

## 第九章 欧几里得空间

欧氏空间是许多后继课程的基础,例如实变函数中的**测度概念**、泛函分析中的**度量空间**和**赋范空间**、拓扑学中的**拓扑空间**等,都是欧式空间的基础上按照学科各自的理论与方法形成的.因此,欧氏空间是学习实变函数、泛函分析等课程的重要基础.欧式空间以几何空间为简单的模型,用其理论与方法去分析初等几何的全等、解析几何中的坐标变换方法的基本原理,有助于提高对这些知识本质的认识,为今后从事中学数学教学储备必要的基础理论基础.

### 9.1 定义与基本性质

教学的时间:\*\*\*\*年 月 日

教学学时数:2 学时

#### 一、教学目标

1. 了解欧式空间的定义形成的背景,理解欧式空间的定义.
2. 掌握向量的长度计算与向量之间夹角的确定.
3. 掌握柯西-布涅科夫斯基不等式的应用.

#### 二、教学重点

内积的定义

#### 三、教学难点

内积的定义、柯西-布涅科夫斯基不等式的证明

#### 四、教学过程

##### (一)内积

##### 1. 内积的定义

定义1 设 $V$ 是**实数域** $R$ 上一个线性空间,在 $V$ 上定义了一个**二元实函数**,称为内积,记作 $(\alpha, \beta)$ ,它具有以下性质:

- 1)  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ ;
- 2)  $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$ ;
- 3)  $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$ ;
- 4)  $(\alpha, \alpha) \geq 0$ , 当且仅当 $\alpha = 0$ 时,  $(\alpha, \alpha) = 0$ .

这里 $\alpha, \beta, \gamma$ 是 $V$ 任意的向量,  $k$ 是任意实数,这样的线性空间 $V$ 称为**欧几里得空间**.欧几里得空间以下简称为**欧氏空间**.

几何空间中向量的内积显然也适合定义中列举的性质,所以几何空间中向量的全体构成一个欧几里得空间.

## 2. 内积的举例

例 1 在线性空间  $R^n$  中, 对于向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

定义内积

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (1)$$

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + \dots + na_n b_n. \quad (1)'$$

求内积(1)、(1)'定义的内积,  $R^n$  能否成为一个欧几里得空间?

例 1 说明: 对同一个线性空间可以引入不同的内积, 使得它作成欧几里得空间.

在  $n=3$  时, (1) 式就是几何空间中的向量的内积在直角坐标系中的坐标表达式.

例 2 在闭区间  $[a, b]$  上的所有实连续函数所成的空间  $C(a, b)$  中, 对于函数  $f(x), g(x)$  定义内积

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (2)$$

对于内积(2),  $C(a, b)$  能否构成一个欧几里得空间?

同样地, 线性空间  $R[x], R[x]_n$  对于内积(2)也构成欧几里得空间.

## 3. 内积的性质

1) 定义中条件 1) 表明内积是对称的.

2')  $(\alpha, k\beta) = (k\beta, \alpha) = k(\alpha, \beta) = k(\beta, \alpha)$ .

3')  $(\alpha, \beta + \gamma) = (\beta + \gamma, \alpha) = (\beta, \alpha) + (\gamma, \alpha) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma)$ .

由条件 4) 有  $(\alpha, \alpha) \geq 0$ . 所以对于任意的向量  $\alpha$ ,  $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$  是有意义的. 在几何空间中, 向量  $\alpha$  的长度为  $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$ , 类似地, 定义欧式空间中的向量的长度.

### (二) 长度

#### 1. 长度的定义

定义 2 非负实数  $\sqrt{(\alpha, \alpha)}$  称为向量  $\alpha$  的长度, 记为  $|\alpha|$ .

显然, 向量的长度一般是正数, 只有零向量的长度才是零.

## 2. 长度的性质

**性质 1** 设任取  $k \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha \in V$ , 则有  $|k\alpha| = ?$

因为  $|k\alpha| = \sqrt{(k\alpha, k\alpha)} = \sqrt{k^2(\alpha, \alpha)} = |k||\alpha|$ , 所以

$$|k\alpha| = |k||\alpha| \quad (3)$$

**例 3** 通常情况下定义的内积, 计算向量  $\alpha = (2, 1, 4, -2)$ ,  $3\alpha$ ,  $\frac{\alpha}{5}$  的长度?

长度为 1 的向量叫做**单位向量**.

**性质 2** 如果,  $\alpha \neq 0$  由(3)式, 向量  $\frac{1}{|\alpha|}\alpha$  是不是单位向量?

用向量  $\alpha$  的长度  $|\alpha|$  去除向量  $\alpha$ , 得一个与  $\alpha$  成比例的单位向量, 通常称为**把  $\alpha$  单位化**.

在解析几何中, 向量  $\alpha, \beta$  的夹角  $\langle \alpha, \beta \rangle$  的余弦可以通过内积来表示

$$\cos \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}. \quad (4)$$

为了在一般的欧几里得空间中利用(4)式引入夹角的概念, 需证明不等式  $\left| \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} \right| \leq 1$ .

**性质 3 柯西-布涅柯夫斯基不等式** 对于任意的向量  $\alpha, \beta$  有

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta| \quad (5)$$

当且仅当  $\alpha, \beta$  线性相关时, 等式才成立.

其证明分  $\beta$  等于 0 与不等于 0 两种情形来证.

### 性质 4 两个著名的不等式

对于例 1 中的 (1) 定义的内积, 在欧式空间  $R^n$  中,  $|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|$  就是

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

对于例 2 的空间  $C(a, b)$ ,  $|(f(x), g(x))| \leq |f(x)||g(x)|$  就是

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left( \int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

### (三) 夹角

#### 1. 夹角的定义

定义 3 非零向量  $\alpha, \beta$  的夹角  $\langle \alpha, \beta \rangle$  规定为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}, \quad 0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle \leq \pi$$

#### 2. 三角不等式

在几何空间中对于任意的向量  $\alpha, \beta$  有

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \quad (7)$$

问: (7) 式在欧式空间中的向量是否成立?

