3.2平面与点的相关位置

空间中平面与点的相关位置，有且只有两种情况就是点在平面上，或点不在平面上，点在平面上的条件是点的坐标满足平面的方程。下面在直角坐标系下来讨论点不在平面上的情况。

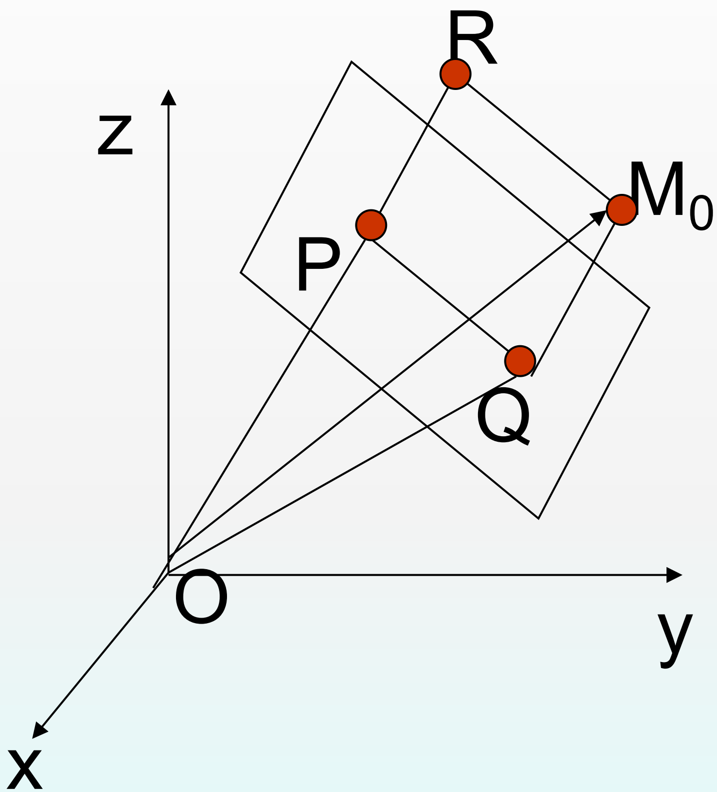
本节内容在直角坐标系下讨论

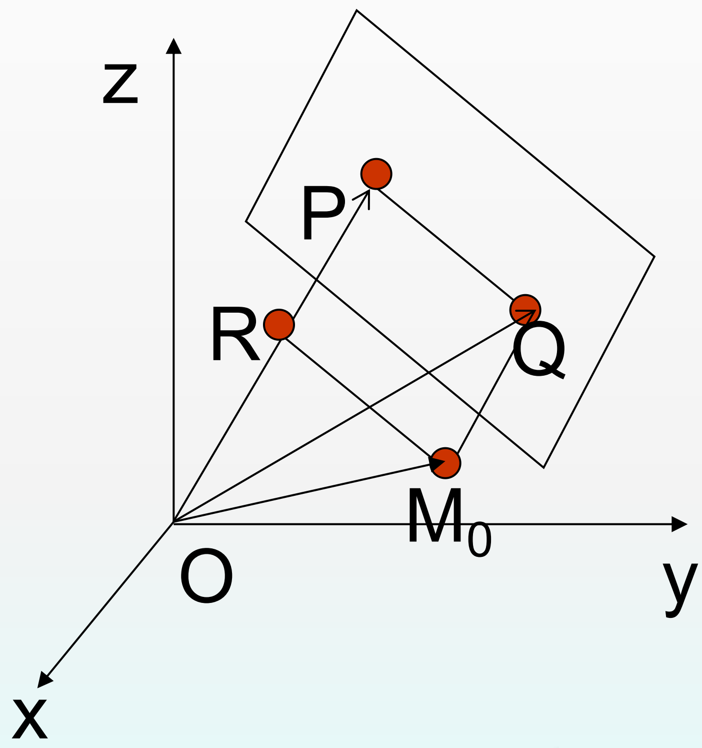
在求点与平面间的距离之前，我们先引进点关于平面的离差概念。

一、 离差的概念

定义3.2.1 如果自点M_0到平面引垂线,垂足为Q,则矢量$\overrightarrow{QM_0}$在平面π的单位法矢量n^0上的射影叫做点 M_0与平面π 的离差，记做

