

第五章 二次型

■ §1 二次型及其矩阵表示

■ §2 标准形

■ §3 唯一性

■ §4 正定二次型

第一节 二次型及其矩阵表示

主要内容

- 问题的提出
- 二次型的定义及矩阵表示
- 线性替换
- 合同矩阵

一、问题的提出

在解析几何中, 为了便于研究二次曲线

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = f \quad (1)$$

的几何性质, 我们可以选择适当的角度 θ , 作转轴
(反时针方向转轴)

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta, \end{cases} \quad (2)$$

把方程化为标准形

$$mx'^2 + ny'^2 = 1.$$



例1 求曲线 $5x^2 + 4xy + y^2$ 经 ~~逆~~ 顺时针方向转轴

45度和135度得到的新的曲线方程?

(1) 式的左边是一个二次多项式, 从代数学的观点看, 化标准的过程就是通过变量的线性替换(2) 化简一个二次齐次多项式, 使它只含有平方项. 这样一个问题, 在许多理论问题或实际问题中常会遇到. 现在我们把这类问题一般化, 讨论 n 个变量的二次齐次多项式的化简问题.

二、二次型的定义及矩阵表示

1. 定义

定义 设 P 是一数域, 一个系数在数域 P 中的 x_1, x_2, \dots, x_n **二次齐次多项式**

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned} \quad (3)$$

称为数域 P 上的一个 n 元二次型, 简称二次型.

2. 二次型的矩阵表示

設有二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n .$$

令

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i < j .$$

由于

$$x_i x_j = x_j x_i ,$$

所以二次型可以写成

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ &\quad \dots\dots\dots \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j. \end{aligned}$$

令

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

因此, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

它就称为**二次型的矩阵**。因为 $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 所以

$$A = A^T.$$

若 $A = A^T$ 称为**对称矩阵**, 因此, **二次型的矩阵都是对称矩阵**.

所以二次型可表示成

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X.$$

这即为二次型的矩阵表示形式.

应该看到, 二次型的矩阵 A 的元素, 当 $i \neq j$ 时 $a_{ij} = a_{ji}$ 正是它的 $x_i x_j$ 项的系数的一半, 而 a_{ii} 是 x_i^2 项的系数, 因此二次型和它的矩阵是相互唯一决定的. 由此还能得到, 若二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X = X^T B X$$

且 $A^T = A$, $B^T = B$, 则 $A = B$.

例 2 已知二次型

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2,$$

写出二次型的矩阵 A .

解 设 $f = X^T A X$, 则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

例 3 已知二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = & x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_4^2 \\ & - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_1x_4 \\ & - 8x_2x_3 - 4x_2x_4, \end{aligned}$$

写出二次型的矩阵 A .

解 设 $f = X^TAX$, 则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

三、线性替换

1. 定义

定义 2 设 x_1, x_2, \dots, x_n ; y_1, y_2, \dots, y_n 是两组文字, 系数在数域 P 中的一组关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \quad (4)$$

称为由 x_1, x_2, \dots, x_n 到 y_1, y_2, \dots, y_n 的一个线性替换，或简称线性替换。如果系数行列式

$$|c_{ij}| \neq 0,$$

那么称线性替换为非退化的。

例如，前面我们讲过的坐标旋转公式

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

是一个线性替换，且 $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$

所以它是非退化的。

2. 线性替换的矩阵形式

令

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

于是线性替换 (4) 可以写成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$X = CY.$$

3. 线性替换的性质

性质 线性替换把二次型还是变成二次型.

证明 设有二次型 $f = X^T A X$, 和线性替换

$X = CY$, 则

$$\begin{aligned} f &= X^T A X = (CY)^T A (CY) = Y^T C^T A C Y \\ &= Y^T (C^T A C) Y. \end{aligned}$$

又因为 $(C^T A C)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T A C$, 所以 f 还是一个二次型.

证毕

四、合同矩阵

1. 概念的引入

我们知道，经过一个非退化的线性替换，二次型还是变成二次型。现在来讨论替换前后的二次型的矩阵之间的关系。

设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$, $A = A^T$, 是一个二次型，作非退化线性替换 $X = C Y$. 得到一个关于 y_1, y_2, \dots, y_n 的二次型 $Y^T B Y$. 现在来看矩阵 B 与 A 的关系。

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= X^T A X \\ &= (CY)^T A (CY) \\ &= Y^T C^T A C Y \\ &= Y^T (C^T A C) Y \\ &= Y^T B Y. \end{aligned}$$

又因为矩阵 $C^T A C$ 也是对称的(前面已证), 由此即得

$$B = C^T A C.$$

这就是前后两个二次型的矩阵的关系.

2. 定义

定义 3 数域 P 上的 $n \times n$ 矩阵 A, B 称为**合同的**, 如果有数域 P 上可逆的 $n \times n$ 矩阵 C , 使

$$B = C^T A C.$$

3. 性质

合同是矩阵之间的一个关系, 合同关系有以下性质:

1) 反身性 $A = E^T A E$;

2) 对称性 若 $B = C^T A C$, 则 $A = (C^{-1})^T B C^{-1}$;

3) 传递性 若 $A_1 = C_1^T A C_1$, $A_2 = C_2^T A_1 C_2$,

则 $A_2 = (C_1 C_2)^T A (C_1 C_2)$.

因此, 经过非退化的线性替换, 新二次型的矩阵与原二次型的矩阵是合同的. 这样, 我们就把二次型的变换通过矩阵表示出来, 为以下的讨论提供了有力的工具.

在变换二次型时，总是要求所作的线性替换是非退化的。

从几何上看，因为坐标变换一定是非退化的。一般地，

当线性替换

$$X = CY$$

是非退化时，由上面的关系即得

$$Y = C^{-1}X.$$

这也是一个线性替换，它把所得的二次型还原。这样

就使从所得二次型的性质可知原二次型的一些性质。