

椭圆抛物面



一、椭圆抛物面的概念

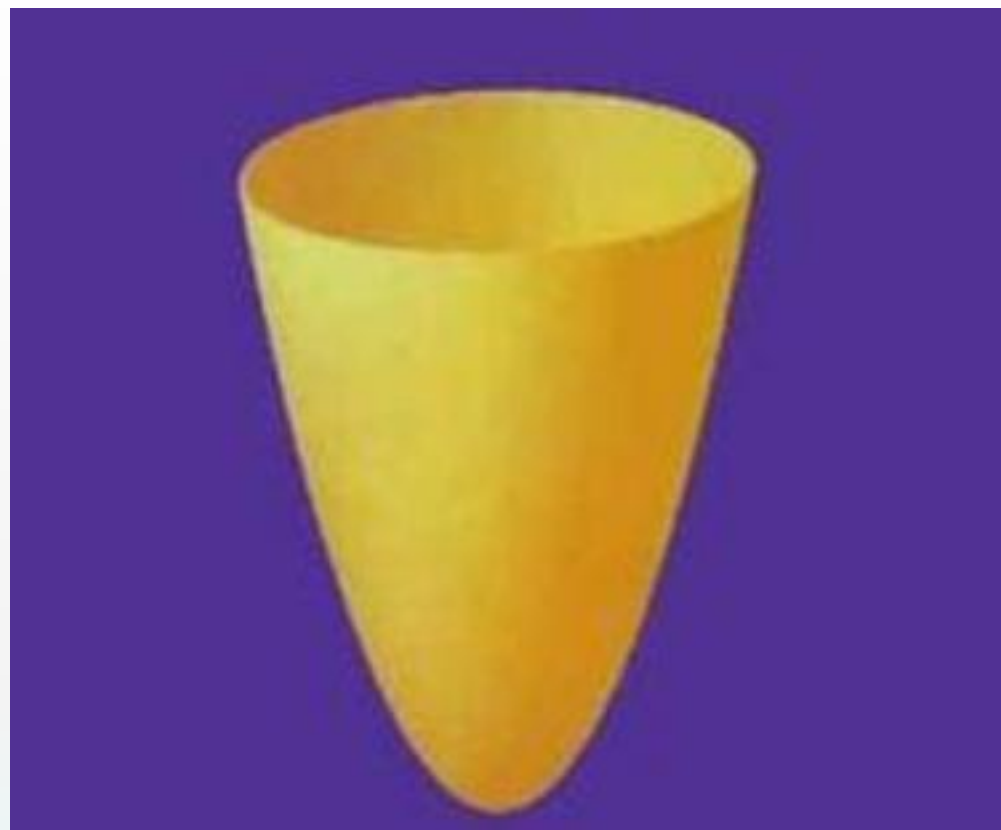
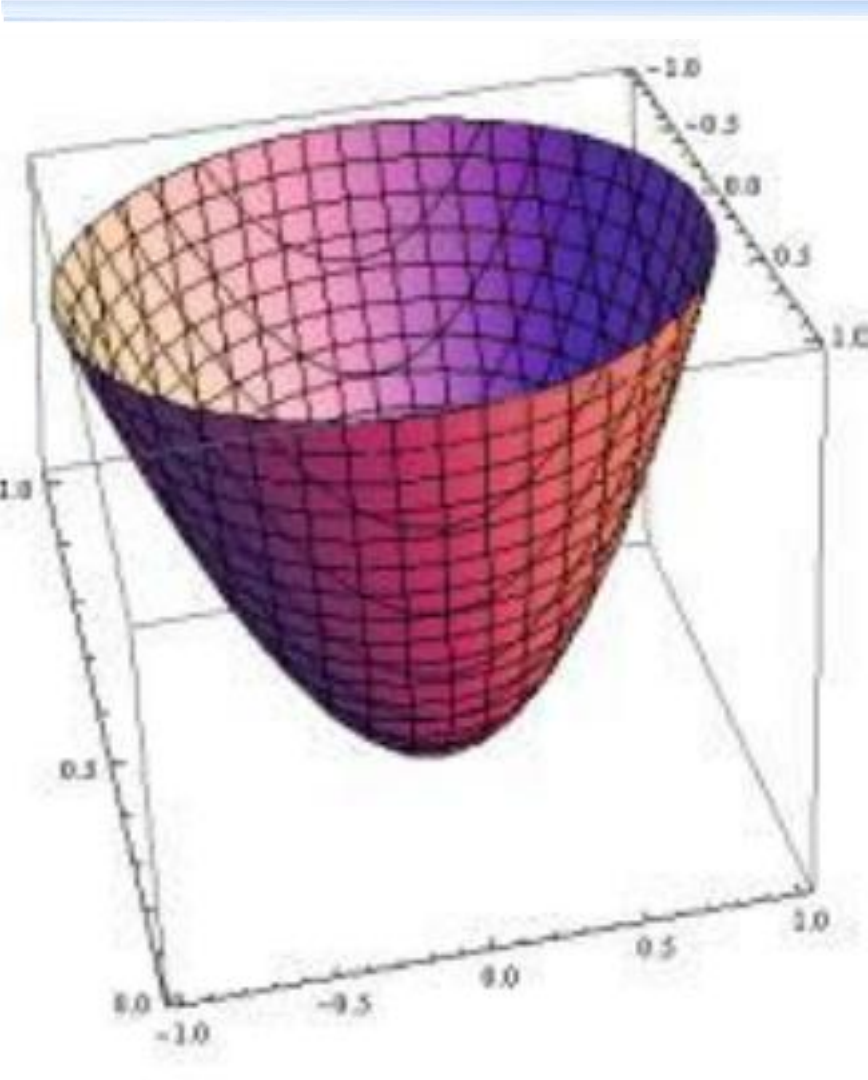
1. 定义 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z (a, b > 0) \quad (1)$$