Б=射影$n_0\overrightarrow{QM_0}$


R
z
M_0
P
Q
O
y
x


z
P
R
Q
M_0
O
y
x

容易看出，空间的点与平面间 π 的离差，当且仅当点 M_0 位于平面 π 的单位法矢量 $\vec{n}^0$ 所指向的一侧，$\overrightarrow{QM_0}$ 与 $\vec{n}^0$ 同向（图3-7），离差 $\delta>0$；在平面 π 的另一侧，$\overrightarrow{QM_0}$ 与 $\vec{n}^0$ 方向相反（图3-8），离差 $\delta<0$；当且仅当 M_0 在平面上时，离差 $\delta=0$。

显然，离差的绝对值 $|\delta|$，就是点 M_0 与平面 π 之间的距离d.

定理3.2.1 点M_0与平面（3.1-13）间的离差为

$$\delta = \overrightarrow{n^0} \cdot \vec{r}_0 - p \qquad \textbf{(3.2-2)}$$

这里 $r_o = \overrightarrow{OM_0}$，$p = \left|\overrightarrow{op}\right|$

证 根据定义3.2.2(图3-7或图3-8）得

$$\delta = \text{射影}_{n^0}\overrightarrow{QM_0} = n^0 \cdot \left(\overrightarrow{OM_0} - \overrightarrow{OQ}\right)$$

$$= \overrightarrow{n^0} \cdot \left(\vec{r}_0 - \vec{q}\right)$$

$$= \overrightarrow{n^0} \cdot \vec{r}_0 - \overrightarrow{n^0} \cdot \vec{q}$$

而Q在平面（3.1-13）上，因此 $\overrightarrow{n^0} \cdot \overrightarrow{q} = p$

所以 $\delta = \overrightarrow{n^0} \cdot \overrightarrow{r_0} - p$

推论1　点 $M_0(x_0\ ,y_0,z_0)$ 与平面（3.1-14）间的离差是

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p \quad （3.2\text{-}3）$$

推论2. 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 与平面 $Ax+By+Cz+D=0$

的距离为 $d = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (3.2-4)

二、 点与平面间的距离

1. 定义 一点与平面上的点之间的最短距离，叫做该点与平面之间的距离.

2. 求解

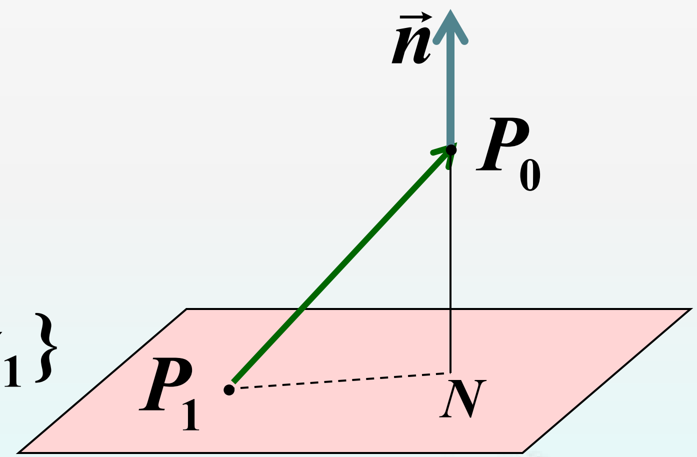
设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax + By + Cz + D = 0$外一点，求P_0到平面的距离.

