



第七节 不变子空间

主要内容

- 定义 ● 举例
- 特征向量与一维不变子空间的关系
- A 在不变子空间上引起的变换
- 子空间为 A -子空间的条件
- 不变子空间与矩阵化简之间的关系
- 空间的分解

一、定义

定义 7 设 A 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换,

W 是 V 的子空间.

若 W 中的向量在 A 下的像仍在 W 中,

即, 对于 W 中任一向量 ξ 有 $A\xi \in W$,

称 W 是 A 的不变子空间, 记: A -子空间.

二、举例

例1 线性空间 V 的平凡子空间 V 和零子空间 $\{0\}$,

证明对于每个线性变换 A 来说都是 A -子空间.

例2 **证明** 线性变换 A 的值域 AV 与核 $A^{-1}(0)$ 是 A -子空间.

例3 若线性变换 A 与 B 是可交换的, 则 B 的核 $B^{-1}(0)$ 与值域 BV 都是 A -子空间.

例4 任何一个子空间都是数乘变换的不子空间.

因为线性变换 A 的多项式 $f(A)$ 与 A 是可交换的, 则 $f(A)$ 的核与值域都是 A -子空间.

这是由于, 按定义子空间对于数量乘法是封闭的.

三、特征向量与一维不变子空间的关系

设 W 是一维 A -子空间, $\forall \xi \in W, \xi \neq 0$ 则 ξ 是 W 的基.

按 A -子空间的定义 $A\xi \in W$, 它必定是 ξ 的一个倍数:

$$A\xi = \lambda_0 \xi.$$

这说明什么? ξ 是 A 的特征向量;

2. W 是由 ξ 生成的一维 A -子空间.

反过来, 设 $A\xi = \lambda_0 \xi$, 其中 $\xi \neq 0$,

则 ξ 以及它的任一倍数 $k\xi$ 在 A 下的像是原像的 λ_0 倍,

仍然是 ξ 的一个倍数. 这说明什么?

这说明 ξ 的倍数构成一个一维 A -子空间.

问题: 1. 线性变换 A 的属于特征值 λ_0 的特征子空间 V_{λ_0}

是不是 A -子空间?

2. A -子空间的和与交还是 A -子空间?

四、 A 在不變子空間上引起的變換

設 A 是線性空間 V 的線性變換， W 是 A -不變子空間。

由於 W 中向量在 A 下的像仍在 W 中，這就使得有可能不必在整個空間 V 中來考慮 A ，而只在不變子空間 W 中

考慮 A ，即把 A 看成是 W 的一個線性變換，稱為

A 在不變子空間 W 上引起的變換。用符號 $A|_W$ 來表示，

但在不致引起混淆的情況下，仍然可用 A 來表示。

A 和 $A|W$ 的异同:

A 是 V 的线性变换, V 中每个向量在 A 下都有确定的像;

$A|W$ 是不变子空间 W 上的线性变换,

对于 W 中任一向量 ξ , 有

$$(A|W)\xi = A\xi.$$

但是对于 V 中不属于 W 的向量 η 来说, $(A|W)\eta$ 是没有意义的.

例如,任意线性变换在其核上引起的变换是零变换,

而在特征子空间 V_{λ_0} 上引起的变换是数乘变换 λ_0 .

五、子空间为 A -子空间的条件

设 W 是线性空间 V 的子空间, 且

$$W = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s).$$

则 W 是 A -子空间的 **充要条件**

$A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 全属于 W .

六、不变子空间与矩阵化简之间的关系

1) 设 A 是 n 维线性空间 V 的线性变换, W 是 V 的 A -子空间.
在 W 中取一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$, 把它扩充成 V 的一组基

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n. \quad (1)$$

那么, A 在这组基下的矩阵就具有下列形状

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

并且左上角的 k 级矩阵 A_1 就是 $A|_W$ 在 W 的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ 下的矩阵.

反之, 如果 A 在基 (1) 下的矩阵是 (2), 那么由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ 生成的子空间 W 是不是 A -子空间?

Yes

2) 设 V 分解成若干个 \mathcal{A} -子空间的直和:

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s.$$

在每一个 \mathcal{A} -子空间 W_i 中取基

$$\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \dots, \varepsilon_{in_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (3)$$

并把它们合并起来成为 V 的一组基 I .

问: \mathcal{A} 在这组基下的矩阵?

A 的矩阵具有准对角形状
$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中 $A_i (i=1, 2, \dots, s)$ 就是 $A|_{W_i}$ 在基 (3) 下的矩阵。

反之，如果线性变换 A 在基 I 下的矩阵是准对角形 (4)，
则由 (3) 生成的子空间 W_i 是 A -子空间。

由此可知，矩阵分解为准对角形与空间分解为
不变子空间的直和是相当的。

七、空间的分解

定理 12 设线性变换 A 的特征多项式为 $f(\lambda)$

它可分解成一次因式的乘积

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}.$$

则 V 可分解成不变子空间的直和

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s,$$

其中 $V_i = \{ \xi \mid (A - \lambda_i E)^{r_i} \xi = 0, \xi \in V \}.$

称 V_i 为线性变换 A 的属于特征值 λ_i 的根子空间, 记为 V^{λ_i}

小结和作业

1. 不变子空间的定义及其判断的方法?
2. 特征向量与一维不变子空间的关系?
3. A 在不变子空间上引起的变换与整个空间的线性变换的关系?
4. 子空间为 A -子空间的充要条件?
5. 不变子空间与矩阵化简之间的关系?

作业见习题册: 274,277