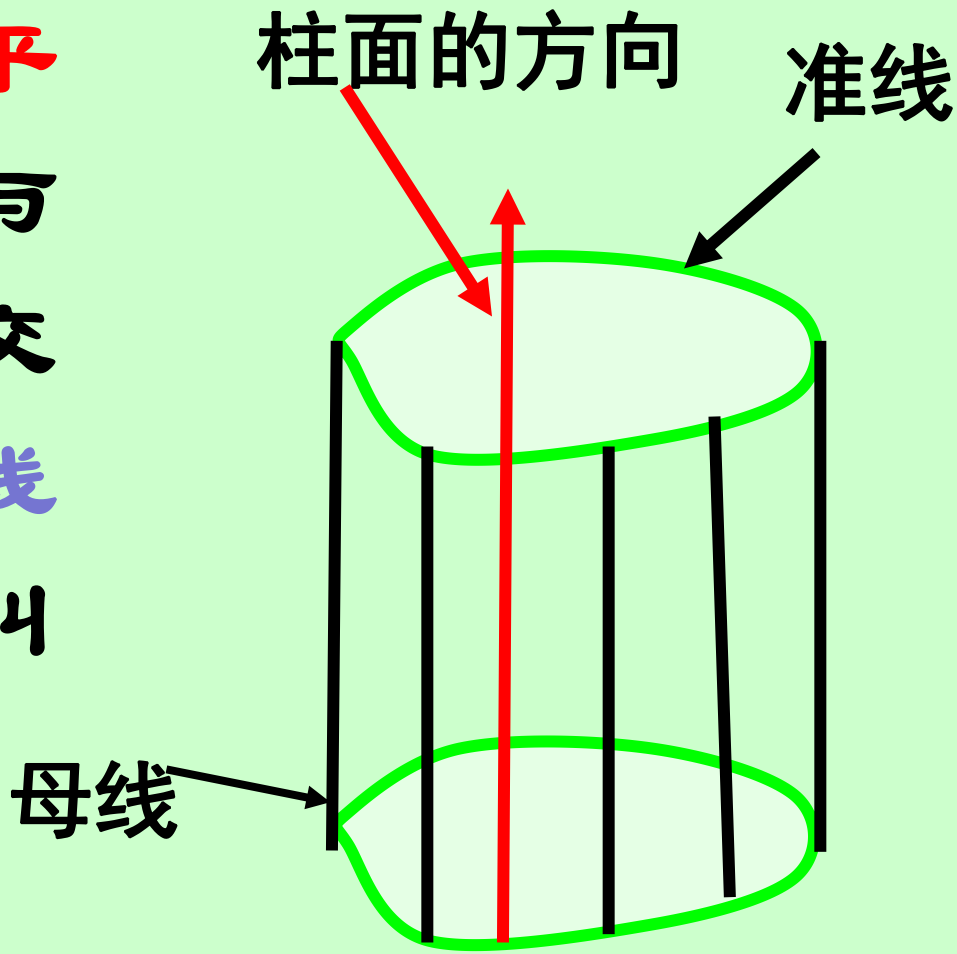
第一节 柱面

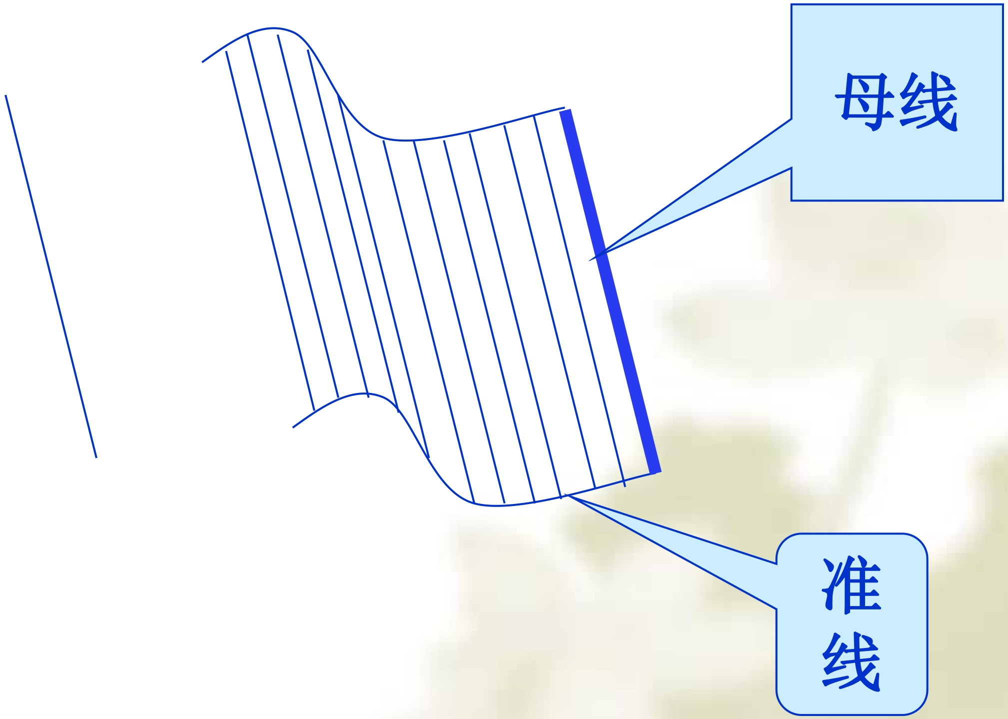
- 一、柱面的定义

在空间，由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫柱面。



曲面的实例：水桶的表面、台灯的罩子面等.