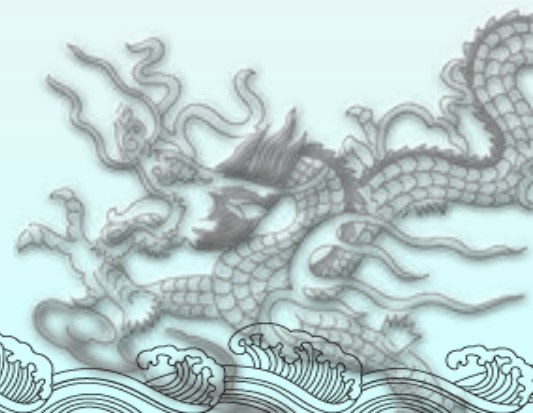
所表示的曲面叫做椭圆抛物面

方程(1)叫做椭圆抛物面的标准方程





椭圆抛物面的基本图形



二、椭圆抛物面的性质

1 对称性

椭圆抛物面关于 xOz 、 yOz 坐标平面, z 坐标轴对称

事实上,如果 (x,y,z) 满足方程,则

(1) $(x,-y,z)$ 和 $(-x,y,z)$ 也满足方程. 所以方程的图象关于 xoz 面、 $yozy$ 面对称.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



二、椭圆抛物面的性质

1 对称性

椭圆抛物面关于 xOz 、 yOz 坐标平面, z 坐标轴对称

事实上,如果 (x,y,z) 满足方程,则

(2) $(-x,-y,z)$ 满足方程. 所以方程的图象关于 z 轴对称.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



二、椭圆抛物面的性质

2 顶点

(令两个坐标为零,代入方程解第三个坐标)

椭圆抛物面与对称轴交于点 $(0,0,0)$

这点称为椭圆抛物面的顶点

椭圆抛物面没有对称中心

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



二、椭圆抛物面的性质

3 范围

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

$$z = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \geq 0$$

$$z \geq 0$$

椭圆抛物面(4.6-1)的图象位于
说明:椭圆抛物面的全部在 xOy 平面的一侧

三、椭圆抛物面与坐标平面的交线

两条主抛物线具有相同的顶点, 对称轴和开口方向

i) 用坐标面截割

①用 $z = 0$ 截曲面

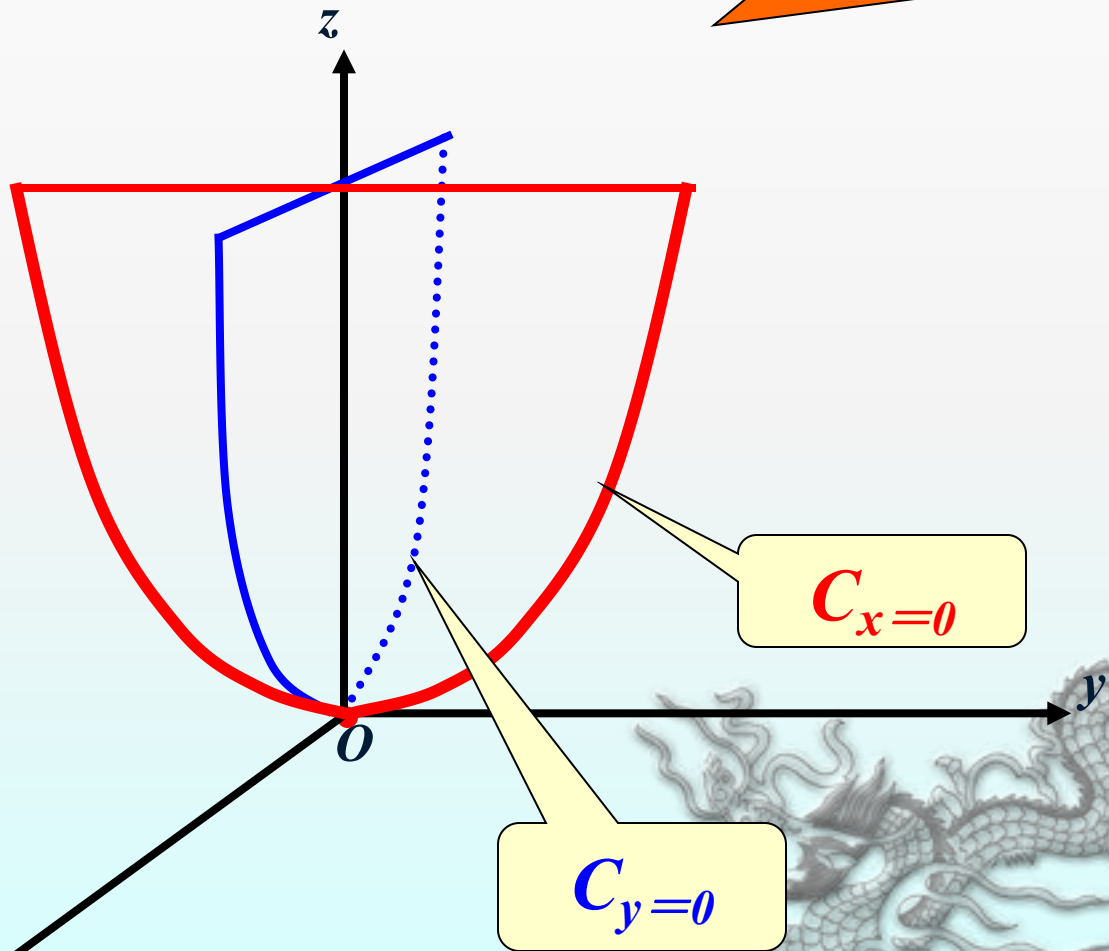
$$C_{z=0}: (0, 0, 0) \text{ (顶点)}$$

②用 $y = 0$ 截曲面

$$C_{y=0}: \begin{cases} x^2 = 2a^2 z, \\ y = 0. \end{cases} \text{ (抛物线)}$$

③用 $x = 0$ 截曲面

$$C_{x=0}: \begin{cases} y^2 = 2b^2 z, \\ x = 0. \end{cases} \text{ (抛物线)}$$



四、用平行于坐标面的平面截割曲面

1.用平行于XOY坐标面的平面 $z=h(h > 0)$,去截椭圆抛物面

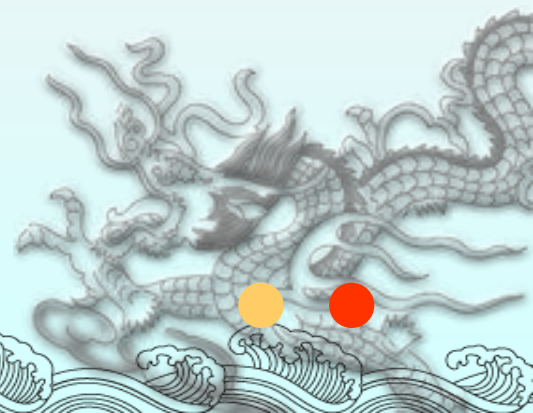
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$
$$z = h, (h > 0)$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h$$
$$z = h, (h > 0)$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h$$