解 $\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$

$$d = |\Pr j_n \overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$\Pr j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{e}_{\vec{n}}$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$$



$$\vec{e}_{\vec{n}} = \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right\}$$

$$\therefore \Pr j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{e}_{\vec{n}}$$

$$= \frac{A(x_0-x_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{B(y_0-y_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\because\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (P_1 \in \Pi)$$

$$\therefore\ \mathrm{Pr}\, j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\therefore\quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

点到平面距离公式

例 1　设点$M(-2,4,3)$，平面$\pi:2x-1y+2z+3=0$，求点M到平面π间的距离.

解：由于

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|2\times(-2)-1\times4+2\times3+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$$

$$=\frac{1}{3}$$

例 2　求两平面

$z=x+2y+1,\quad 3x+6y-3z=4$ 间的距离.

解　先判断两平面是否平行

$\vec{n}_1=\{1,2,-1\},\ \vec{n}_2=\{3,6,-3\},$

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{-1}{-3}\Rightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2.$$

在第一个平面内任取一点，比如（0，0，1），

$$d=\frac{|3\times 0+6\times 0-3\times 1-4|}{\sqrt{3^2+6^2+(-3)^2}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

三、平面划分空间问题

设平面π的一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0$

那么，空间任何一点$M(x,y,z)$对平面的离差为

$$\delta=\lambda(Ax+By+Cz+D)$$

式中 λ 为平面 π 的法式化因子，所以有

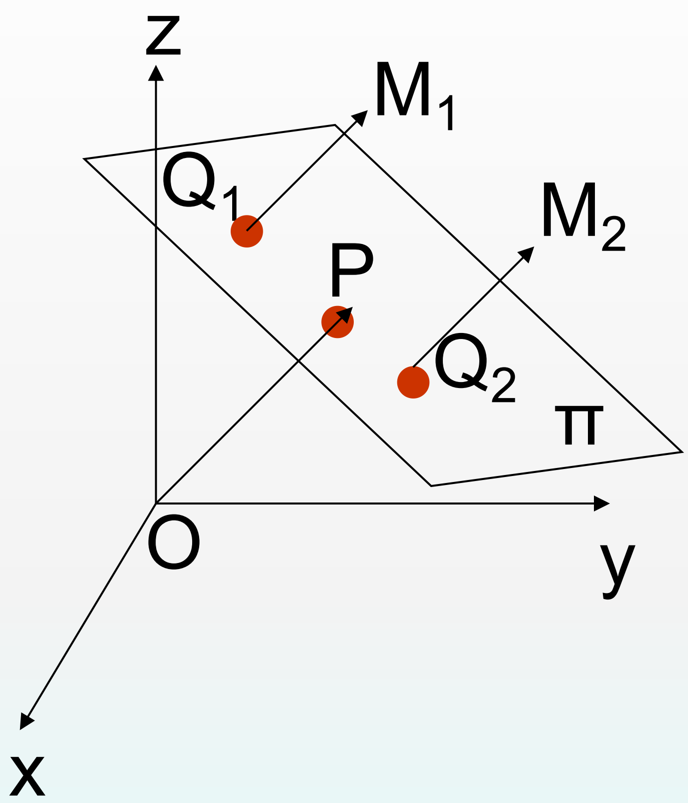
$$Ax+By+Cz+D=\frac{1}{\lambda}\delta \qquad (3.2\text{-}5)$$