观察柱面的形成过程



曲面方程的具体推导过程

曲面在空间解析几何中被看成是点的几何轨迹

曲面方程的定义：

如果曲面S与三元方程$F(x,y,z)=0$有下述关系：

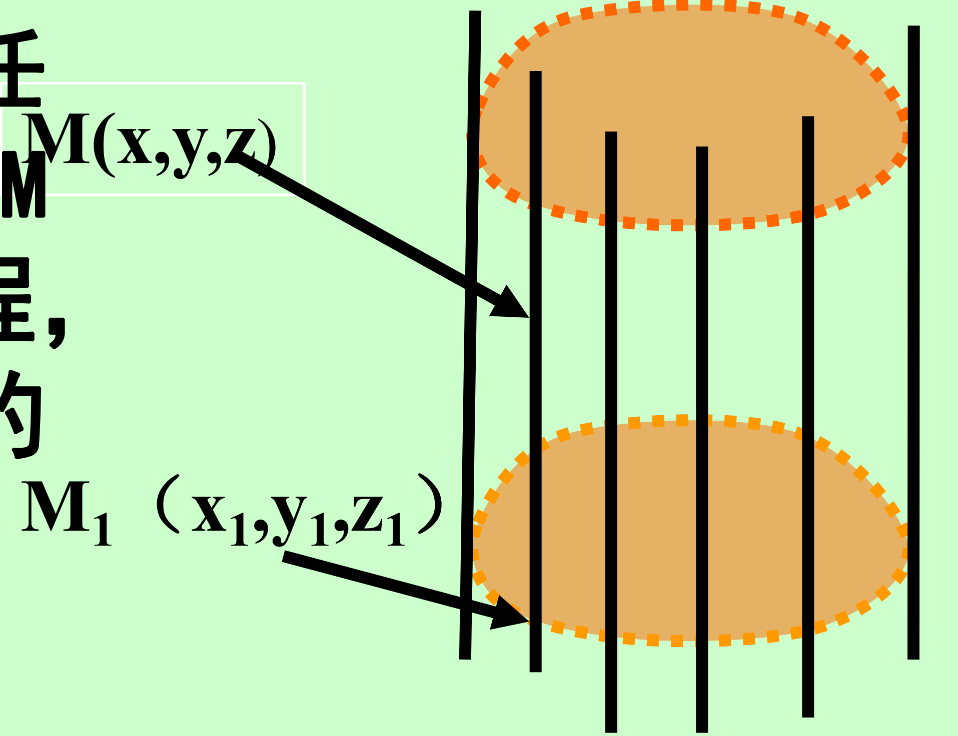
（1） 曲面S上任一点的坐标都满足方程；

（2）不在曲面S上的点的坐标都不满足方程；

那么，方程$F(x,y,z)=0$就叫做曲面 S的方程，而曲面S就叫做方程的图形.

柱面方程的推导

设M_1是准线上任意一点，M是通过这点的母线上任意一点，当M_1在准线上移动时，这条母线上的动点M就是柱面上的任意一点。因此求出M点的坐标满足的方程，就可以得到该柱面的方程了。

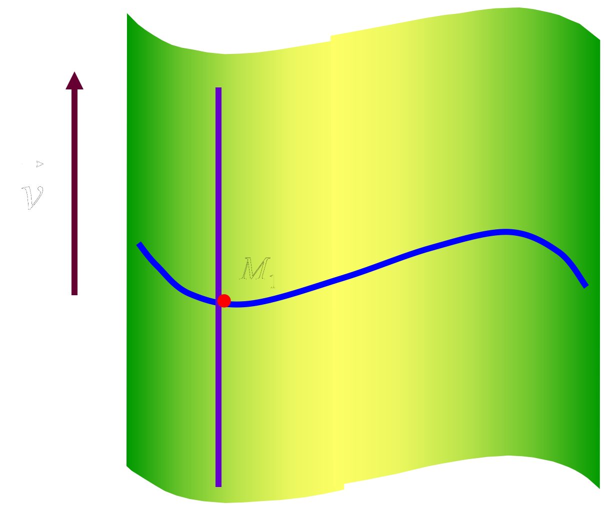


二、柱面的方程

1 柱面的一般方程

I 准线方程 $C:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ **II 母线l的方向数：**X,Y,Z

分析： $\forall\ M_1(x_1,y_1,z_1)\in S \Leftrightarrow \begin{cases} M_1\in C \\ M_1\in l \end{cases}$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0 \\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0 \\ \dfrac{x-x_1}{X}=\dfrac{y-y_1}{Y}=\dfrac{z-z_1}{Z}=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1(x-Xt,y-Yt,z-Zt)=0 \\ F_2(x-Xt,y-Yt,z-Zt)=0 \end{cases} \Rightarrow F(x,y,z)=0$$

二、柱面的方程

例1 柱面的准线方程为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2 \end{cases}$，而母线的方向数是 $-1,0,1$，求这柱面的方程.

分析： $\forall\ M_1(x_1,y_1,z_1)\in S \quad \Leftrightarrow \begin{cases} M_1\in C \\ M_1\in l \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0 \\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0 \\ \dfrac{x-x_1}{X}=\dfrac{y-y_1}{Y}=\dfrac{z-z_1}{Z}=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x,y,z)=0$$

特殊柱面

引例. 分析方程 $x^2+y^2=R^2$

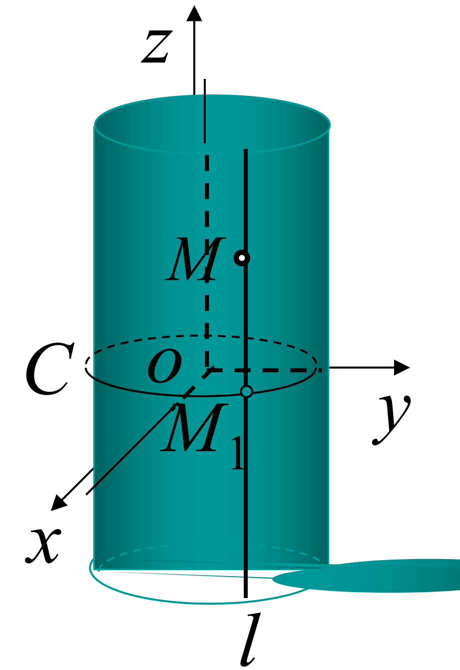
表示怎样的曲面 .