$$z = h, (h > 0)$$



$$\frac{x^2}{(\sqrt{2ha})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2hb})^2} = 1$$

$$z = h, (h > 0)$$

交线为平面 $z=h$ 上的椭圆,它的半轴为:

$$a\sqrt{2h}, b\sqrt{2h},$$

两条半轴随着 h 的增加而增大.



$$\frac{x^2}{(\sqrt{2ha})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2hb})^2} = 1$$

$$z = h, (h > 0)$$

顶点坐标为

$$(\pm a\sqrt{2h}, 0, h), (0, \pm b\sqrt{2h}, h)$$

观察这两对顶点与下面两条主抛物线的关系

$$x^2 = 2a^2z$$

$$y = 0$$

$$y^2 = 2b^2z$$

$$x = 0$$

顶点坐标

$$(\pm a\sqrt{2h}, 0, h)$$

$$(0, \pm b\sqrt{2h}, h)$$

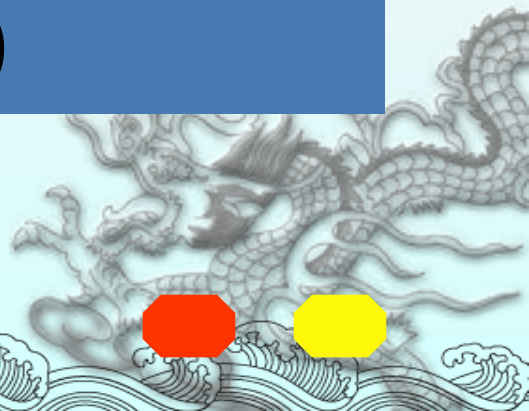
在主抛物线上:



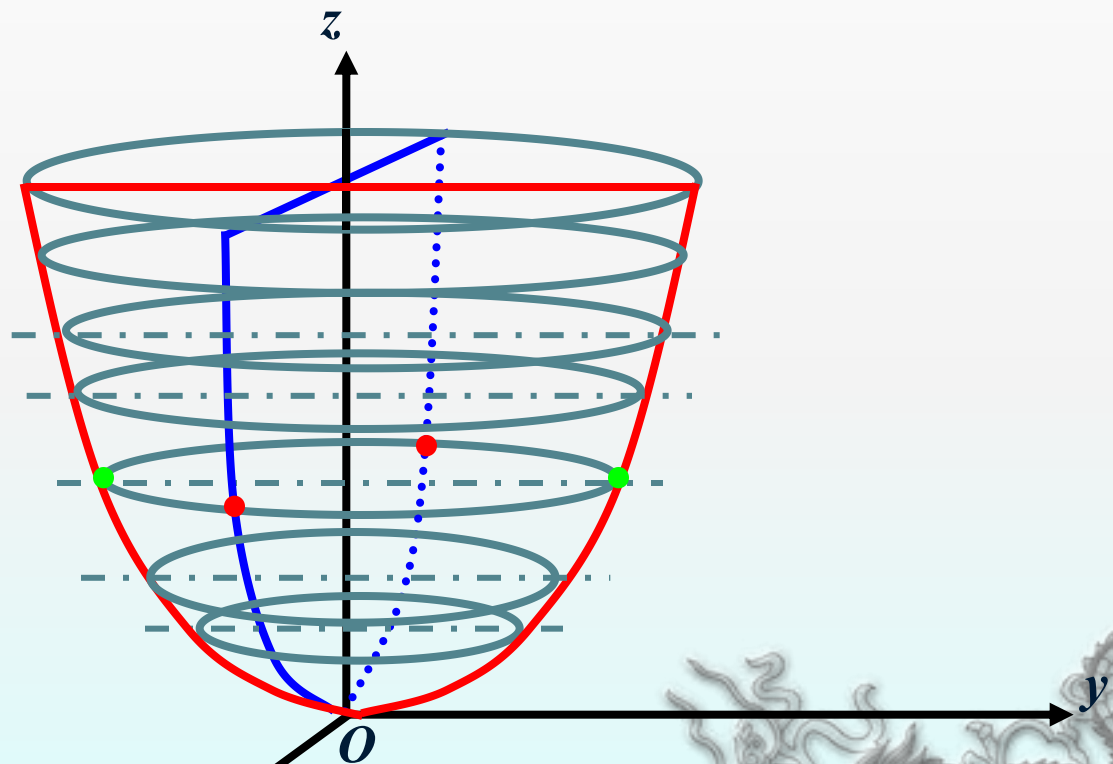
$$\begin{aligned}x^2 &= 2a^2 z, \\y &= 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}y^2 &= -2b^2 z, \\x &= 0\end{aligned}$$



