第二节　线性变换的运算

主要内容

- 线性变换的乘积
- 线性变换的加法
- 线性变换的数量乘法
- 线性变换的逆变换
- 线性变换的多项式
- 举例

一、线性变换的乘积

1. 定义

线性空间的线性变换作为映射的特殊情形当然可以定义乘法.

定义2 设 A , B 是线性空间 V 的两个线性变换，定义它们的**乘积** AB 为

$$(AB)(\alpha)=A(B(\alpha)) \qquad (\alpha\in V).$$

2. 性质

性质 1 线性变换的乘积是线性变换.

证明

性质 2 结合律

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}=\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$

注意：线性变换的乘法一般不满足交换律.

例如，在实数域 R 上的线性空间 $R[x]$ 中，线性变换

文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

$$\mathrm{D}(f(x)) = f'(x),$$

$$\mathrm{I}(f(x)) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

的乘积 DI =E，但一般 I D $\neq$ E．

对于乘法，单位变换 E 有特殊的地位．对于任意线性变换 A 都有

$$\mathrm{AE} = \mathrm{EA} = \mathrm{A}.$$

二、线性变换的加法

1. 定义

定义3 设 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ 是线性空间 V 的两个线性变换，定义它们的**和** $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ 为

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha)=\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{B}(\alpha)\quad(\alpha\in V).$$

2. 性质

性质 1 线性变换的和是线性变换.

证明

性质 2 零变换与所有线性变换 $\mathcal{A}$ 的和仍等于 $\mathcal{A}$：

$$\mathcal{A}+0=\mathcal{A}.$$

负变换： 线性变换 $\mathcal{A}$ 的负变换定义为：

$$(-\mathcal{A})(\alpha)=-\mathcal{A}(\alpha)\qquad(\alpha\in V).$$

3. 运算规律

1) 交换律 $A+B=B+A$.

2) 结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$.

3) $A+(-A)=O$.

4) 乘法对加法的左右分配律

$$A(B+C)=AB+AC,$$

$$(B+C)A=BA+CA.$$

证明

三、线性变换的数量乘法

1. 定义

在上一节例 4 中看到，数域 P 中每个数 k 都决定一个数乘变换 $\mathcal{K}$. 利用线性变换的乘法，可以定义数域 P 中的数与线性变换的数量乘法：

定义4 数域 P 中的数与线性变换的**数量乘法**

定义为 $$k\mathcal{A} = \mathcal{K}\mathcal{A},$$

即 $$(k\mathcal{A})(\alpha) = \mathcal{K}(\mathcal{A}(\alpha)) = k\mathcal{A}(\alpha).$$

显然，$k\mathcal{A}$ 还是线性变换.

2. 运算规律

1) $(kl)\mathcal{A}=k(l\mathcal{A})$,

2) $(k+l)\mathcal{A}=k\mathcal{A}+l\mathcal{A}$,

3) $k(\mathcal{A}+\mathcal{B})=k\mathcal{A}+k\mathcal{B}$,

4) $1\mathcal{A}=\mathcal{A}$.

对于线性变换，已经定义了乘法、加法与数量乘法

由加法与数量乘法的性质可知，

线性空间 V 中全体线性变换，对于如上定义的加法与数量乘法，也构成数域 P 上一个线性空间.

对于线性变换，也可定义逆变换.

四、线性变换的逆变换

1. 定义

定义5 线性空间 V 的线性变换 A 称为可逆的，如果有 V 的变换 B 存在，使

$$AB = BA = E.$$

这时，变换 B 称为 A 的**逆变换**，记为 A^{-1}.

2. 性质

如果线性变换 A 是可逆的，那么它的逆变换 A^{-1} 也是线性变换.

