

第六节 实对称矩阵的标准形

主要内容

- 问题的提出
- 实对称矩阵的性质
- 主要结论
- 正交矩阵的求法
- 举例
- 正交的线性替换

一、问题的提出

在第五章得，任意一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵，换句话说，都有一个可逆矩阵 C 使

$$C^T A C$$

成对角形。在这一节，我们将利用欧氏空间的理论把第五章中关于实对称矩阵的结果进行加强，这就是这一节要解决的主要问题：

对于任意一个 n 级实对称矩阵 A ，都存在一个 n 级正交矩阵 T ，使

$$T^T A T = T^{-1} A T$$

成对角形。

先讨论对称矩阵的一些性质，它们本身在今后也是非常有用的。把它们归纳成下面几个引理

二、实对称矩阵的性质

引理 1 设 A 是实对称矩阵，则 A 的特征值都是实数。

证明 设 λ_0 是 A 的特征值，于是有非零向量

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

满足 $A\xi = \lambda_0 \xi$.

令

$$\overline{\xi} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix},$$

其中 \overline{x}_i 是 x_i 的共轭复数, 则 $A\xi = \lambda_0 \xi$.

考察等式

$$\overline{\xi}^T (A\xi) = \overline{\xi}^T A^T \xi = (A \overline{\xi})^T \xi = (\overline{A \xi})^T \xi,$$

其左边为 $\lambda_0 \overline{\xi}^T \xi$, 右边为 $\overline{\lambda_0 \xi}^T \xi$. 故

$$\lambda_0 \overline{\xi}^T \xi = \overline{\lambda_0 \xi}^T \xi.$$

又因为 ξ 是非零向量,

$$\bar{\xi}^T \xi = \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \dots + \bar{x}_n x_n \neq 0.$$

故 $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$, 即 λ_0 是一个实数.

证毕

对应于实对称矩阵 A ，在 n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n 上

定义一个线性变换 A

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

显然 A 在标准正交基

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

下的矩阵就是 A 。

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

下的矩阵就是 A .

引理 2 设 A 是实对称矩阵, A 的定义如上
则对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, 有

$$(A\alpha, \beta) = (\alpha, A\beta), \quad (3)$$

或
$$\beta^T (A\alpha) = \alpha^T A\beta.$$

证明 只要证明后一等式即可。实际上

$$\begin{aligned}\beta^T (A\alpha) &= \beta^T A^T \alpha = (A\beta)^T \alpha \\ &= \alpha^T (A\beta).\end{aligned}$$

证毕

等式 (3) 把实对称矩阵的特性反映到线性变换上。

引入下述概念：

定义 12 欧氏空间中满足：对于 V 中任意的 α, β

$(A\alpha, \beta) = (\alpha, A\beta)$ 的线性变换称为**对称变换**。

容易看出，对称变换在标准正交基下的矩阵是实对称矩阵。用对称变换来反映实对称矩阵，一些性质可以看得更清楚。

引理 3 设 A 是对称变换， V_1 是 A -子空间，则 V_1^\perp 也是 A -子空间。

证明 设 $\alpha \in V_1^\perp$, 要证 $A\alpha \in V_1^\perp$, 即
 $A\alpha \perp V_1$. 任取 $\beta \in V_1$, 都有 $A\beta \in V_1$. 因为
 $\alpha \perp V_1$, 故 $(\alpha, A\beta) = 0$.

因此

$$(A\alpha, \beta) = (\alpha, A\beta) = 0$$

即 $A\alpha \perp V_1$, $A\alpha \in V_1^\perp$, V_1^\perp 也是 A -子空间.

证毕

引理 4 设 A 是实对称矩阵, 则 \mathbb{R}^n 中属于 A 的不同特征值的特征向量必正交.

证明 设 λ, μ 是 A 的两个不同的特征值, α, β 分别是属于 λ, μ 的特征向量, 即

$$A\alpha = \lambda\alpha, \quad A\beta = \mu\beta.$$

由 $(A\alpha, \beta) = (\alpha, A\beta)$, 有

$$\lambda(\alpha, \beta) = \mu(\alpha, \beta).$$

因为 $\lambda \neq \mu$, 所以 $(\alpha, \beta) = 0$. 即 α, β 正交.