解: 在 xoy 面上, $x^2+y^2=R^2$ 表示圆C,

在圆C上任取一点$M_1(x,y,0)$, 过此点作

平行 z 轴的直线 l, 对任意 z, 点$M(x,y,z)$

的坐标也满足方程 $x^2+y^2=R^2$



沿曲线C平行于 z 轴的一切直线所形成的曲面称为**圆柱面**. 其上所有点的坐标都满足此方程, 故在空间

$x^2+y^2=R^2$ 表示**圆柱面**

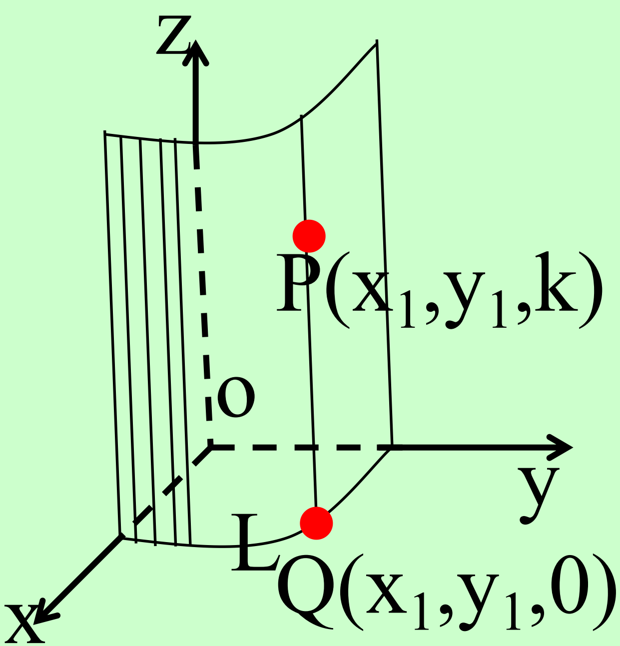
2、母线平行于坐标轴的柱面方程

假设动点P(x, y, z)的坐标间的关系是不含变量z的方程

$$F(x,y)=0$$

在xoy平面上，它表示一条曲线L，L上的点Q的坐标

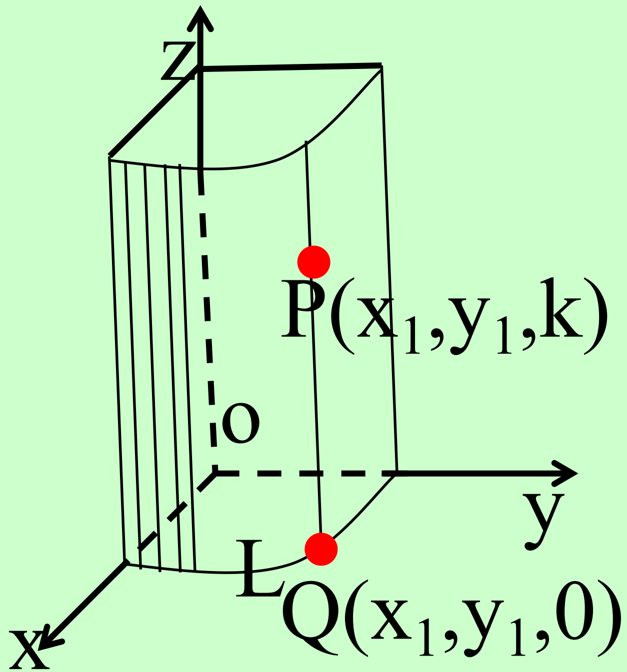
满足这方程，即点Q的坐标为$Q(x_1, y_1, 0)$，且$F(x_1, y_1)=0$



设通过点Q且与xoy平面垂直的直线上任意一点P的坐标为（x_1, y_1, k）

其中k为任意实数，则P点的坐标也满足：$F(x_1, y_1)=0$

反之，满足方程F(x,y)=0的点（x_1,y_1,k）（k为任意常数）在平行于z轴且通过曲线L上的点$Q(x_1,y_1,0)$的直线上，即方程F(x,y)=0决定的曲面是以曲线L：F(x,y)=0,z=0为准线，母线的方向数为0：0：1的柱面。



同理，F(y,z)=0,F(x,z)=0都表示柱面，它们的母线分别平行于x轴和y轴。

例：方程 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1--(1)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1--(2)$$

$$y^2=2px \quad ----- \qquad (3)$$

它们都分别表示一个柱面，母线都平行于z轴，它们在xoy平面上的准线分别是椭圆、双曲线、抛物线，所以分别称为椭圆柱面、双曲柱面和抛物柱面。它们的方程都是二次的，统称为二次柱面。

只含x,y而缺 z的方程$F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z轴的柱面，其准线为xoy面上曲线 $C:F(x,y)=0$.

（其他依次类推）

从柱面方程看**柱面的特征**：

实例

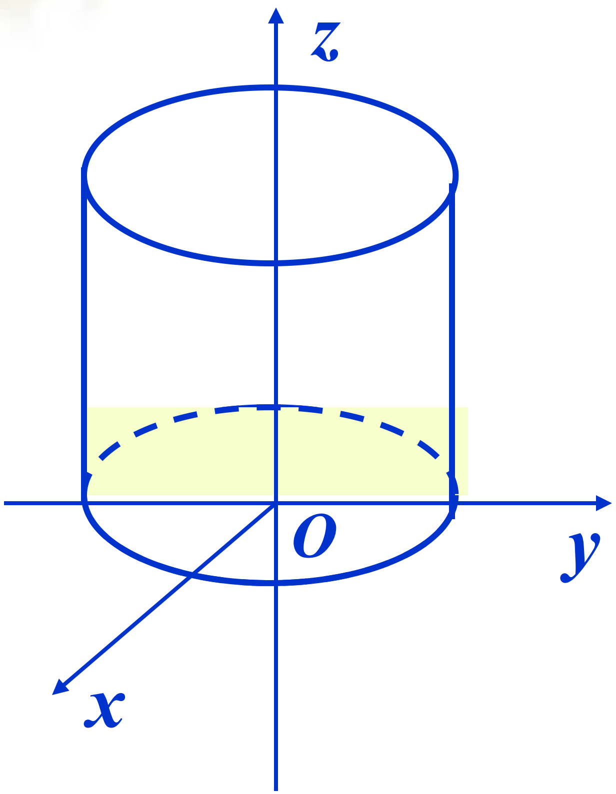
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 椭圆柱面， 母线// x 轴