结论：椭圆抛物面可看作由一个椭圆的变动（大小位置都改变）而产生，该椭圆在变动中，保持所在平面与 xOy 面平行，且两对顶点分别在两主抛物线上滑动

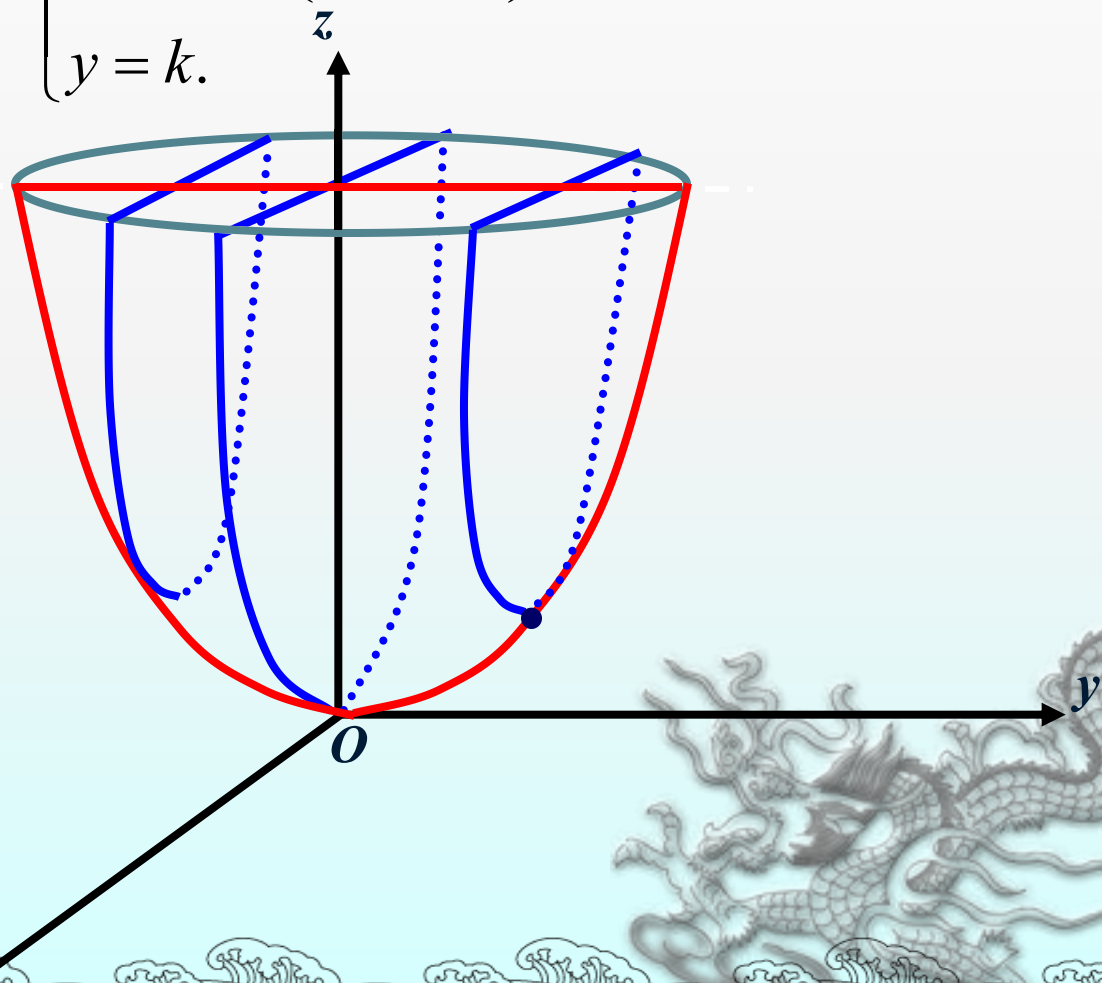


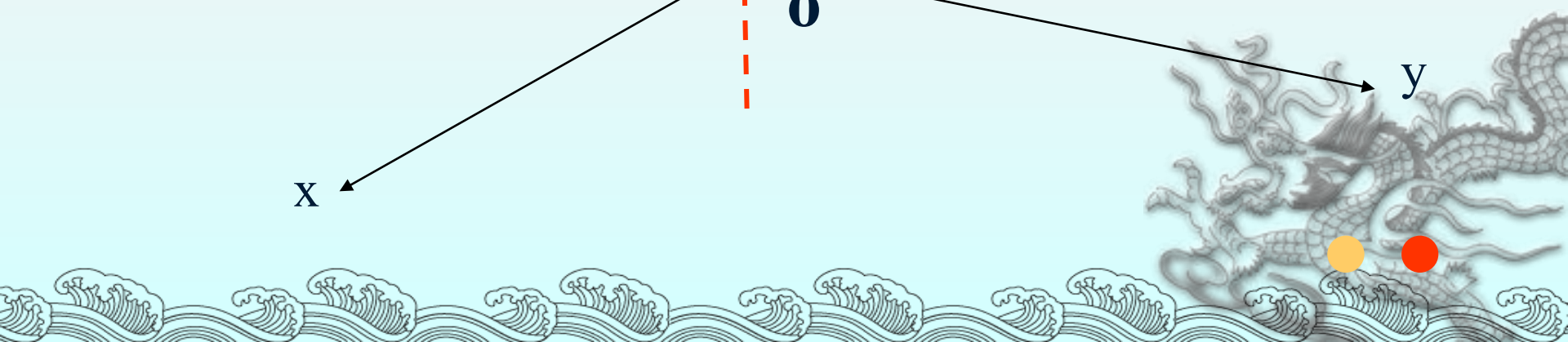
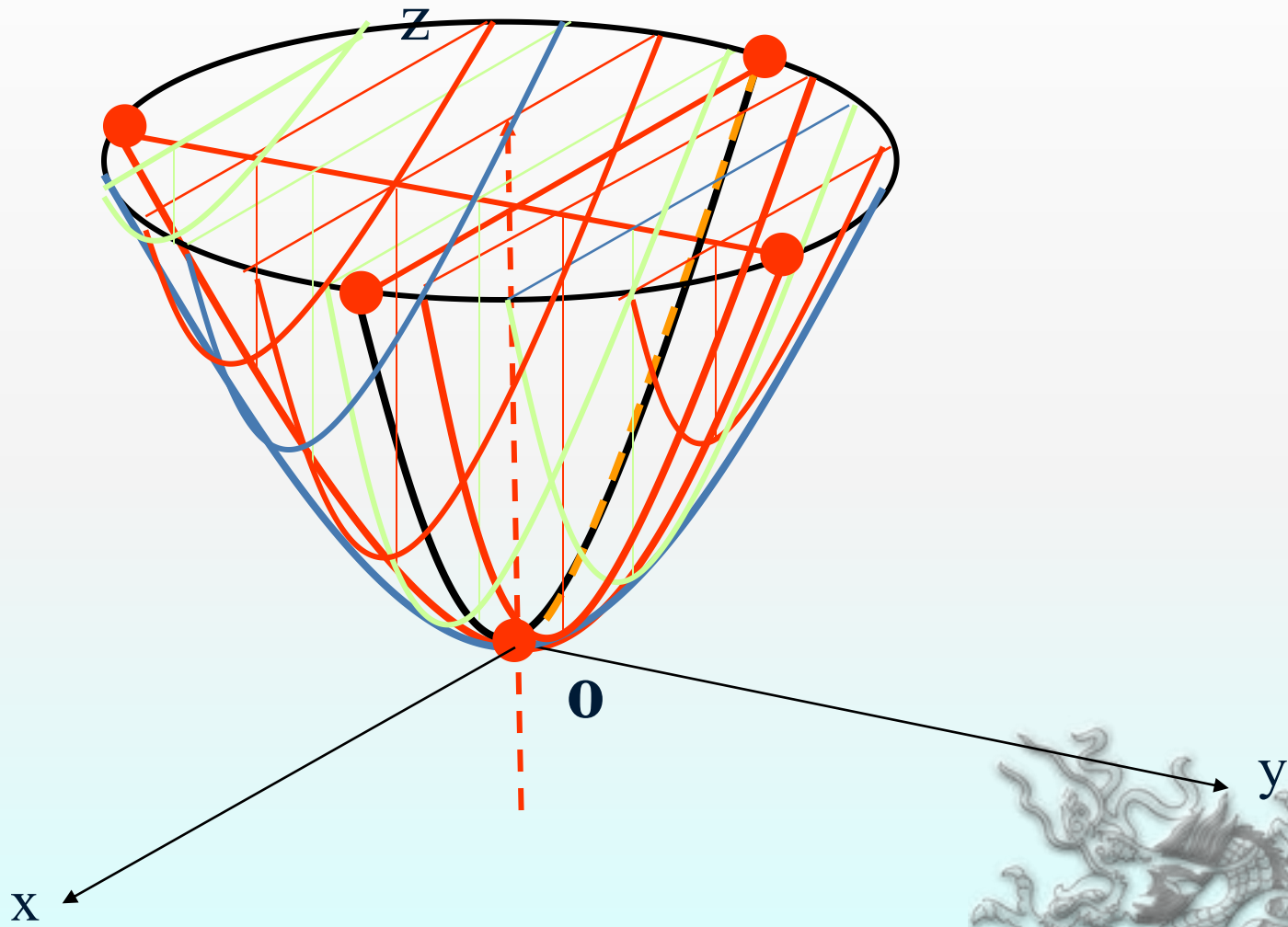
四、用平行于坐标面的平面截割