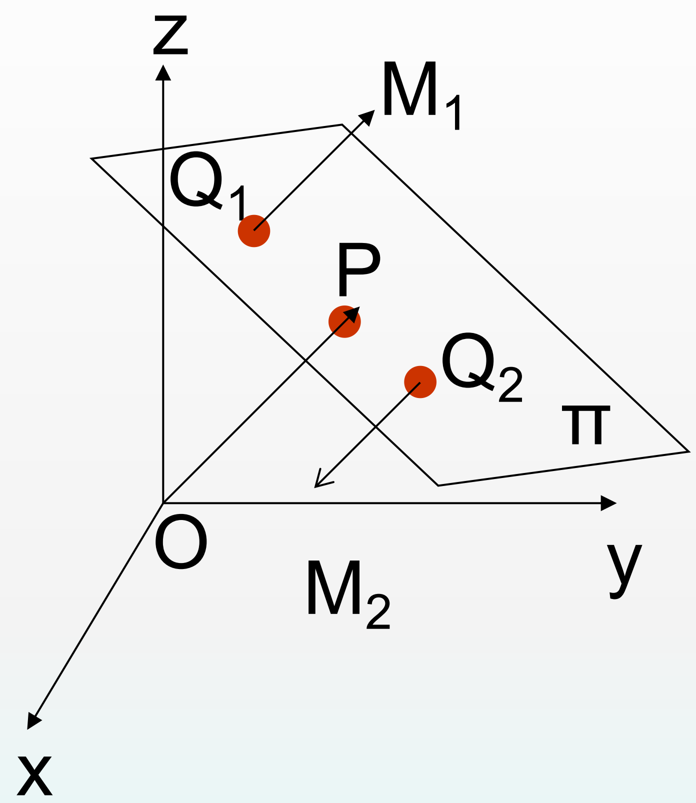
$$Ax + By + Cz + D = \frac{1}{\lambda}\delta \qquad (3.2\text{-}5)$$

对于平面同侧的点，δ的符号相同；对于在异侧的点，δ有不同的符号。这是因为当M_1与M_2是π同侧的点时，

$\overrightarrow{Q_1M_1}$与$\overrightarrow{Q_2M_2}$ 同向; 当M_1与M_2是π异侧的点时,

$\overrightarrow{Q_1M_1}$与$\overrightarrow{Q_2M_2}$ 反向;


z
M1
Q1
M2
P
Q2
π
O
y
x


z
M1
Q1
P
Q2
π
O
y
M2
x

因此由（3.2-5）式可以知道平面π: $Ax + By + Cz + D = 0$

把空间划分为两部分，对于某一部分的点

$$Ax + By + Cz + D \langle 0$$

而对于另一部分的点，则有

$$Ax + By + Cz + D \succ 0$$

在平面π上的点

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

四、 三元一次不等式的几何意义

结论：

若点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 不在平面

$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ 上，

则 M_1, M_2 位于平面 π 同侧的充要条件是：

$F_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D, F_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ 同号

则 M_1, M_2 位于平面 π 两侧的充要条件是：

$F_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D, F_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ 异号

例3 已知平面 $x+2y-3z+4=0$，点O（0，0，0），A（1，1，4），B（1，0，-2），C（2，0，2），D（0，0，4）试确定这些点与平面的位置关系.

解：设F（x，y，z）=x+2y-3z+4

则有

F（O（0，0，0））=4 >0　　F（A（1，1，4））=-5<0

F（B（1，0，-2））=11>0　F（C（2，0，2））=0

F（D（0，0，4））=-8 <0

所以，点O、B在平面的同一侧，而点A、D在平面的另一侧，点C在平面上。

说明 判别两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$与平面

$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D=0$，$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D=0$ 的位置关系，

将点M_1,M_2的坐标分别代入π_1,π_2方程左边，

即 $F_1=A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D$， $F_2=A_2X_2+B_2Y_2+C_2Z_2+D$

$F_3=A_2x_2+B_2y_2+C_2z_2+D$，$F_4=A_2x_2+B_2y_2+C_2z_2+D$

如果

$F_1F_2>0, F_3F_4<0$ 表明点M_1,M_2在π_1,π_2所构成的相邻二面角内.

$F_1F_2>0, F_3F_4>0$ 表明点M_1,M_2在π_1,π_2所构成的对顶二面角内.

$F_1F_2<0, F_3F_4<0$ 表明点M_1,M_2在π_1,π_2所构成的同一二面角内.

五、课堂小结

1. 判断两点在平面的哪侧；

2. 点到平面的距离为非负数。

思考题：

试求由平面$\pi_1: 2x-1y+2z-3=0$，$\pi_2: 3x+2y-6z-1=0$所构成的二面角的角平分面的方程，在此二面角内有点$M(1,2,-3)$.