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ 双曲柱面， 母线// z轴

$$x^2=2pz$$ 抛物柱面， 母线// y 轴

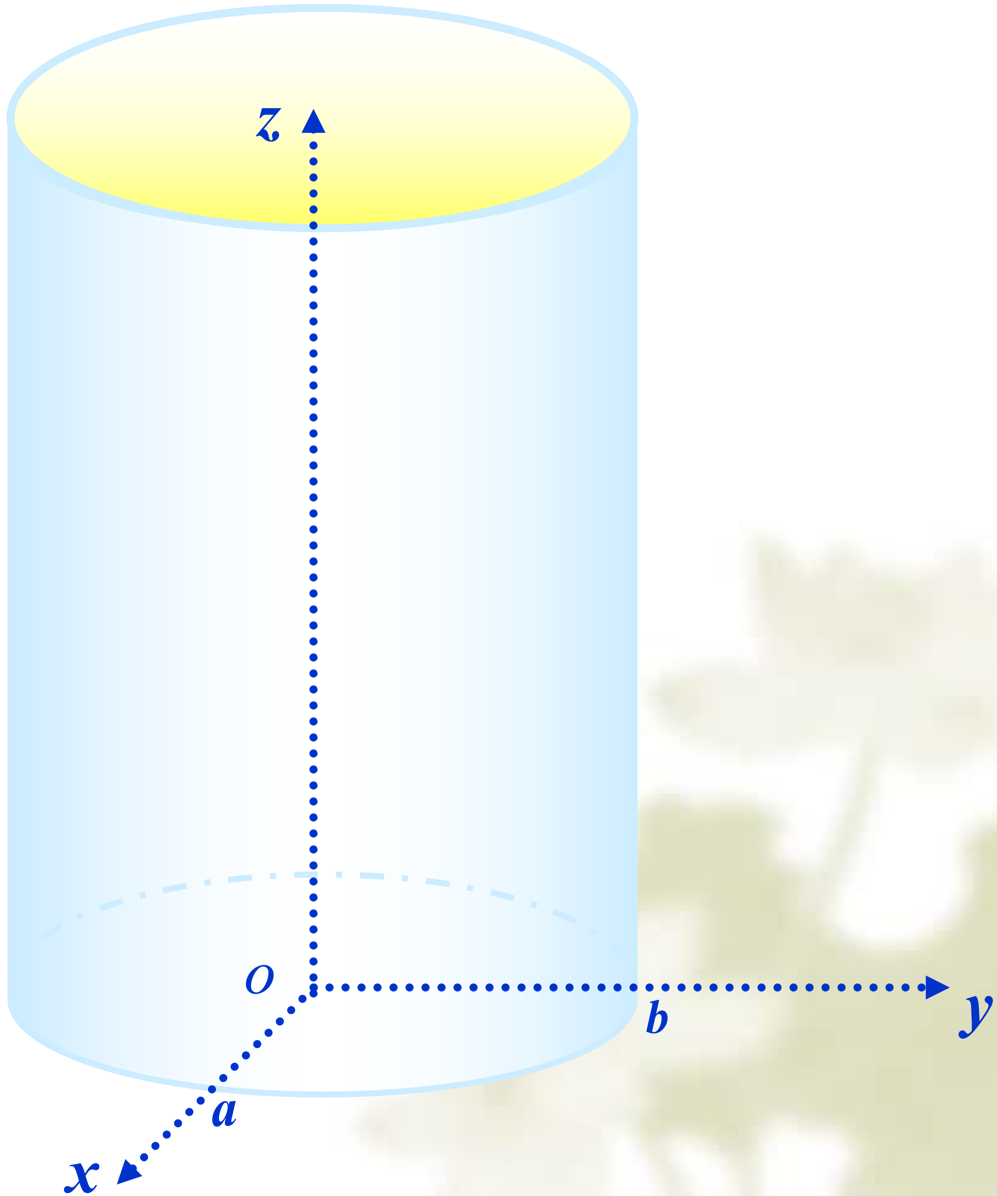
1. 椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



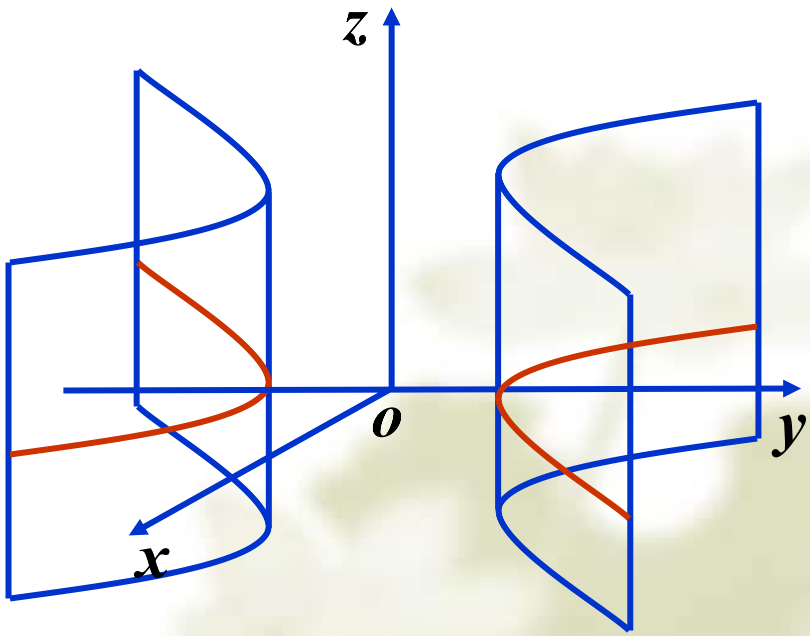
椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