因为  $|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta)$

$$\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2, \quad \text{所以 } |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

例 4 通常情况下定义的内积, 计算下列向量的长度、这两个向量的内积、夹角, 以及验证  $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ , 其中  $\alpha = (1, 1, 1, 1), \beta = (-1, 2, -4, 3)$ .

#### 3. 正交

定义 4 若向量  $\alpha, \beta$  的内积为零, 即  $(\alpha, \beta) = 0$ , 则  $\alpha, \beta$  称为正交或互相垂直, 记为  $\alpha \perp \beta$ .

两个非零向量正交的充要条件是它们的夹角为  $\frac{\pi}{2}$ . 只有零向量才与自己正交.

在几何空间中, 有勾股定理, 当  $\alpha, \beta$  正交时,  $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ . 在欧式空间中是否成立?

在欧式空间中,  $|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2(\alpha, \beta)$ .

在欧式空间中, 当  $\alpha, \beta$  正交时,  $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ .

推广: 若向量两  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  两两正交, 则

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_m|^2.$$

#### (四) 度量矩阵

以上讨论中, 对线性空间的维数没有作限制, 从现在开始假定空间是有限维的.

设  $V$  是一个  $n$  维欧几里得空间, 在  $V$  中取一组基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , 对于  $V$  中任意两个向量

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n, \quad \beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \dots + y_n\varepsilon_n,$$

由内积的性质得

$$(\alpha, \beta) = (x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n, y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \dots + y_n\varepsilon_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\varepsilon_i, \varepsilon_j) x_i y_j$$

令

$$a_{ij} = (\varepsilon_i, \varepsilon_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

显然  $a_{ij} = a_{ji}$ .

于是

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad (9)$$

利用矩阵,  $(\alpha, \beta)$  还可以写成

$$(\alpha, \beta) = X'AY, \quad (10)$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

分别是  $\alpha, \beta$  的坐标, 而矩阵  $A = (a_{ij})_{nn}$  称为基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  的度量矩阵.

上面的讨论表明, 在知道了一组基的度量矩阵之后, 任意两个向量的内积就可以通过坐标按 (9) 或 (10) 来计算, 因而度量矩阵完全确定了内积.

设  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  是空间  $V$  的另外一组基, 而由  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  到  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的过渡矩阵为

$C$ , 即  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)C$

可以证明: 基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的度量矩阵

$$B = (b_{ij}) = (\eta_i, \eta_j) = C'AC. \quad (11)$$

(其证明过程留着作为作业也就是课本 P390ex11 (1))

这就是说, 不同基的度量矩阵是合同的.

根据条件(4), 对于非零向量  $\alpha$ , 即  $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  有  $(\alpha, \alpha) = X'AX > 0$

因此, 度量矩阵是正定的.

反之, 给定一个  $n$  级正定矩阵  $A$  及  $n$  维实线性空间  $V$  的一组基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ . 可以规定  $V$  上内积, 使它成为欧几里得空间, 并且基的  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  度量矩阵是  $A$ .

欧几里得空间的子空间在所定义的内积之下显然也是一个欧几里得空间.

**例 5** 在 4 维欧氏空间中, 设基

$\alpha_1 = (1, 1, -1, -1), \alpha_2 = (1, 1, 1, 0), \alpha_3 = (-1, 1, 1, 1), \alpha_4 = (1, 0, 0, -1)$ , 求该基下的度量矩阵

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 求在另一组基  $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$

下的度量矩阵  $B$ ? 并验算是否符号(11)式? 求向量  $\beta_1 = (1, -1, 1, -1), \beta_2 = (0, 1, 1, 0)$  的内积?

## 五、小结

1. 叙述欧式空间、度量矩阵的定义;
2. 如何确定向量的长度与向量的夹角的确定;
3. 柯西-布涅科夫斯基不等式的两个重要应用.
4. 思考度量矩阵为哪种矩阵比较简单方便?

## 六、作业 (课本 P390ex11 (1))

## 七、教学反思

## 9.2 标准正交基

教学的时间: \*\*\*\*年 月 日

教学学时数: 2 学时

### 一、教学目标

1. 掌握标准正交基的概念和求法.
2. 理解标准正交基的作用.

### 二、教学重点

标准正交基的概念, 向量组正交化的方法

### 三、教学难点

向量组正交化的方法

### 四、教学过程

#### (一) 标准正交基

##### 1. 正交向量组的定义

**定义 5** 欧氏空间  $V$  的一组非零的向量, 如果它们两两正交, 就称为一个正交向量组.

按定义, 由单个非零向量所成的向量组也是正交向量组.

**例 1** 判断向量组  $\xi_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$ ,  $\xi_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)$ ,  $\xi_3 = (-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}})$ ,

$\xi_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  是不是正交向量组?

##### 2. 正交向量组的性质: 正交向量组是线性无关的.

(这说明在  $n$  维欧氏空间中, 两两正交的非零向量不能超过  $n$  个.)

**证明** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是正交向量组,  $k_1, k_2, \dots, k_m$  是  $m$  个实数, 且有  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ .

用  $\alpha_i$  与等式两边作内积, 得  $k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0$ .

由  $\alpha_i \neq 0$ , 有  $(\alpha_i, \alpha_i) > 0$ , 从而  $k_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

##### 3. 正交基的定义

**定义 6** 在  $n$  维欧氏空间中, 由  $n$  个向量组成的正交向量组称为正交基; 由单位向量组成的正交基称为标准正交基组.

**例**, 例 1 的向量  $\xi_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$ ,  $\xi_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)$ ,  $\xi_3 = (-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}})$ ,

$\xi_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  能否作为  $\mathbb{R}^4$  的一组标准正交基?

