第三节　矩阵乘积的行列式与秩

主要内容

- 矩阵乘积的行列式
- 矩阵乘积的秩

一、矩阵乘积的行列式

定理 1 设 A，B 是数域 P 上的两个 $n\times n$ 矩阵，那么

$$|AB|=|A||B|, \tag{1}$$

即矩阵乘积的行列式等于它的因子的行列式的乘积.

证明 这个定理就是第二章第八节的 定理 8

例 1 设 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$，$|A|=3$，求 $|B|$.

用数学归纳法，定理1不难推广到多个因子的情形,即有

推论1 设$A_1, A_2, \dots, A_m$是数域P上的$n \times n$矩阵，于是 $|A_1 A_2 \dots A_m| = |A_1||A_2| \dots |A_m|$.

定义9 数域P上的$n \times n$矩阵A称为非退化的，如果$|A| \neq 0$；否则称为退化的.

$n \times n$矩阵是非退化的充分必要条件是它的秩等于n.

推论2 设A，B是数域P上的$n \times n$矩阵，矩阵AB为退化的充要条件是A，B中至少有一个是退化的.

例2 设 $AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$，$|A|=3$，判断矩阵 B 是否退化？

二、矩阵乘积的秩

问：秩(AB)与秩(A)，秩(B)是否有关系？

定理 2 设 A 是数域 P 上的 $n\times m$ 矩阵，B 是数域 P 上的 $m\times s$ 矩阵，于是

$$\boxed{秩(AB)\leq \min[秩(A),秩(B)].} \qquad (2)$$

即乘积的秩不超过各因子的秩.

推论 3 如果 $A=A_1A_2\ldots A_t$，那么

$$秩(A)\leq \min_{1\leq j\leq t}秩(A_j).$$

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

证明 为了证明 (2)，只需要证明

秩$(AB) \le$ 秩(A) 与 秩$(AB) \le$ 秩(B)同时成立即可.

下面分别证明这两个不等式.

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}.$$

令B的行向量为$B_1, B_2, \ldots, B_m$， AB的行向量为C_1，$C_2, \ldots, C_n$. C_i的第j个分量和$a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + \ldots + a_{im}B_m$都等于$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$，

因而 $C_i = a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + \ldots + a_{im}B_m \quad (i = 1,2, \ldots, n)$,

即矩阵AB的行向量组$C_1, C_2, \ldots, C_n$可经B的行向量组线性表出. 所以AB的秩不能超过B的秩，即

$$秩(AB) \le 秩(B).$$

同样，令 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 表示 A 的列向量，$D_1, D_2, \ldots, D_s$ 表示 AB 的列向量. 由计算可知，

$$D_i = b_{1i}A_1 + b_{2i}A_2 + \ldots + b_{mi}A_m \quad (i = 1,2, \ldots, s).$$

这个式子表明，矩阵 AB 的列向量组可以经矩阵 A 的列向量组线性表出，因而前者的秩不可能超过后者的秩，这就是说，

$$秩(AB) \leq 秩(A).$$

证毕

课P201 设 A, B 为 $n\times n$ 矩阵，证明：如果 $AB=0$，

Ex18 那么 $rank(A)+rank(B)\le n.$

证　记 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则由 $AB=O$ 得 $Ab_i=O$ $(i=1,2,\cdots,n)$，故知 b_i 是齐次线性方程组的解向量．所以

$$秩(B)\leqslant n-秩(A)\Rightarrow 秩(A)+秩(B)\leqslant n.$$

小结和作业

1.矩阵乘积的行列式与先求矩阵的行列式再求乘积的关系?

2. 矩阵退化与非退化的判别方法.

3.请叙述矩阵乘积的秩与它的因子的秩的关系.

4.作业见学习通.