证毕

三、主要结论

定理 7 对于任意一个 n 级实对称矩阵 A ,
都存在一个 n 级正交矩阵 T , 使 $T^T A T$ 成对角形.

证明 由于实对称矩阵和对称变换的关系, 只要证明对称变换 A 有 n 个特征向量构成标准正交基即可.

对空间的维数 n 作归纳法.


$n = 1$, 显然定理的结论成立.

设 $n-1$ 时定理的结论成立. 对 n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n 线性变换 A 有一特征向量 α_1 , 其特征值为实数 λ_1 . 把 α_1 单位化, 还用 α_1 代表它. 作 $L(\alpha_1)$ 的正交补, 设为 V_1 . 由引理 3 $\Rightarrow V_1$ 是 A 的不变子空间, 其维数为 $n-1$. 又 $A|_{V_1}$ 显然也满足 (3) \Rightarrow 仍是对称变换. 据归纳假设, $A|_{V_1}$ 有 $n-1$ 个特征向量 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 构成 V_1 的标准正交基. 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的标准正交基, 又是 A 的 n 个特征向量. 定理得证.

证毕



四、正交矩阵的求法

下面来看看在给定一个实对称矩阵 A 之后，按什么办法求正交矩阵 T 使 $T^T A T$ 成对角形。在定理的证明中我们看到，矩阵 A 按 (1)  式在 R^n 中定义了一个线性变换。求正交矩阵 T 问题就相当于在 R^n 中求一组由 A 的特征向量构成的标准正交基。事实上，设

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \eta_n = \begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{pmatrix}$$

是 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基，它们都是 A 的特征向量。

显然，由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过渡矩

是

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

T 是一个正交矩阵，而 $T^{-1}AT = T^TAT$ 就是对角形。

根据上面的讨论，求正交矩阵 T 的步骤如下：

STEP 1 求出 A 的特征值。设 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 是 A 的全部不同的特征值。

STEP 2 对于每个 λ_i ，解齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

求出一个基础解系，这就是 A 的特征子空间 V_{λ_i} 的一组基。由这组基出发，按 **定理 2** 的方法求出 V_{λ_i} 的一组标准正交基 $\eta_{i1}, \dots, \eta_{ik_i}$ 。

STEP 3 因为 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 两两不同，所以根据这一节 **引理 4** 向量组

$$\eta_{11}, \dots, \eta_{1k_1}, \dots, \eta_{r1}, \dots, \eta_{rk_r}$$

还是两两正交的。又根据 **定理 7** 以及第七章第五节的讨论，它们的个数就等于空间的维数。因此，它们就构成 \mathbb{R}^n 的一组标准正交基，并且也都

是 A 的特征向量。这样，正交矩阵 T 也就求出了。

五、举例

例 1 已知

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

求一正交矩阵 T 使 $T^T A T$ 成为对角形。

先求 A 的特征值.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

[单击这里求解](#)

$$(\lambda - 1)^3 (\lambda + 3).$$

所以 A 的特征值为:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -3.$$

其次，求属于 1 的特征向量。把 $\lambda = 1$ 代入

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + \lambda x_4 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

[单击这里求解](#)

求得基础解系为

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \\ \alpha_2 = (1, 0, 1, 0), \\ \alpha_3 = (-1, 0, 0, 1). \end{cases}$$

把它正变化，得

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \\ \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0 \right), \\ \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right). \end{array} \right.$$

再单位化，得

$$\begin{cases} \eta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \\ \eta_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0 \right), \\ \eta_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}} \right). \end{cases}$$

这是属于三重特征值 1 的三个标准正交的特征向量。

再求属于 -3 的特征向量。用 $\lambda = -3$ 代入 (4)

得

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + -3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \end{cases}$$

[单击这里求解](#)

求得基础解系为

$$(1, -1, -1, 1).$$

把它单位化，得

$$\eta_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

特征向量 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 构成 \mathbb{R}^4 的一组标准正交基

所求的正交矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

而 $T^T A T = \text{diag}(1, 1, 1, -3)$.