#### 4. 正交基的性质

**性质 1** 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是一组标准正交基, 于是

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j; \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

显然, (1)式完全刻画了标准正交基的性质.

换句话说, **一组基为标准正交基的充要条件是: 它的度量矩阵为单位矩阵.**

因为度量矩阵是正定矩阵的, 正定矩阵合同于单位矩阵. 这说明在  $n$  维欧氏空间中存在一组基, 它的度量矩阵是单位矩阵. 由此断言, **在  $n$  维欧氏空间中, 标准正交基是存在的.**

**性质 2** 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  欧式空间的一组标准正交基, 任意的向量  $\alpha$ , 则

$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n$ ,  $\alpha$  的坐标可以通过内积简单地表示出来, 即

$$\alpha = (\varepsilon_1, \alpha)\varepsilon_1 + (\varepsilon_2, \alpha)\varepsilon_2 + \dots + (\varepsilon_n, \alpha)\varepsilon_n. \quad (2)$$

这是因为  $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n$ , 用  $\varepsilon_i$  与等式两边作内积, 即得

$$x_i = (\varepsilon_i, \alpha), i = 1, 2, \dots, n.$$

**性质 3** 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  欧式空间的一组标准正交基, 在该标准正交基下, 内积的简单表达式如何求?

设

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n.$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \dots + y_n\varepsilon_n.$$

那么

$$(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = X^T Y. \quad (3)$$

这个表达式正是几何中向量的内积在直角坐标系中坐标表达式的推广.

应该指出, 内积的表达式(3), 对于任一组标准正交基都是一样的. 这说明了, 所有的标准正交基, 在欧氏空间中有相同的地位.

#### (二) 求正交基的方法

**问题 1**  $n$  维欧氏空间中任一个正交向量组都能否扩充成一组标准正交基?

**定理 1**  $n$  维欧氏空间中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基.

**证明** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  是一正交向量组, 对  $n-m$  作数学归纳法证明.

当  $n-m=0$  时,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  已经是一正交基.

假设  $n-m=k$  时, 命题成立. 也就是可以找到  $k$  个向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  使得

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  成为一组正交基.

下证  $n-m=k+1$  时, 命题成立. 因为  $m < n$ , 所以一定存在一个向量  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出, 作向量  $\alpha_{m+1} = \beta - k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$ , 其中  $k_1, k_2, \dots, k_m$  是待定系数.

$$(\alpha_i, \alpha_{m+1}) = (\alpha_i, \beta) - k_i(\alpha_i, \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{取 } k_i = \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ 有 } (\alpha_i, \alpha_{m+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

此时  $\alpha_{m+1} \neq 0$ , 若不然  $\beta$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出. 因此, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$  是组正交组. 此时, 仅需在  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$  中添加  $n-(m+1)=k$  向量扩充为一正交基.

以上表明, 定理的证明实际上也就给出了一个具体的扩充正交向量组的方法. 如果从任一个非零向量出发, 按证明中的步骤逐个地扩充, 最后就得到一组正交基. 再单位化, 就得到一组标准正交基.

**问题 2** 欧氏空间中任意一组基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , 如何求其正交基?

**定理 2**  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是欧氏空间中任意一组基, 可以找到一组标准正交基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  使

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**证明** 设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是一组, 下面将逐个求  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ .

首先, 可以取  $\eta_1 = \frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_1|}$ . 假定已经求出  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ , 而且它们是单位正交的, 具有性

质  $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$

下一步将求  $\eta_{m+1}$ . 因为  $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ , 所以  $\varepsilon_{m+1}$  不能被  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$  线性表出. 作向量  $\xi_{m+1} = \varepsilon_{m+1} - \sum_{i=1}^m (\varepsilon_{m+1}, \eta_i) \eta_i$ . 于是  $\xi_{m+1} \neq 0$ , 且  $(\xi_{m+1}, \eta_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$

令  $\eta_{m+1} = \frac{\xi_{m+1}}{|\xi_{m+1}|} \cdot \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \eta_{m+1}$  是一组单位正交组.

同时  $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m+1}) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+1})$ , 由归纳法原理, 定理 2 得证.

这说明定理 2 的要求

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

就相当于由基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  到基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的过渡矩阵是上三角形的.

定理 2 中把一组线性无关的向量变成一单位正交向量组的方法称为施密特 (Schmidt) 正交化过程.

例 2 把  $\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (-1, 3, 1), \alpha_3 = (4, -1, 0)$  变成单位正交组.

### (三) 正交矩阵

上面讨论了标准正交基的求法. 由于标准正交基在欧氏空间中占有特殊的地位, 所以有必要来讨论从一组标准正交基到另一组标准正交基的基变换公式.

设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  与  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  是欧氏空间  $V$  中的两组标准正交基, 它们之间的过渡矩阵是  $A = (a_{ij})$ , 即

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

因为  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  是标准正交基, 所以

$$(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j; \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \quad (4)$$

矩阵  $A$  的各列就是  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  在标准正交基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  下的坐标. 按公式(3),(4)式可以表示为

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j; \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \quad (5)$$

(5)式相当于一个矩阵的等式

$$A'A = E \quad (6)$$

或者

$$A^{-1} = A'$$

定义 7  $n$  阶实数矩阵  $A$  称为正交矩阵, 如果  $A'A = E$ .

由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵; 反过来, 如果第一组基是标准正交基, 同时过渡矩阵是正交矩阵, 那么第二组基一定也是标准正交基.