2. 用 $y = k$ 截曲面

$$\Rightarrow C_{y=k}: \begin{cases} x^2 = 2a^2 \left(z - \frac{y^2}{2b^2} \right), & (\text{抛物线}) \\ y = k. \end{cases}$$

结论：取这样两个抛物线，它们所在的平面互相垂直，它们的顶点和轴都重合，且两抛物线有相同的开口方向，让其中一条抛物线平行于自己（即与抛物线所在的平面平行），且使其顶点在另一个抛物线上滑动，那么前一抛物线的运动轨迹是一个椭圆抛物面。





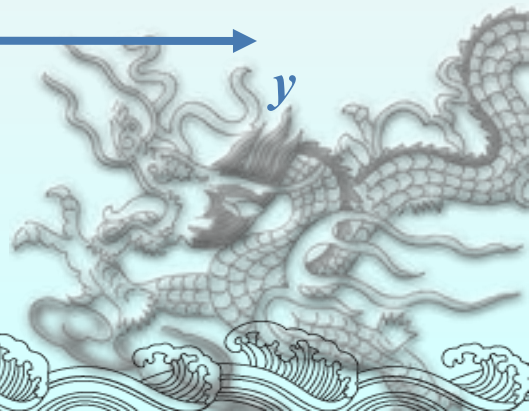
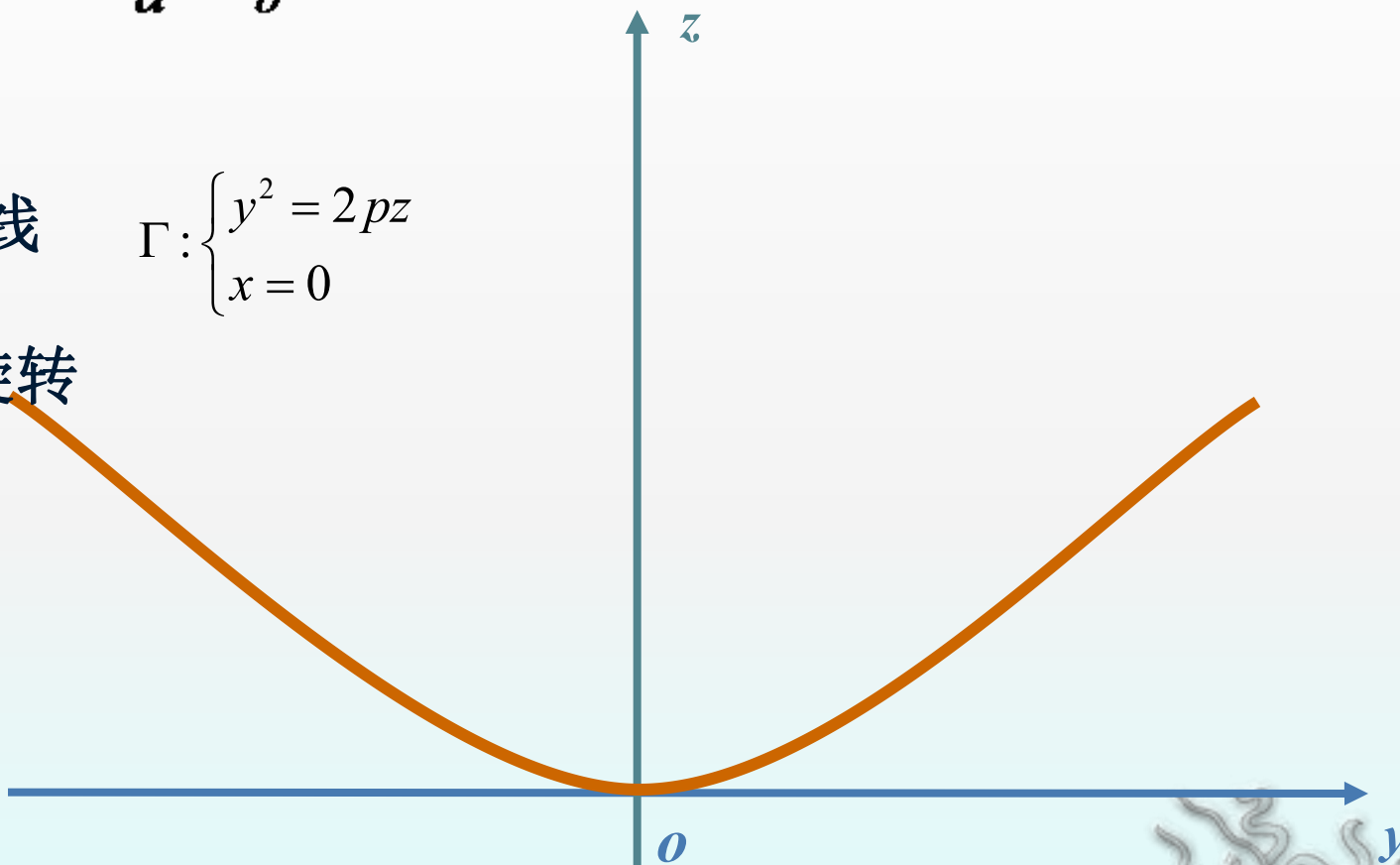
五、旋转抛物面与椭圆抛物面的关系

