4)式，整理得

$$(AX + BY + CZ)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D), \quad (6)$$

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{AX + BY + CZ}, \quad (7)$$

第三步：将(7)代入(5)式，即得 l 与 π 的交点坐标。



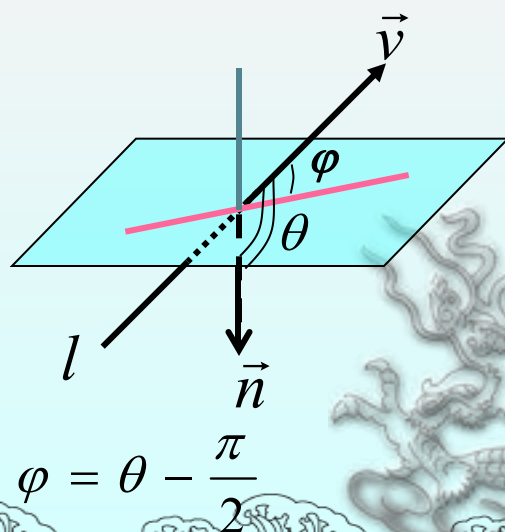
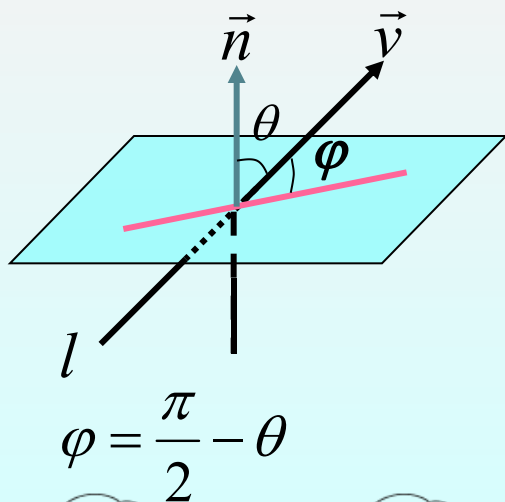
3. 空间直线与平面的夹角

以下讨论在直角坐标系下进行

定义 直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ 称为直线与平面的夹角.

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

(当直线垂直于平面时, 规定 $\varphi = \frac{\pi}{2}$)



思考：一般的直线与平面的夹角呢？

设 $\angle(\vec{n}, \vec{v}) = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), 则 $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} - \theta \right|$, 故

$$\sin \varphi = |\cos \theta| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}$$

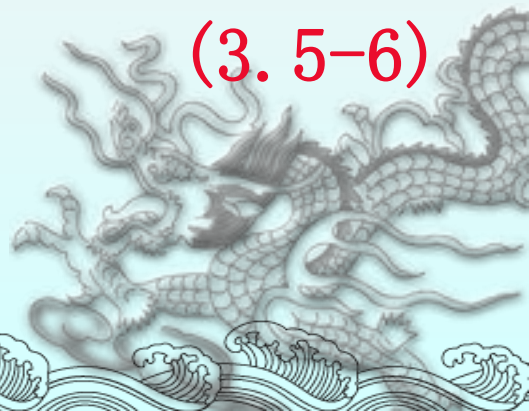
思考：直线与平面的夹角公式？

$$= \frac{|AX + BY + CZ|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad (3.5-4)$$

从而有

$$l // \pi \text{ 或 } l \text{ 在 } \pi \text{ 上} \iff AX + BY + CZ = 0; \quad (3.5-5)$$

$$l \perp \pi \iff \vec{v} // \vec{n} \iff \frac{A}{X} = \frac{B}{Y} = \frac{C}{Z}. \quad (3.5-6)$$



4. 应用举例

例 判断直线 $l: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$ 与平面 $\pi: 2x+y-z-3=0$ 的相关位置; 若相交, 求出它们的交点和夹角.

解 $\because \vec{v} = \{-1, 1, 2\}, \vec{n} = \{2, 1, -1\}$, 则

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + 1 \times 1 - 1 \times 2 = -3 \neq 0$$

\therefore 直线与平面相交.

又直线的坐标式参数方程为:

$$\begin{cases} x = -t_0 \\ y = 1 + t_0 \\ z = 1 + 2t_0 \end{cases}$$

设交点处对应的参数为 t_0 ,

$$\therefore 2 \times (-t_0) + (1 + t_0) - (1 + 2t_0) - 3 = 0$$

$$\therefore t_0 = -1, \text{ 从而交点为 } (1, 0, -1).$$

又 设直线 l 与平面 π 的交角为 θ , 则:

$$\sin \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|2 \times (-1) + 1 \times 1 - 1 \times 2|}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}.$$

5. 课堂小结

(1) 直线与平面分别相交、平行和直线在平面上的代数判断依据;

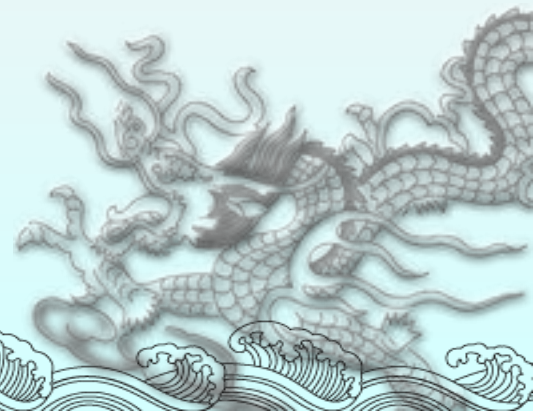
(2) 空间直线与平面的交点和夹角的计算.

? 思考题:

当直线与平面平行时，怎样计算他们之间的距离呢？

6. 作业

$$P_{123} \quad 2; \quad 3(1).$$



谢谢!