最后指出, 根据逆矩阵的性质, 由

$$A'A = E$$

即得

$$AA' = E$$

写出来就是

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \cdots + a_{in}a_{jn} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j; \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases} \quad (7)$$

(5)式是矩阵列与列之间的关系, (7)式是矩阵行与行之间的关系. 这两组关系是等价的.

例 3 求由标准正交基  $\beta_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ ,  $\beta_2 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ,  $\beta_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  到

标准正交基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  的过渡矩阵?

例 4 考虑定义在闭区间  $[0, 2\pi]$  上一切连续函数所作成的欧氏空间  $C[0, 2\pi]$ . 函数组

$$1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

构成  $C[0, 2\pi]$  的一个正交组.

把上面的每一向量除以它的长度, 就得到  $C[0, 2\pi]$  的一个标准正交组:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \cdots$$

例 5 欧氏空间  $R^n$  的基

$$\varepsilon_i = (0, \cdots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \cdots, 0), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

是  $R^n$  的一个标准正交基.

## 五、小结

1. 叙述正交组及其性质、标准正交基的概念;
2. 如何把已知向量组正交化?

## 六、作业 (课本 P389ex4, 6, 8)

## 七、教学反思

## 9.3 同构

教学的时间: \*\*\*\*年 月 日

教学学时数:1 学时

### 一、教学目标

1. 理解两个欧氏空间同构的定义及其意义。
2. 掌握两个欧氏空间同构与空间维数之间的关系。

### 二、教学重点

1. 欧氏空间同构的定义。
2. 两个欧氏空间同构与空间维数之间的关系。

### 三、教学难点

欧氏空间同构的定义

### 四、教学过程

#### (一) 同构的定义

**定义 8** 实数域  $R$  上欧氏空间  $V$  与  $V'$  称为**同构的**,如果由  $V$  到  $V'$  有一个双射  $\sigma$ , 满足

$$1) \sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta),$$

$$2) \sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha),$$

$$3) (\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta),$$

这里  $\alpha, \beta \in V, k \in R$ , 这样的映射  $\sigma$  称为  $V$  到  $V'$  的**同构映射**.

由定义, 如果  $\sigma$  是欧氏空间  $V$  到  $V'$  的一个同构映射, 那么也是  $V$  到  $V'$  作为线性空间的同构映射.因此, **同构的欧氏空间必有相同的维数**.

设  $V$  是一个  $n$  维欧氏空间, 在  $V$  中取一组标准正交基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , 在这组基下,  $V$  的每个向量  $\alpha$  都可表成

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n$$

令

$$\sigma(\alpha) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$$

就是  $V$  到  $R^n$  的一个双射, 并且适合定义中条件 1), 2).上一节(3)式说明,  $\sigma$  也适合条件 3),

因而  $\sigma$  是  $V$  到  $R^n$  的一个同构映射, 由此可知, **每个  $n$  维的欧氏空间都与  $R^n$  同构**.

## (二) 同构的性质

### 1. 同构作为欧氏空间之间的关系具有反身性、对称性与传递性.

**反身性:**每个欧氏空间到自身在恒等映射满足欧氏空间同构映射的条件, 因此, 欧氏空间同构映射具有反身性.

**对称性:**设 $\sigma$ 是欧氏空间 $V$ 与 $V'$ 的同构映射, 因此,  $\sigma^{-1}$ 是欧氏空间 $V'$ 到 $V$ 的双射, 而且满足条件(1), (2), 对于 $\forall \alpha, \beta \in V'$ ,  $(\alpha, \beta) = (\sigma\sigma^{-1}(\alpha), \sigma\sigma^{-1}(\beta)) = (\sigma^{-1}(\alpha), \sigma^{-1}(\beta))$ .

$\sigma^{-1}$ 是 $V$ 到 $V'$ 的同构映射, 因此, 欧氏空间同构映射具有对称性.

**传递性:**易证欧氏空间同构映射具有对称性.

既然每个 $n$ 维欧氏空间都与 $R^n$ 同构, 按对称性与传递性得, 任意两个 $n$ 维欧氏空间都同构.

**2. 定理 3** 两个有限维欧氏空间同构 $\Leftrightarrow$ 它们的维数相等.

这个定理说明, 从抽象的观点看, 欧氏空间的结构完全被它们的维数决定.

## 五、小结

1. 请叙述欧氏空间同构的定义。
2. 两个欧氏空间同构与空间维数之间的关系

## 六、作业 (习题册)

## 七、教学反思

## 9.4 正交变换

教学的时间: \*\*\*\*年 月 日

教学学时数: 学时

### 一、教学目标

1. 掌握正交变换的概念.
2. 掌握正交变换与正交矩阵的性质及其关系.

### 二、教学重点

正交变换与标准正交基的关系.

### 三、教学难点

正交变换的分类

### 四、教学过程

#### (一) 正交变换的概念

**定义 9** 欧氏空间  $V$  的线性变换  $\mathcal{A}$  叫做一个正交变换, 如果它保持向量的内积不变, 即对任意的, 都有  $\alpha, \beta \in V$ , 都有

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta).$$

正交变换可以从几个不同方面公平加以刻画.

#### (二) 正交变换的性质

**定理 4** 设  $\mathcal{A}$  是欧氏空间的一个线性变换, 于是下面四个命题是相互等价的:

- 1)  $\mathcal{A}$  是正交变换;
- 2)  $\mathcal{A}$  保持向量的长度不变, 即对于  $\alpha \in V, |\mathcal{A}\alpha| = |\alpha|$ ;
- 3) 如果  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  是标准正交基, 那么  $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \dots, \mathcal{A}\varepsilon_n$  也是标准正交基;
- 4)  $\mathcal{A}$  在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

**问:** 1. 正交矩阵是不是可逆变换的?

2. 正交变换是不是欧氏空间的同构映射的?