当取 $a=b$ 时, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \Rightarrow x^2 + y^2 = 2a^2z,$

将抛物线

$$\Gamma: \begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$$

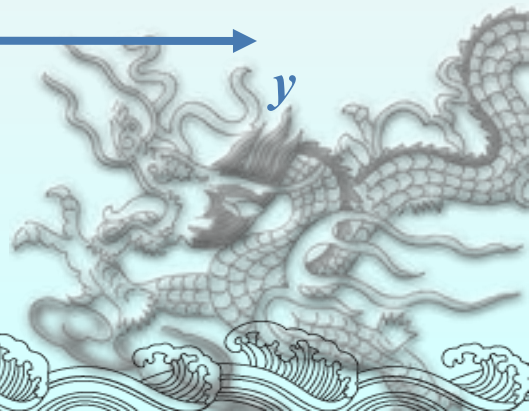
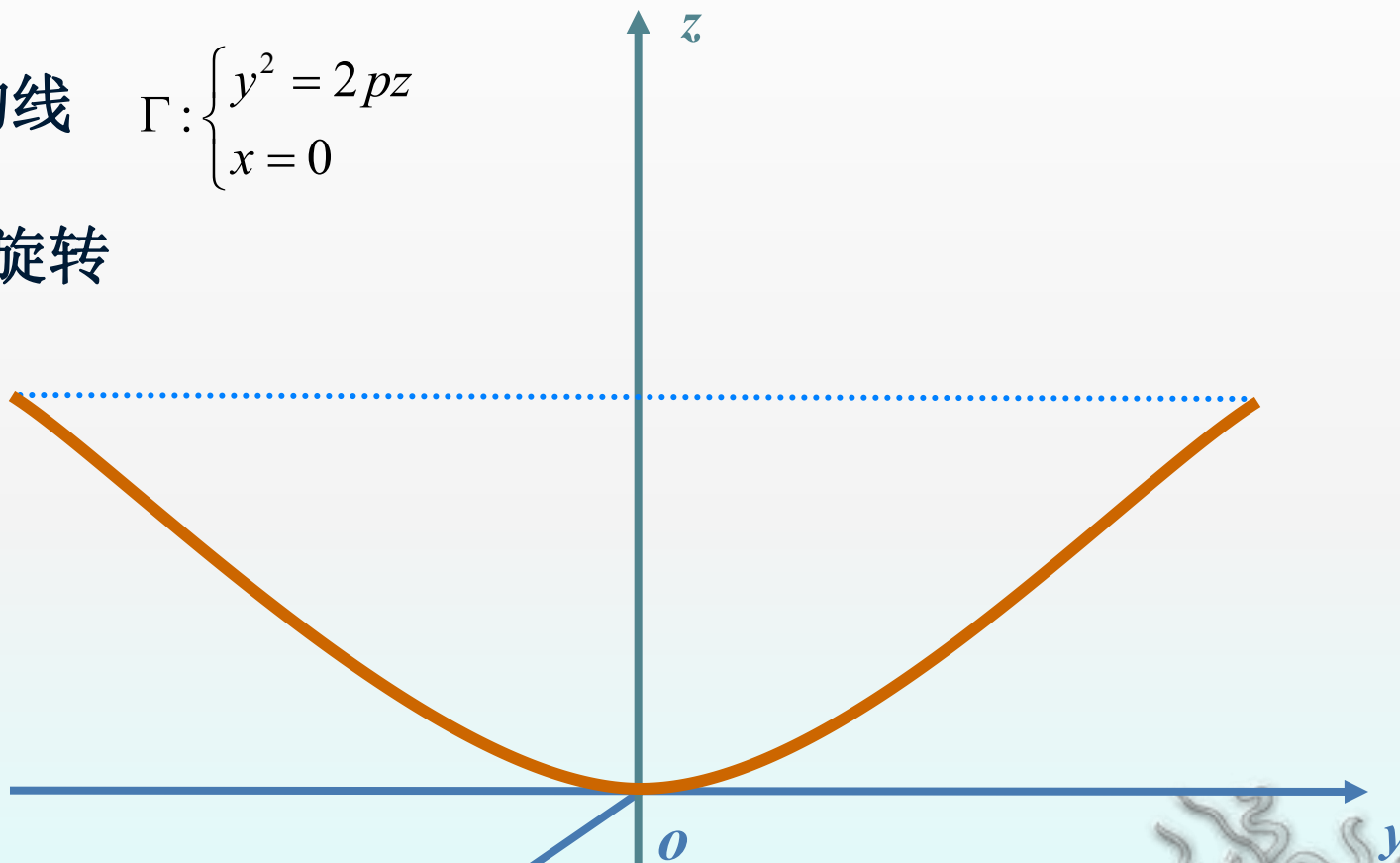
绕z轴旋转