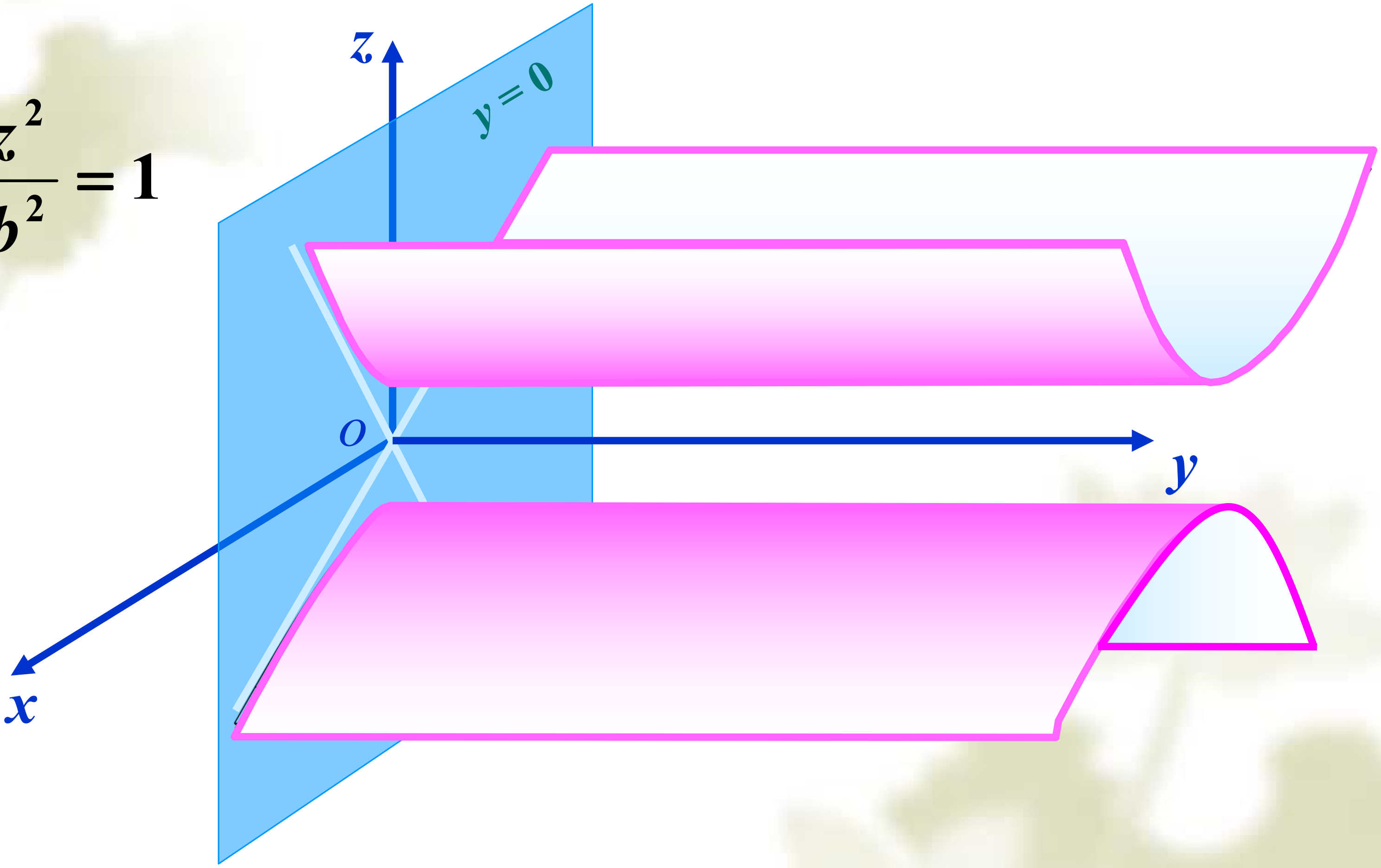
2. 双曲柱面

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

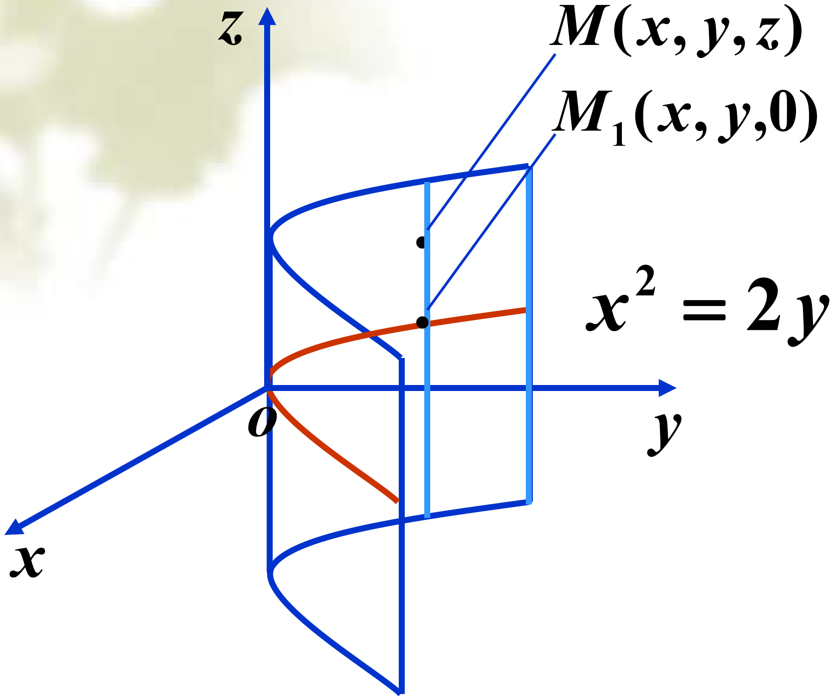


双曲柱面

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$



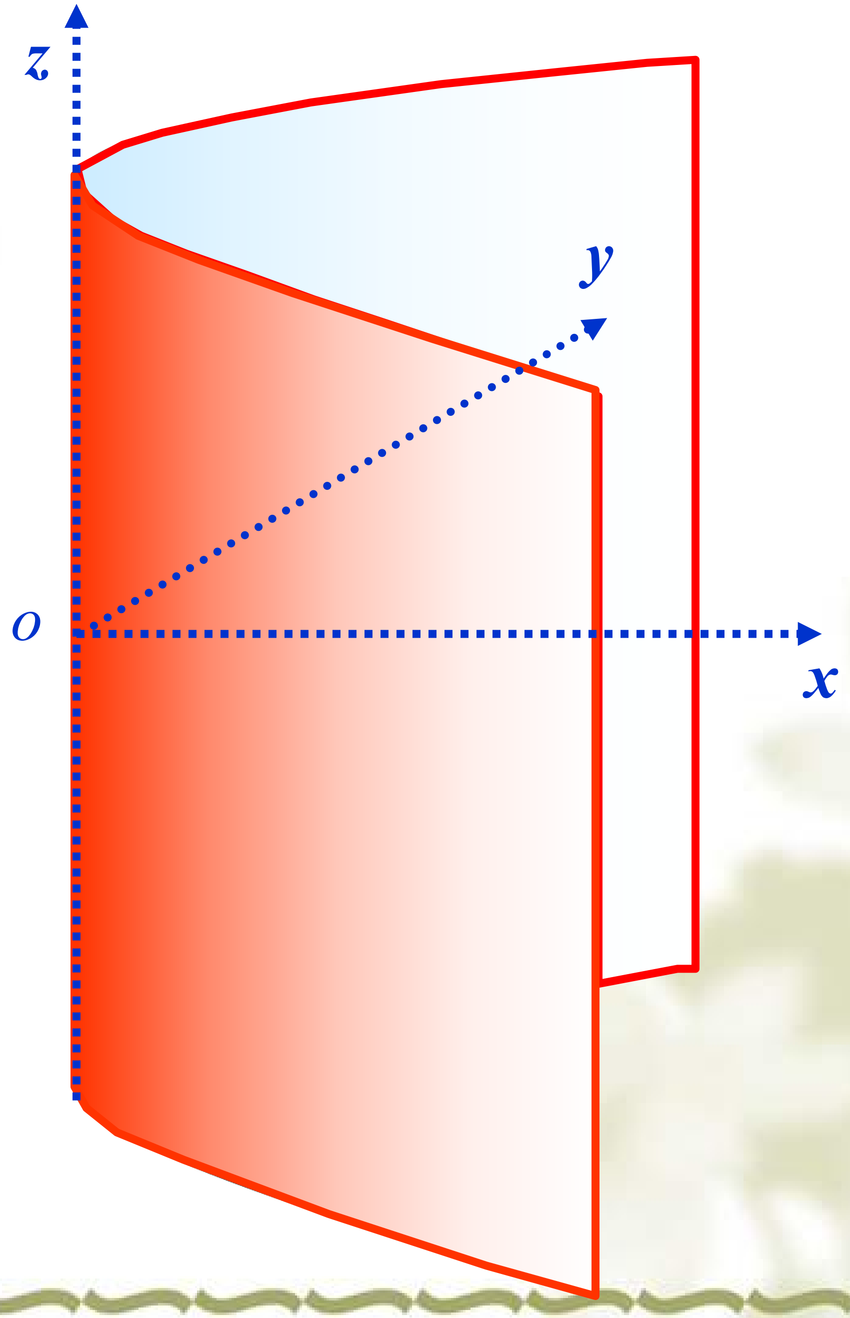
3抛物柱面



$$x^2 = 2y$$

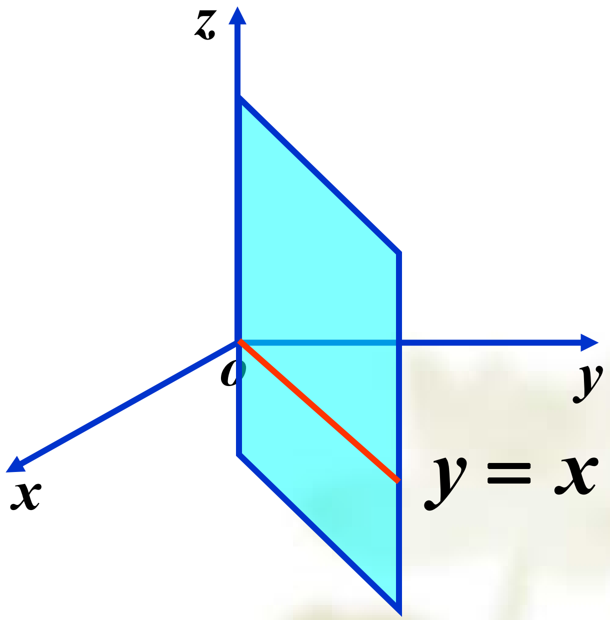
抛物柱面

$$y^2 = 2px$$



4平面

$$y = x$$



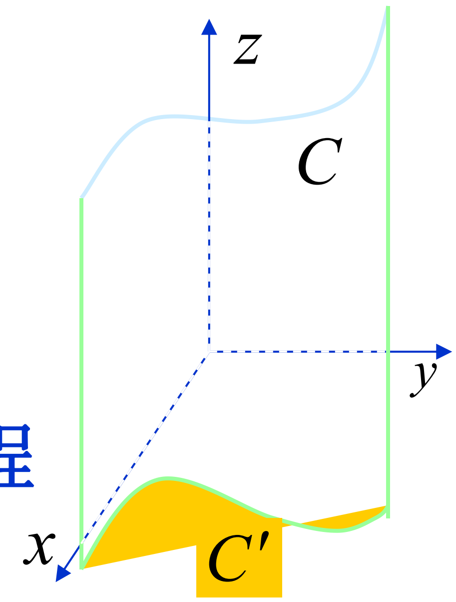
三、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去 z 得投影柱面 $H(x,y)=0$,

则 C 在 xoy 面上的投影曲线 C' 为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$