3. 正交变换的乘积与正变换的逆变换是不是正交变换?

因为正交矩阵是可逆的, 所以正交变换是可逆的. 由定义看出, 正交变换实际上就是一个欧氏空间到自身的同构映射, 因而正交变换的乘积与正变换的逆变换还是正交变换.

在标准正交基下, 正交变换与正交矩阵对应, 因此, 正交变换的乘积与正交矩阵的逆矩阵也是正交矩阵.

### (三) 正交变换的分类

如果  $A$  是正交矩阵, 那么由

$$AA' = E$$

可知

$$|A|^2 = 1 \text{ 或者 } |A| = \pm 1.$$

因此, 正交变换的行列式等于+1 或-1. 行列式等于+1 的正交矩阵通常称为旋转, 或者称为第一类的; 行列式等于-1 的正交变换称为第二类的.

**例 1** 在欧氏空间中任取一组标准正交基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , 定义线性变换  $\mathcal{A}$  为:

$$\mathcal{A}\varepsilon_1 = -\varepsilon_1, \quad \mathcal{A}\varepsilon_i = \varepsilon_i, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

求证:  $\mathcal{A}$  就是一个第二类的正交变换. (从几何上看, 这是一个镜面反射.)

**例 2** 设  $\sigma \in L(R^3)$ , 令  $\sigma(\xi) = (x_2, x_3, x_1)$ ,  $\forall \xi = (x_1, x_2, x_3) \in V_3$ . 则  $\sigma$  是  $R^3$  的一个正交变换. 该变换是第几类的的正交变换?

**例 3** 将  $V_2$  的每一向量旋转一个角  $\varphi$  的正交变换关于  $V_2$  的任意标准正交基的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

## 五、小结

1. 请叙述正交变换的概念.
2. 请叙述正交变换与正交矩阵的性质及其关系.

## 六、作业 (习题册) 课本 p391 页 ex15

## 七、教学反思

## 9.5 子空间

教学的时间: \*\*\*\*年 月 日

教学学时数: 学时

### 一、教学目标

1. 掌握子空间的正交的概念.
2. 欧式空间正交分解的原理.

### 二、教学重点

欧式空间正交分解的原理

### 三、教学难点

欧式空间正交分解的原理

### 四、教学过程

#### (一) 子空间的正交的概念

**定义 10** 设  $V_1, V_2$  是欧氏空间  $V$  中两个子空间. 若对于任意的  $\alpha \in V_1, \beta \in V_2$ , 恒有  $(\alpha, \beta) = 0$ , 则称  $V_1, V_2$  为正交的, 记为  $V_1 \perp V_2$ .

一个向量  $\alpha$ , 若对于任意的  $\beta \in V_1$ , 恒有  $(\alpha, \beta) = 0$  则称  $\alpha$  与子空间  $V_1$  正交, 记为  $\alpha \perp V_1$ .

因为只有零向量与它自身正交, 所以由  $V_1 \perp V_2$  可知  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ; 由  $\alpha \perp V_1, \alpha \in V_1$  可知  $\alpha = 0$ .

#### (二) 欧式空间正交分解的原理

**定理 5** 如果子空间  $V_1, V_2, \dots, V_s$  两两正交, 那么和  $V_1 + V_2 + \dots + V_s$  是直和.

**定义 11** 子空间  $V_2$  称为子空间  $V_1$  的一个正交补, 如果  $V_1 \perp V_2$ , 并且  $V_1 + V_2 = V$ .

显然, 如果  $V_2$  是  $V_1$  的正交补, 那么  $V_1$  也是  $V_2$  的正交补.

**定理 6**  $n$  维欧氏空间  $V$  的每一个子空间  $V_1$  都有唯一的正交补.

$V_1$  的正交补记为  $V_1^\perp$ , 由定义可知:  $\dim(V_1) + \dim(V_1^\perp) = n$

**推论**  $V_1^\perp$  恰由所有与  $V_1$  正交的向量组成.

由分解式  $V = V_1 \oplus V_1^\perp$  可知,  $V$  中任一向量  $\alpha$  都可以唯一分解成  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

其中  $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_1^\perp$ . 称  $\alpha_1$  为向量  $\alpha$  在子空间  $V_1$  上的内射影.

## 五、小结

- 1.请叙述子空间的正交、正交补的概念.
- 2.请叙述定理 5 和定理 6, 并试着归纳欧式空间正交分解的原理.

## 六、作业 (习题册)

## 七、教学反思

## 9.6 实对称矩阵的标准形

教学的时间: \*\*\*\*年 月 日

教学学时数:2 学时

### 一、教学目标

1. 了解实对称矩阵的性质、对称变换的定义.
2. 掌握求正交矩阵  $P$ , 使得  $P^TAP$  是对角矩阵的方法.
3. 掌握实二次型的化简.

### 二、教学重点

1. 实对称矩阵的性质.
2. 求正交矩阵  $P$ , 使得  $P^TAP$  是对角矩阵的方法.

### 三、教学难点

1. 求正交矩阵  $P$ , 使得  $P^TAP$  是对角矩阵的方法.
2. 实二次型的化简.

### 四、教学过程

#### (一) 问题的提出

由第五章知: 任意一个**对称矩阵**都合同于一个对角矩阵, 换句话说, 对于任意的对称矩阵  $A$ , 存在一个可逆矩阵  $C$  使  $C^TAC$  成对角形, 也就是任意的对称矩阵合同于对角矩阵.

现在利用欧氏空间的理论, 有一种矩阵比较特别它是正交矩阵, 它的转置与其逆是相等的, 任意的**实对称矩阵既合同又相似于**对角矩阵呢?