将抛物线

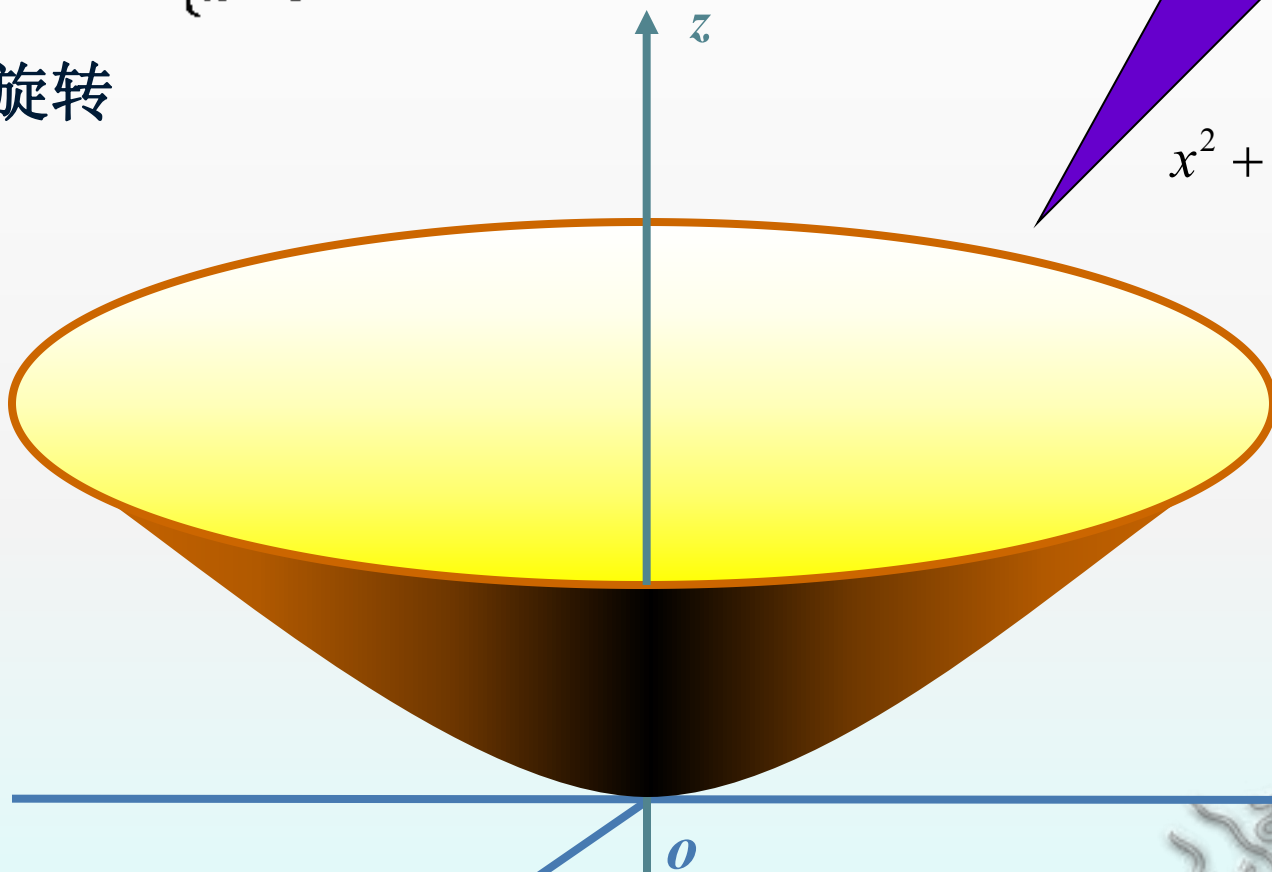
$$\Gamma: \begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$$