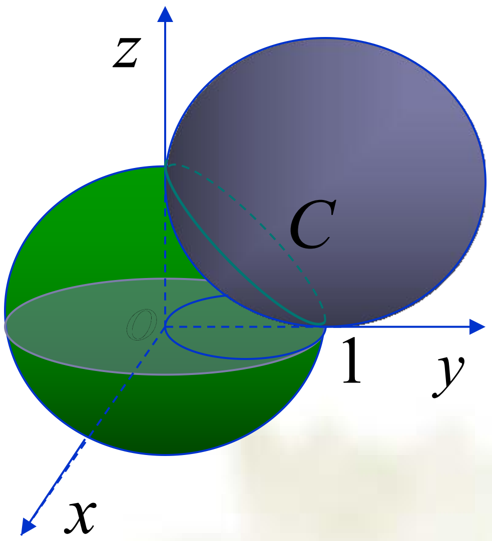
消去 x 得 C 在 yoz 面上的投影曲线方程

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

消去 y 得 C 在 zox 面上的投影曲线方程 $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

例如, p148　8(4)

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$$



在*xoy* 面上的投影柱面方程为

$$x^2+2y^2-2y=0$$

在*xoy* 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

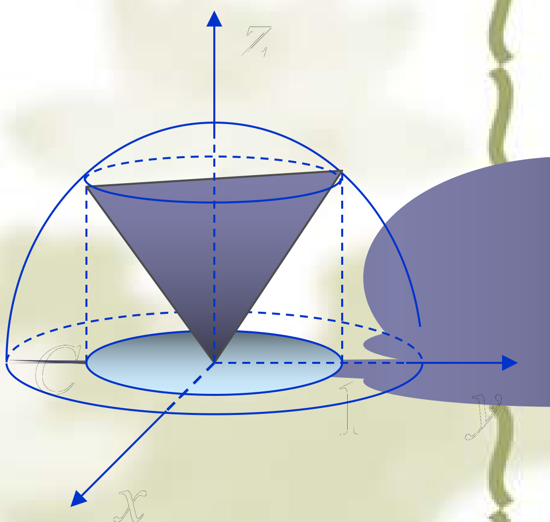
又如,

上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$

所围的立体在 xoy 面上的投影区域为: 二者交线在

xoy 面上的投影曲线所围之域 .