#### (二) 实对称矩阵的性质

**引理 1** 设  $A$  是实对称矩阵, 则  $A$  的特征值皆为实数.

**证明提示** 设  $\lambda_0$  是  $A$  的特征值, 只需要证明  $\lambda_0$  是实数, 也就是证明  $\lambda_0$  与其共轭是相等即可.

**问题 1:** 对于实对称矩阵  $A$ , 能否在  $n$  维欧氏空间  $R^n$  上定义一个线性变换  $\mathcal{A}$  使得在某一个基下的矩阵为实对称矩阵  $A$ ?

对于实对称矩阵  $A$ , 在  $n$  维欧氏空间  $R^n$  上定义一个线性变换  $\mathcal{A}$  如下:

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

显然  $\mathcal{A}$  在标准正交基

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

下的矩阵就是  $A$ .

**引理 2** 设  $A$  是实对称矩阵,  $\mathcal{A}$  的定义如上, 则对任意  $\alpha, \beta \in R^n$ , 有

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}\beta), \quad (3)$$

或

$$\beta'(A\alpha) = \alpha'A\beta$$

**证明提示** 只需证明后一个式子即可.

**定义 12** 欧氏空间中满足等式  $(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}\beta)$  的线性变换称为**对称变换**.

容易看出, 对称变换在标准正交基下的矩阵是实对称矩阵. 用对称变换来反映实对称矩阵, 一些性质可以看得更清楚.

**引理 3** 设  $\mathcal{A}$  是**对称**变换,  $V_1$  是  $\mathcal{A}$ -子空间, 则  $V_1^\perp$  也是  $\mathcal{A}$ -子空间.

**要证明**  $V_1^\perp$  是不变子空间, 只需要从  $V_1^\perp$  中任取一个向量, 该向量在线性变换  $\mathcal{A}$  下的向量也在  $V_1^\perp$  中, 也就是要证该向量的像与  $V_1$ .

**引理 4** 设  $A$  是实对称矩阵, 则  $R^n$  中属于  $A$  的不同特征值的特征向量必正交.

**证明提示** 设  $\lambda, \mu$  是  $A$  的两个不同的特征值,  $\alpha, \beta$  分别是属于  $\lambda, \mu$  的特征向量, 只要证明  $(\alpha, \beta) = 0$ .

### (三) 主要的结论

**定理 7** 对于任意一个  $n$  级实对称矩阵  $A$ , 都存在一个  $n$  级正交矩阵  $T$ , 使成  $T'AT = T^{-1}AT$  对角形.

### (四) 正交矩阵的求法

下面来看看在给定了一个实对称矩阵  $A$  之后, 按什么办法求正交矩阵  $T$  使  $T'AT$  成对角形. 在定理的证明中看到, 矩阵  $A$  按(1)式在  $R^n$  中定义了一个线性变换. 求正交矩阵  $T$  的问题

就相当于在  $R^n$  中求一组由  $A$  的特征向量构成的标准正交基. 事实上, 设

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \eta_n = \begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{pmatrix}$$

是  $R^n$  的一组标准正交基, 它们都是  $A$  的特征向量. 显然, 由  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  到  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的过渡矩阵就是

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

$T$  是一个正交矩阵, 而

$$T^{-1}AT = T'AT$$

就是对角形.

根据上面的讨论, 正交矩阵  $T$  的求法可以按以下步骤进行:

1. 求出  $A$  的特征值. 设  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  是  $A$  的全部不同的特征值.
2. 对于每个  $\lambda_i$ , 解齐次方程组

$$(\lambda_i E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

求出一个基础解系, 这就是  $A$  的特征子空间  $V_{\lambda_i}$  的一组基. 由这组基出发, 按定理 2 的方法求出  $V_{\lambda_i}$  的一组标准正交基  $\eta_{i1}, \dots, \eta_{ik_i}$ .

3. 因为  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  两两不同, 所以根据这一节引理 4, 向量组  $\eta_{11}, \dots, \eta_{1k_1}, \dots, \eta_{r1}, \dots, \eta_{rk_r}$  还是两两正交的. 又根据定理 7 以及第七章 §5 的讨论, 它们的个数就等于空间的维数. 因此, 它们就构成  $R^n$  的一组标准正交基, 并且也都是  $A$  的特征向量. 这样, 正交矩阵  $T$  也就求出了.

### (五) 例子

例 已知

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一正交矩阵  $T$  使  $T'AT$  成对角形.

应该指出, 在定理 7 中, 对于正交矩阵  $T$  我们还可以进一步要求

$$|T| = 1$$

事实上, 如果求得的正交矩阵  $T$  的行列式为 -1, 那么取

$$S = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

那么  $T_1 = TS$  是正交矩阵, 而且

$$|T_1| = |T||S| = 1$$

显然  $T_1'AT_1 = T'AT$ .

如果线性替换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

的矩阵  $C = (c_{ij})$  是正交的, 那么它就称为正交的线性替换. 正交的线性替换当然是非退化的.

用二次型的语言, 定理 7 可以叙述为:

**(六) 正交的线性替换**

**定理 8** 任意一个实二次型

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

都可以经过正交的线性替换变成平方和

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中平方项的系数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  就是矩阵  $A$  的特征多项式全部的根.

## (七) 二次曲面的化简

最后指出,这一节的结果可以应用到几何上化简直角坐标系下二次曲线的方程,以及讨论二次曲线的分类.