绕z轴旋转



将抛物线 $\Gamma: \begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$

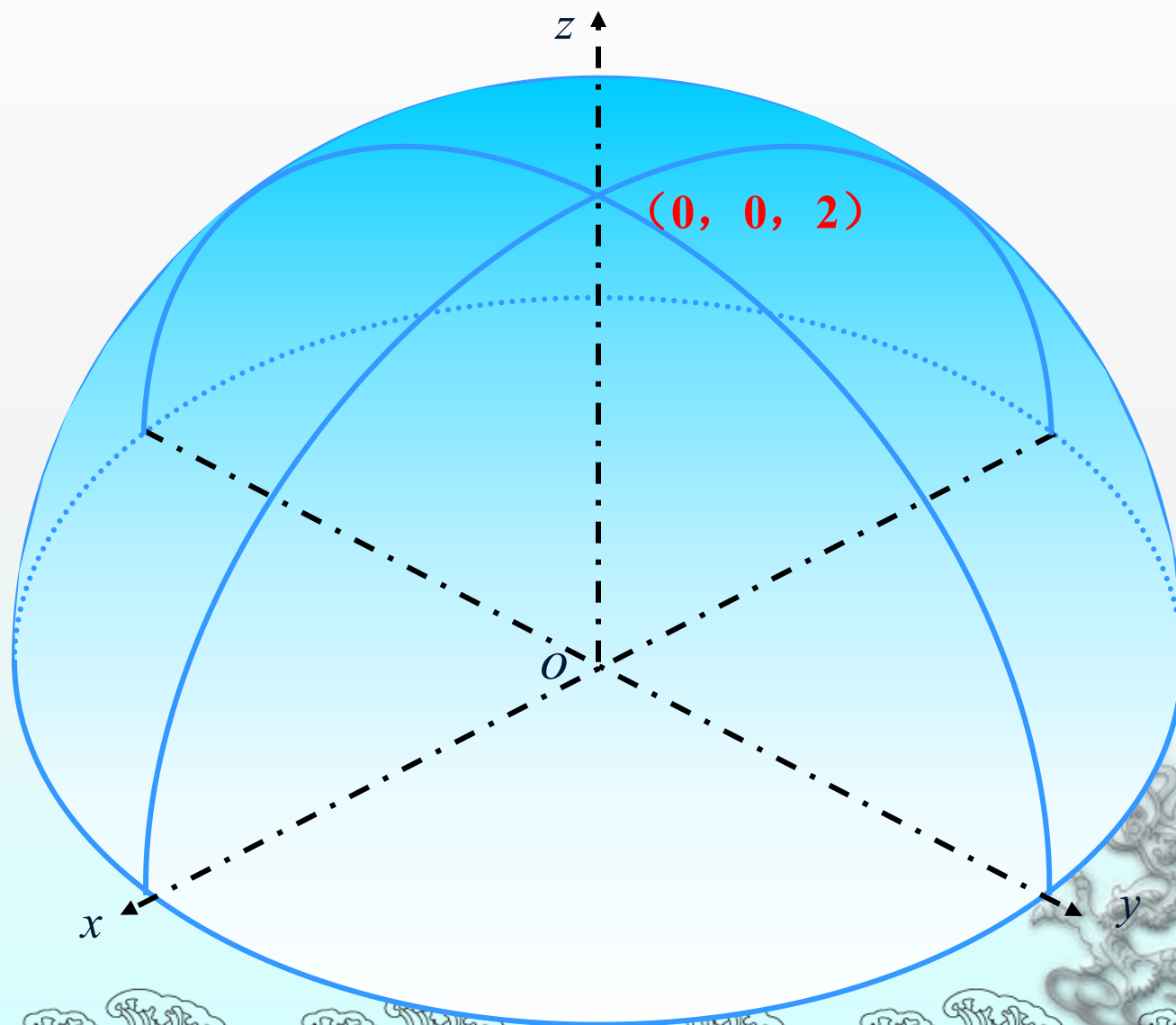
绕z轴旋转



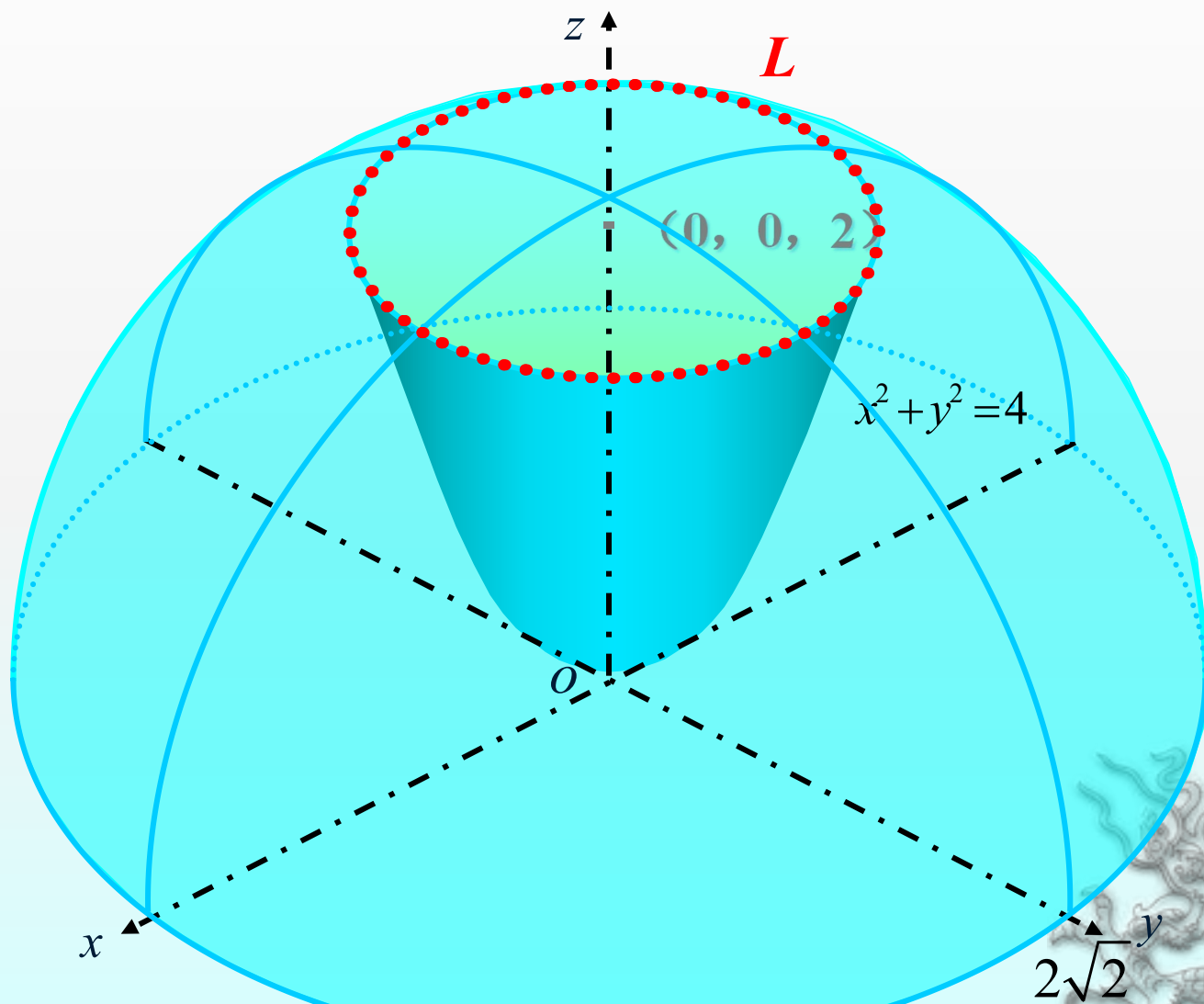
旋转抛物面

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

例 1 作出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 与旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 的交线.



例 1 作出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 与旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 的交线.



六、课堂小结

1. 用平行于 $x=t$ 的平面来截割椭圆抛物面时，与用平行于 $y = k$ 的平面来截割曲面结果是完全类似的。

2. 用平行截割法对曲面进行截割时，要注意表示平面常数 h 的取值范围。



思考题：

已知椭圆抛物面 S 的顶点在原点，对称面为 xOz 面与 yOz 面，且过点 $(1, 2, 6)$ 和 $(\frac{1}{3}, -1, 1)$ ，求这个椭圆抛物面的方程。