二者交线 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$

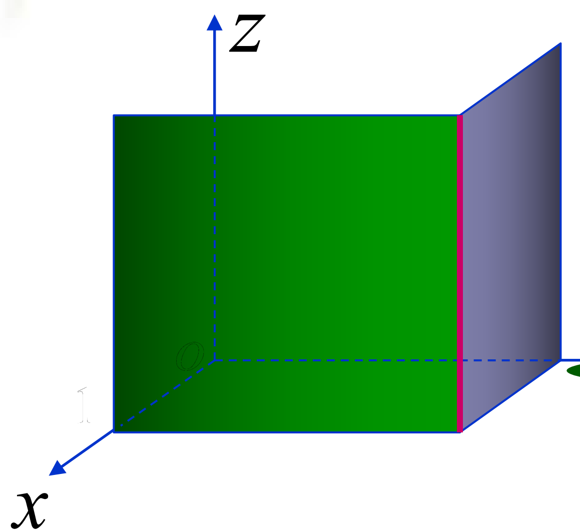


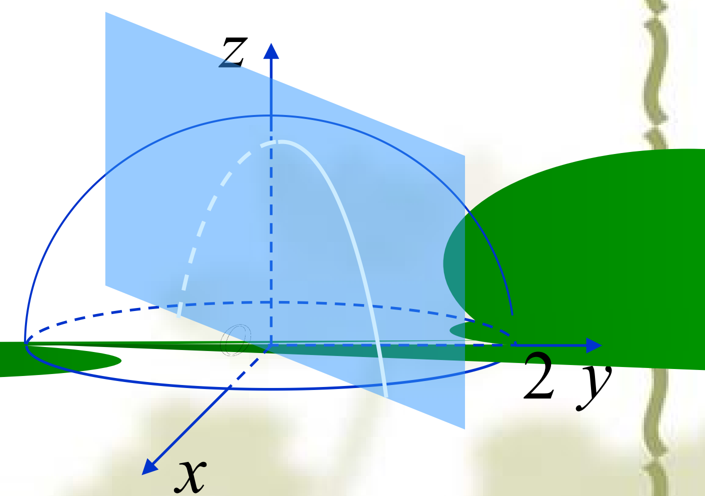
在 xoy 面上的投影曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

所围圆域: $x^2+y^2\le 1,\ z=0.$

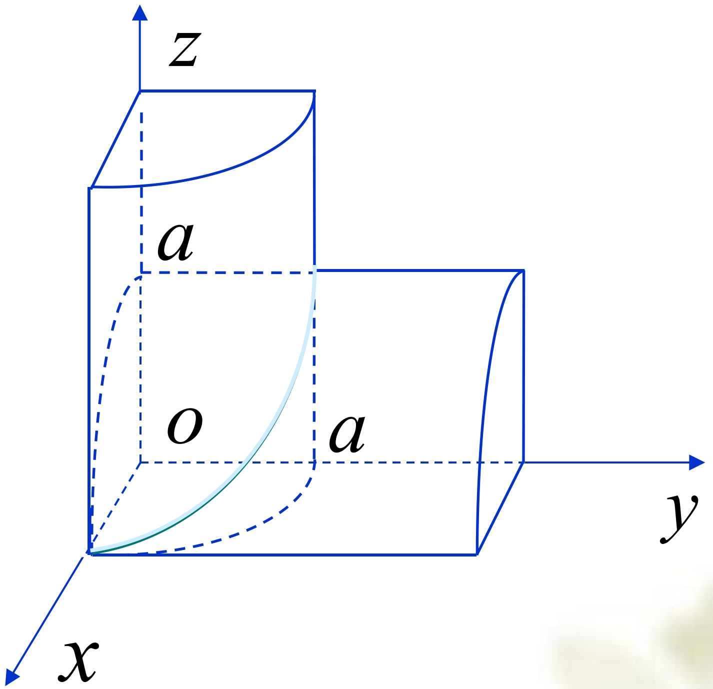
(1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ y - x = 0 \end{cases}$