在直角坐标系下,二次曲线的一般方程是

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + d = 0 \quad (5)$$

令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

则(5)可以写成

$$X'AX + 2B'X + d = 0 \quad (6)$$

经过转轴,坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \text{或者 } X = CX_1$$

其中  $C$  为正交变换且  $|C|=1$ , 在新坐标系中,曲面的方程就是

$$X_1'(C'AC)X_1 + 2(B'C)X_1 + d = 0$$

根据上面的结果,有行列式为 1 的正交矩阵  $C$  使

$$C'AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

这就是说,可以作一个转轴,使曲面在新坐标系中的方程为

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + 2b_1^* x_1 + 2b_2^* y_1 + 2b_3^* z_1 + d = 0$$

其中

$$(b_1^*, b_2^*, b_3^*) = (b_1, b_2, b_3)C$$

这时,再按照  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  是否为零的情况,作适当的移轴与转轴就可以把曲面的方程化成标准方程.譬如说,当  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  全不为零时,就作移轴

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - \frac{b_1^*}{\lambda_1}, \\ y_1 = y_2 - \frac{b_2^*}{\lambda_2}, \\ z_1 = z_2 - \frac{b_3^*}{\lambda_3}. \end{cases}$$

于是曲面的方程化为

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 + d^* = 0$$

其中

$$d^* = d - \frac{b_1^{*2}}{\lambda_1} - \frac{b_2^{*2}}{\lambda_2} - \frac{b_3^{*2}}{\lambda_3}.$$

## 五、小结

- 1.请叙述实对称矩阵的性质、对称变换的定义.
- 2.请叙述求正交矩阵 P, 使得  $P^T A P$  是对角矩阵的方法.
3. 如何对实二次型进行化简?

## 六、作业 (课本 P391ex17 的第 1 小题, ex18 的第 1 小题)

## 七、教学反思

## 9.7 向量到子空间的距离·最小二乘法

教学的时间:\*\*\*\*年 月 日

教学学时数:2 学时

### 一、教学目标

1.

### 二、教学重点

质

### 三、教学难点

义

### 四、教学过程

(一)、在解析几何中,两个点 $\alpha$ 和 $\beta$ 间的距离等于向量 $\alpha - \beta$ 的长度.

**定义 13** 长度 $|\alpha - \beta|$ 称为向量 $\alpha$ 和 $\beta$ 的距离,记为 $d(\alpha, \beta)$

不难证明距离的三条性质:

- 1)  $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$ ;
- 2)  $d(\alpha, \beta) \geq 0$ , 并且仅当 $\alpha = \beta$ 时等号才成立;
- 3)  $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$  (三角不等式)

在中学所学几何中知道一个点到一个平面(一条直线)上所有点的距离以垂线最短.下面可以证明一个固定向量和一个子空间中各向量间的距离也是以“垂线最短”.

先设一个子空间 $W$ ,它是由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 所生成,即 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ .说一个向量 $\alpha$ 垂直于子空间 $W$ ,就是指向量 $\alpha$ 垂直 $W$ 中任何一个向量.易证 $\alpha$ 垂直于 $W$ 的充要条件是 $\alpha$ 垂直于每个 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, k)$ .

现给定 $\beta$ ,设 $\gamma$ 是 $W$ 中的向量,满足 $\beta - \gamma$ 垂直于 $W$ .要证明 $\beta$ 到 $W$ 中各向量的距离以垂线最短,就是要证明,对于 $W$ 中任一向量 $\delta$ ,有

$$|\beta - \gamma| \leq |\beta - \delta|.$$

我们可以画出下面的示意图:

**证明**  $\beta - \delta = (\beta - \gamma) + (\gamma - \delta)$  因 $W$ 是子空间,  $\gamma \in W, \delta \in W$ , 则 $\gamma - \delta \in W$ .故 $\beta - \gamma$ 垂直

于  $\gamma - \delta$ . 由勾股定理,

$$|\beta - \gamma|^2 + |\gamma - \delta|^2 = |\beta - \delta|^2$$

故

$$|\beta - \gamma| \leq |\beta - \delta|$$

这就证明了, 向量到子空间各向量间的距离以垂线最短.

这个几何事实可以用来解决一些实际问题. 其中的一个应用就是解决最小二乘法问题.

**例** 已知某种材料在生产过程中的废品率  $y$  与某种化学成分  $x$  有关. 下列表中记载了某工厂生产中  $y$  与相应的  $x$  的几次数值:

$y$ (%)	1.00	0.9	0.9	0.81	0.60	0.56	0.35
$x$ (%)	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.0	4.2

我们想找出  $y$  对  $x$  的一个近似公式.

**最小二乘法问题:** 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s - b_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2s}x_s - b_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ns}x_s - b_n = 0 \end{cases}$$

可能无解. 即任何一组数  $x_1, x_2, \dots, x_s$  都可能使

$$\sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{is}x_s - b_i)^2 \tag{1}$$

不等于零. 我们设法找  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_s^0$  使 (1) 最小, 这样的  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_s^0$  称为方程组的最小二乘解. 这种问题就叫最小二乘法问题.

下面利用欧氏空间的概念来表达最小二乘法, 并给出最小二乘解所满足的代数条件.

令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^s a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^s a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^s a_{nj}x_j \end{pmatrix} = AX. \quad (2)$$

用距离的概念, (1) 就是

$$|Y - B|^2$$

最小二乘法就是找  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_s^0$  使  $Y$  与  $B$  的距离最短. 但从 (2), 知道向量  $Y$  就是

$$Y = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_s \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}.$$

把  $A$  的各列向量分别记成  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ . 由它们生成的子空间为  $L = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ .  $Y$  就是  $L = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  中的向量. 于是最小二乘法问题可叙述成:

找  $X$  使 (1) 最小, 就是在  $L = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  中找一向量  $Y$ , 使得  $B$  到它的距离比到子空间  $L = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  中其它向量的距离都短.