例 2 設 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

求正交矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

应该指出，在 **定理 7**  中，对于正交矩阵 T

还可以进一步要求

$$|T| = 1.$$

事实上，如果求得的正交矩阵 T 的行列式为 -1 ，

那么取

$$S = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

令

$$T_1 = TS,$$

則 T_1 是正交矩陣，而且

$$|T_1| = |T||S| = 1.$$

顯然

$$T_1^T A T_1 = T^T A T.$$

六、正交的线性替换

如果线性替换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

的矩阵 $C = (c_{ij})$ 是正交的，那么它就称为 **正交的线性替换**。正交的线性替换当然是非退化的。

用二次型的语言，定理 7 可以叙述为：

定理 8 任意一个实二次型

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

都可以经过正交的线性替换变成平方和

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

其中平方项的系数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 就是矩阵 A 的特征多项式全部的根。

七、二次曲面的化简

最后我们指出，这一节的结果可以应用到几何上化简直角坐标系下二次曲面的方程，以及讨论二次曲面的分类。

在直角坐标系下，二次曲面的一般方程是

$$\begin{aligned} & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ & + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + d = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

则 (5) 式可以写成

$$X^T A X + 2B^T X + d = 0. \quad (6)$$

经过转轴，坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \text{或者 } X = CX_1.$$

其中 C 为正交矩阵且 $|C|=1$. 在新坐标系中, 曲面的方程就是

$$X_1^T(C^TAC)X_1 + 2(B^TC)X_1 + d = 0.$$

根据上面的结果, 有行列式为 1 的正交矩阵 C 使

$$C^TAC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

这就是说，可以作一个转轴，使曲面在新坐标系中的方程为

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + 2b_1^* x_1 + 2b_2^* y_1 + 2b_3^* z_1 + d = 0,$$

其中

$$(b_1^*, b_2^*, b_3^*) = (b_1, b_2, b_3)C.$$

这时，再按照 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是否为零的情况，作适当的移轴与转轴就可以把曲面的方程化成标准方程。

比如说，当 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 全不为零时，就作移轴

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - \frac{b_1^*}{\lambda_1}, \\ y_1 = y_2 - \frac{b_2^*}{\lambda_2}, \\ z_1 = z_2 - \frac{b_3^*}{\lambda_3}. \end{cases}$$

于是曲面的方程化为

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + d^* = 0,$$

其中

$$d^* = d - \frac{b_1^{*2}}{\lambda_1} - \frac{b_2^{*2}}{\lambda_2} - \frac{b_3^{*2}}{\lambda_3}.$$



例 3 把下列二次曲面的方程化为标准形，并

确定曲面的形状。

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz \\ - 6x + 6y - 6z + 10 = 0.\end{aligned}$$

方程中的二次型部分的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

下面来求正交矩阵 C , 使 $C^T A C$ 成对角形. 先求 A 的特征值.

[单击这里求特征多项式](#)

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (6-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2), \end{aligned}$$

所以 A 的三个特征值为:

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

当 $\lambda_1 = -2$ 时, 解方程组 $(A - \lambda_1 E)x = 0$,

即
$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

[单击这里求解](#)

得
$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_2 = 3$ 时, 解方程组 $(A - \lambda_2 E)x = 0$,

即
$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

[单击这里开始求解](#)

得

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

当 $\lambda_3 = 6$ 时, 解方程组 $(A - \lambda_3 E)x = 0$,

即

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

单击这里开始求解

得

$$p_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

显然, p_1, p_2, p_3 两两正交, 现把它们单位化.

$$\text{令 } e_1 = \frac{1}{\|p_1\|} p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \frac{1}{\|p_2\|} p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \frac{1}{\|p_3\|} p_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

再令 $C = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$

则 C 为正交矩阵, 且有

$$C^{-1}AC = \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{pmatrix}.$$

由于 $(-3, 3, -3)$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$
$$= (0, -3\sqrt{3}, 0).$$

所以作转轴 $X = CX_1$ 后, 曲面

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz \\ - 6x + 6y - 6z + 10 = 0 \end{aligned}$$

在新坐标系中的方程就是

$$-2x_1^2 + 3y_1^2 + 6z_1^2 - 6\sqrt{3}y_1 + 10 = 0.$$

变形得

$$2x_1^2 - 3(y_1 - \sqrt{3})^2 - 6z_1^2 = 1.$$

最后作移轴

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2 + \sqrt{3}, \\ z_1 = z_2. \end{cases}$$

于是曲面的方程就化成标准方程：

$$2x_2^2 - 3y_2^3 - 6z_2^2 = 1.$$

由此可知，方程所表示的曲面为双叶双曲面。