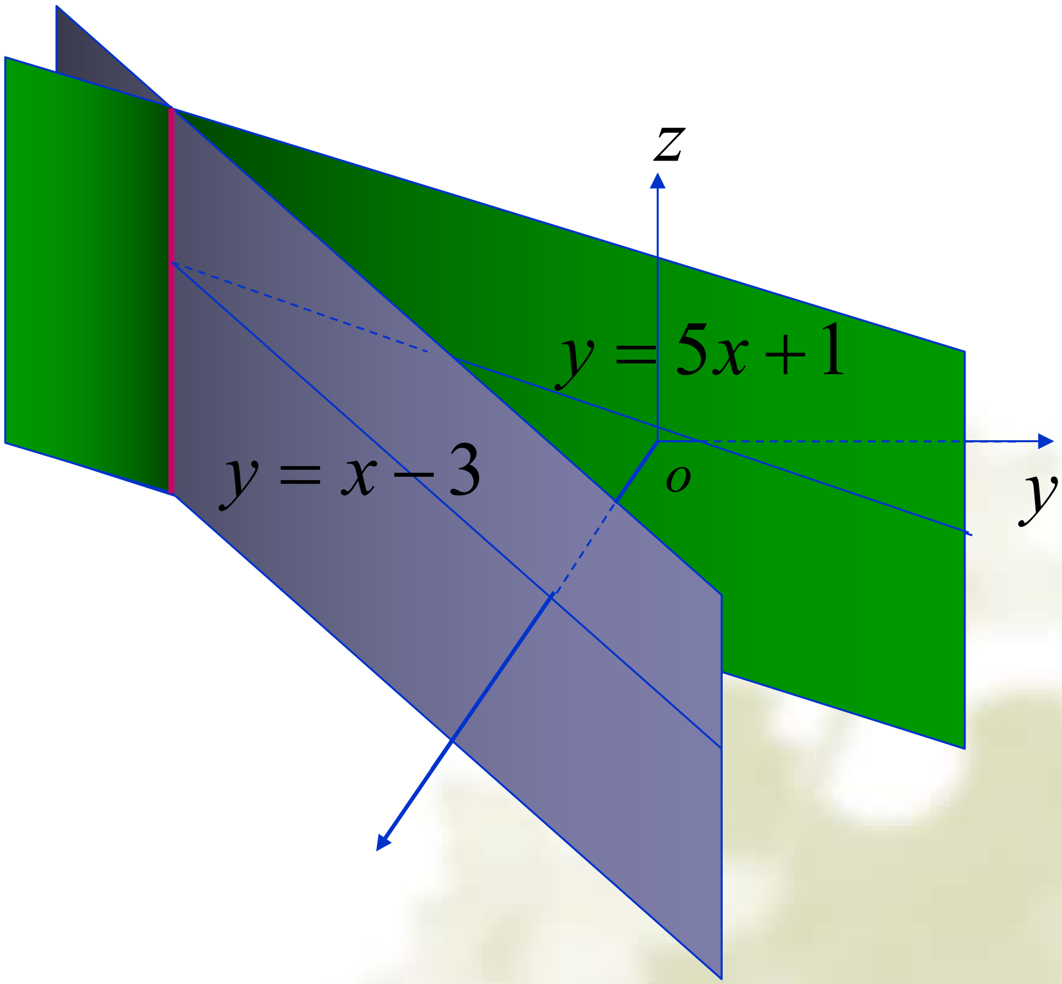




(3) $\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$

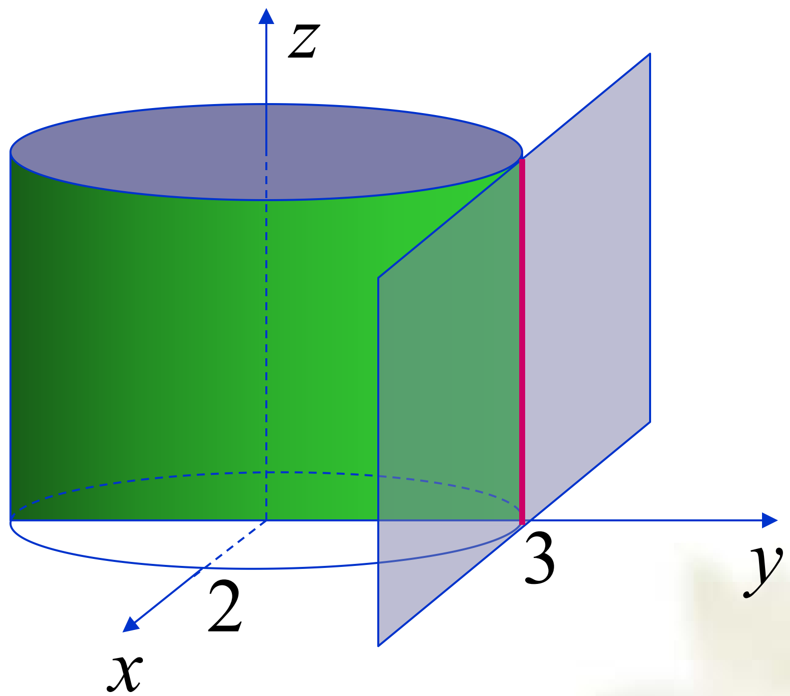


$$\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$$



机动 目录 上页 下页 返回 结束

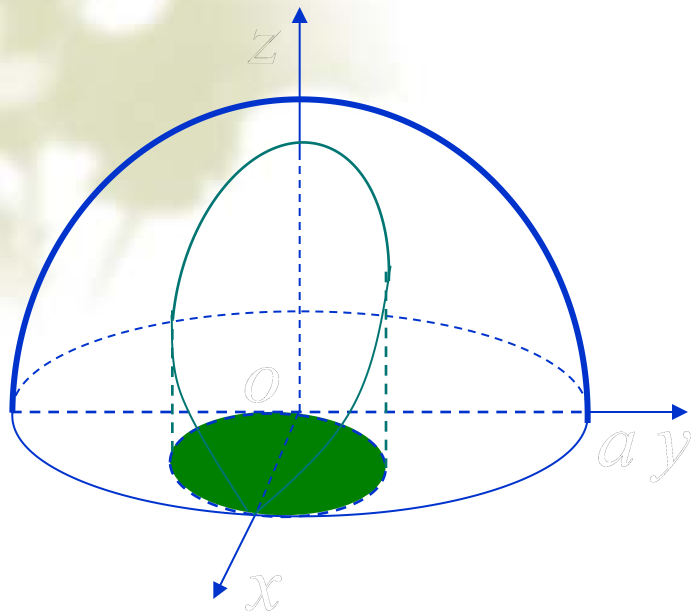
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

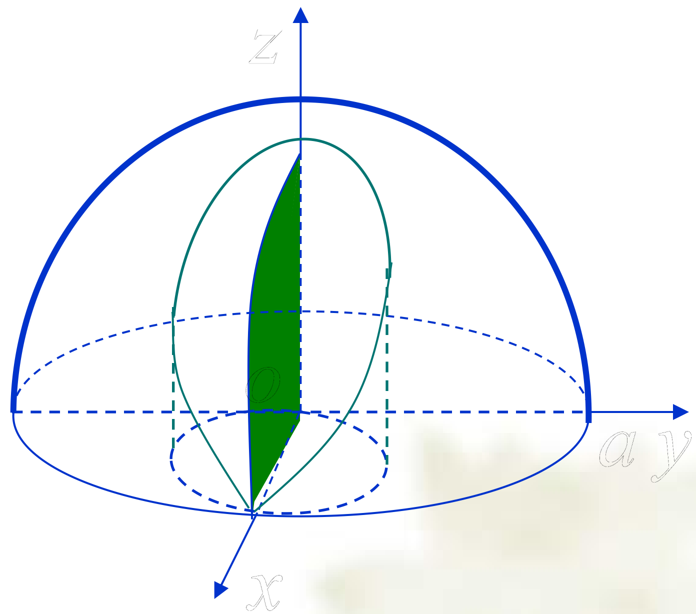


思考： 对平面 $y = b$

当 $|b| < 3$ 时, 交线情况如何?

当 $|b| > 3$ 时, 交线情况如何?





$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le ax \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \le a^2 \quad (x \ge 0,\ z \ge 0) \\ y = 0 \end{cases}$$

备用题 求曲线 $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转的曲面与平面 $x+y+z=1$ 的交线在 xoy 平面的投影曲线方程.

解: 旋转曲面方程为 $z = x^2 + y^2$,它与所给平面的

交线为
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

此曲线向 xoy 面的投影柱面方程为

$$x + y + x^2 + y^2 = 1$$

此曲线在 xoy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$