应用前面所讲的结论, 设

$$Y = AX = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s$$

是所求的向量, 则

$$C = B - Y = B - AX$$

必须垂直于子空间  $L = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ . 为此只须而且必须

$$(C, \alpha_1) = (C, \alpha_2) = \cdots = (C, \alpha_s) = 0$$

回忆矩阵乘法规则, 上述一串等式可以写成矩阵相乘的式子, 即

$$\alpha_1' C = 0, \alpha_2' C = 0, \dots, \alpha_s' C = 0.$$

而  $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_s$  按行正好排成矩阵  $A'$ , 上述一串等式合起来就是

$$A'(B - AX) = 0$$

或

$$A'AX = A'B$$

这就是最小二乘解所满足的代数方程, 它是一个线性方程组, 系数矩阵是  $A'A$ , 常数项是  $A'B$ . 这种线性方程组总是有解的.

回到前面的例子, 易知

$$A = \begin{pmatrix} 3.6 & 1 \\ 3.7 & 1 \\ 3.8 & 1 \\ 3.9 & 1 \\ 4.0 & 1 \\ 4.1 & 1 \\ 4.2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.90 \\ 0.90 \\ 0.81 \\ 0.60 \\ 0.56 \\ 0.35 \end{pmatrix}$$

最小二乘解  $a, b$  所满足的方程就是

$$A'A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - A'B = 0,$$

即为

$$\begin{cases} 106.75a + 27.3b - 19.675 = 0, \\ 27.3a + 7b - 5.12 = 0. \end{cases}$$

解得

$$a = -1.05, b = 4.81 \quad (\text{取三位有效数字}).$$

## 五、小结

1.

## 六、作业 (习题册)

## 七、教学反思

## 9.8 酉空间

教学的时间: \*\*\*\*年 月 日

教学学时数: 2 学时

### 一、教学目标

1.

### 二、教学重点

质

### 三、教学难点

义

### 四、教学过程

(一)、

**定义 14** 设  $V$  是复数域上一个线性空间, 在  $V$  上定义了一个二元复函数, 称为内积, 记作  $(\alpha, \beta)$ , 它具有以下性质:

- 1)  $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$ ,  $\overline{(\beta, \alpha)}$  是  $(\beta, \alpha)$  的共轭复数;
- 2)  $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$ ;
- 3)  $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$ ;
- 4)  $(\alpha, \alpha)$  是非负实数, 且  $(\alpha, \alpha) = 0$  当且仅当  $\alpha = 0$

这里  $\alpha, \beta, \gamma$  是  $V$  中任意的向量,  $k$  是任意复数, 这样的线性空间称为酉空间.

**例 1** 在线性空间  $C^n$ , 对向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

定义内积为

$$(\alpha, \beta) = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \dots + a_n \bar{b}_n, \quad (1)$$

显然内积 (1) 满足定义 14 中的条件. 这样  $C^n$  就成为一个酉空间.

由于酉空间的讨论与欧氏空间的讨论很相似, 有一套平行的理论, 因此在这只简单地列出重要的结论, 而不详细论证.

- 1)  $(\alpha, k\beta) = \bar{k}(\alpha, \beta)$ .

$$2) (\alpha, \beta + \gamma) = (\alpha, \beta) + (\alpha, \gamma).$$

$$3) \sqrt{(\alpha, \alpha)} \text{ 叫做向量 } \alpha \text{ 的长度, 记为 } |\alpha|.$$

4) 柯西 - 布涅柯夫斯基不等式仍然成立, 即对于任意的向量  $\alpha, \beta$  有

$$|\alpha, \beta| \leq |\alpha| |\beta|,$$

当且仅当  $\alpha, \beta$  线性相关时等号成立.

注意: 酉空间中的内积  $(\alpha, \beta)$  一般是复数, 故向量之间不易定义夹角但仍引入

5) 向量  $\alpha, \beta$ , 当  $(\alpha, \beta) = 0$  时称为正交的或互相垂直.

在  $n$  维酉空间中, 同样可以定义正交基和标准正交基, 并且关于标准正交基也有下述一些重要性质:

6) 任意一组线性无关的向量可以用施密特过程正交化, 并扩充为一组标准正交基.

7) 对  $n$  级复矩阵  $A$ , 用  $\bar{A}$  表示以  $A$  的元素的共轭复数作元素的矩阵. 如  $A$  满足  $\bar{A}'A = A\bar{A}' = E$ , 就叫做酉矩阵. 它的行列式的绝对值等于 1.

两组标准正交基的过渡矩阵是酉矩阵.

8) 酉空间  $V$  的线性变换  $\mathcal{A}$ , 满足

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\alpha, \beta),$$

就称为  $V$  的一个酉变换. 酉变换在标准正交基下的矩阵是酉矩阵.

9) 如矩阵  $A$  满足

$$\bar{A}' = A$$

则叫做埃尔米特(Hermite)矩阵. 在酉空间  $C^n$  中令

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则

$$(\mathcal{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathcal{A}\beta).$$

$\mathcal{A}$  也是对称变换.

10)  $V$  是酉空间,  $V_1$  是子空间,  $V_1^\perp$  是  $V_1$  的正交补, 则  $V = V_1 \oplus V_1^\perp$

又设  $V_1$  是对称变换的不变子空间, 则  $V_1^\perp$  也是不变子空间.

11) 埃尔米特矩阵的特征值为实数. 它的属于不同的特征值的特征向量必正交.

12) 若  $A$  是埃尔米特矩阵, 则有酉矩阵  $C$ , 使

$$C^{-1}AC = \bar{C}'AC$$

是对角形矩阵.

13) 设  $A$  为埃尔米特矩阵, 二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \bar{x}_j = X' A \bar{X}$$

叫做埃尔米特二次型. 必有酉矩阵  $C$ , 当时  $X = CY$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 y_1 \bar{y}_1 + d_2 y_2 \bar{y}_2 + \dots + d_n y_n \bar{y}_n.$$

## 五、小结

1.

## 六、作业 (习题册)

## 七、教学反思