证明 因为

$$A^{-1}(\alpha+\beta) = A^{-1}[(A\,A^{-1})(\alpha) + (A\,A^{-1})(\beta)]$$

$$= A^{-1}[A(A^{-1}(\alpha)) + A(A^{-1}(\beta))]$$

$$= (A^{-1}A)(A^{-1}(\alpha) + A^{-1}(\beta))$$

$$= A^{-1}(\alpha) + A^{-1}(\beta).$$

$$\mathscr{A}^{-1}(k\alpha)=\mathscr{A}^{-1}(k(\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1})(\alpha))$$

$$=\mathscr{A}^{-1}(k(\mathscr{A}(\mathscr{A}^{-1})(\alpha)))$$

$$=\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}(k\mathscr{A}^{-1}(\alpha)))$$

$$=(\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A})(k\mathscr{A}^{-1}(\alpha))$$

$$=k\mathscr{A}^{-1}(\alpha).$$

所以 A^{-1} 是线性变换.

证毕

五、线性变换的多项式

下面引进线性变换的多项式的概念.

1. 线性变换的幂

既然线性变换的乘法满足结合律，当若干个线性变换 A 重复相乘时，其最终结果是完全确定的，与乘积的结合方式无关. 因此当 n 个(n 是正整数)线性变换 A 相乘时，我们就可以用

$$\underbrace{\mathrm{A}\,\mathrm{A}\cdots\mathrm{A}}_{n\text{个}}$$

来表示，称为 $\mathcal{A}$ 的 n 次幂，简单地记作 $\mathcal{A}^n$. 即

$$\mathcal{A}^n=\underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}\cdots\mathcal{A}}_{n\text{个}}$$

另外，规定 $\mathcal{A}^0=\mathcal{E}$.

线性变换的幂运算规律

$$\mathcal{A}^{n+m}=\mathcal{A}^n\mathcal{A}^m,(\mathcal{A}^n)^m=\mathcal{A}^{mn}\ (m,n\geq 0).$$

当线性变换 $\mathcal{A}$ 可逆时，定义 $\mathcal{A}$ 的负整数幂为

$$\mathcal{A}^{-n}=(\mathcal{A}^{-1})^n\qquad(n\text{为正整数}).$$

这时，指数法则可以推广到负整数幂的情形.

注意　线性变换乘积的指数法则不成立，即一般来说

$$(\mathcal{AB})^n \neq \mathcal{A}^n\mathcal{B}^n.$$

2. 线性变换的多项式

定义6　设 $f(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$ 是 $P[x]$ 中一多项式，$\mathcal{A}$ 是 V 的一线性变换，则称

$$f(\mathcal{A})=a_m\mathcal{A}^m + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}+\cdots+a_0$$

是线性变换 $\mathcal{A}$ 的多项式.

线性变换的多项式有以下性质：

1) $f(\mathscr{A})$ 是一线性变换.

2) 如果在 $P[x]$ 中，有

$$h(x)=f(x)+g(x),\ p(x)=f(x)g(x),$$

那么

$$h(\mathscr{A})=f(\mathscr{A})+g(\mathscr{A}),\ p(\mathscr{A})=f(\mathscr{A})g(\mathscr{A}).$$

特别地，

$$f(\mathscr{A})g(\mathscr{A})=g(\mathscr{A})f(\mathscr{A}).$$

六、举例

例 1 在三维几何空间中，对于某一向量 α 的内射影 Π_α (投影) 是一线性变换(参看图 7-6).

Π_α 可以用下面的公式来表示 (第一节 例 2):

$$\Pi_\alpha(\zeta)=\frac{(\alpha,\zeta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\,.$$

这里 $(\alpha,\zeta),(\alpha,\alpha)$

表示内积.

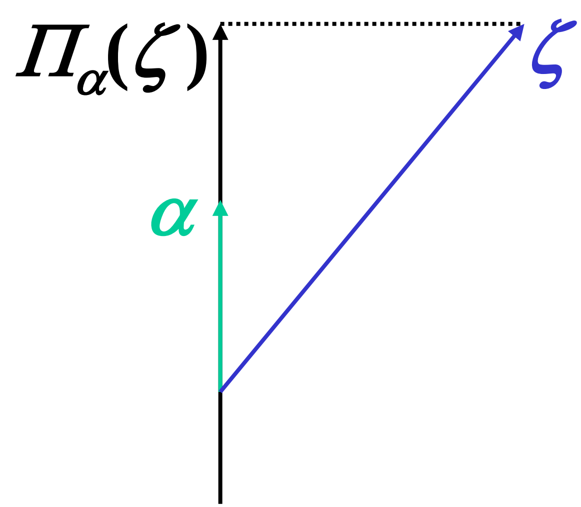

图 7-6

ζ在以 α 为法向量的平面 x 上的内射影$\Pi_x(\zeta)$

可以用公式

$$\Pi_x(\zeta) = \zeta - \Pi_\alpha(\zeta)$$

来表示(如图 7-7). 因此

$$\Pi_x = E - \Pi_\alpha,$$

ζ对于平面 x 的反射

R_x也是一个线性变换，且

$$R_x(\zeta) = \zeta - 2\Pi_\alpha(\zeta)$$

所以 $R_x = E - 2\Pi_\alpha$.

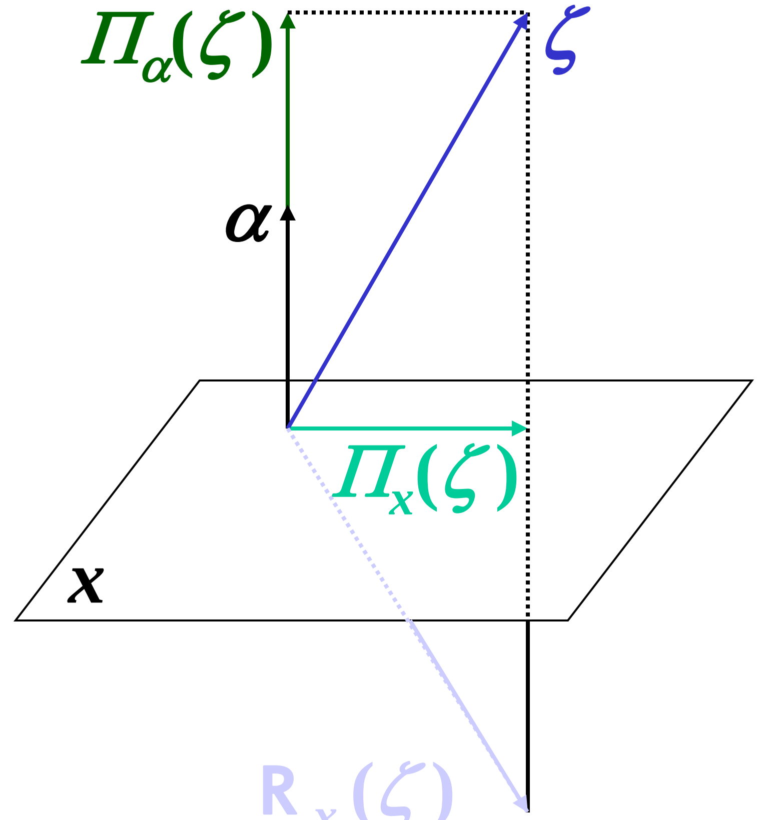

图 7-7

设 α, β 是空间的两个向量，则 α 与 β 互相垂直的充分必要条件为

$$\Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta = 0.$$

例 2　在线性空间 $P[\lambda]$ 中，求微商是一个线性变换，用 D 表示(第一节 例 5)．显然有

$$D^n = 0.$$

其次，变数的平移

$$f(\lambda) \to f(\lambda + a) \quad (a \in P)$$

也是一个线性变换z，用 S_a 表示．根据泰勒展开式

$$f(\lambda+a)=f(\lambda)+af'(\lambda)+\frac{a^2}{2!}f''(\lambda)+\cdots$$

$$+\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda),$$

可知 S_a 实质上是 D 的多项式：

$$S_a = E + aD + + \frac{a^2}{2!}D^2 + \ldots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}D^{n-1}.$$