

第三章 平面与空间直线

§ 3.1 平面的方程

§ 3.2 平面与点的相关位置

§ 3.3 两平面的相关位置

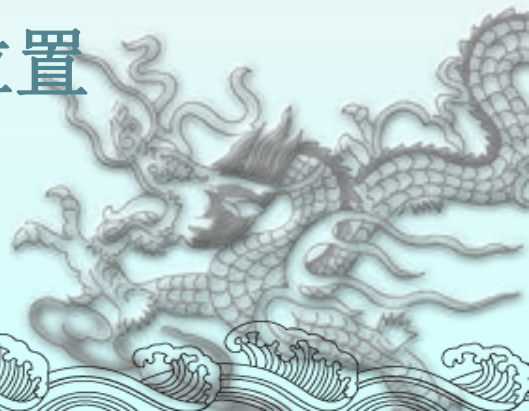
§ 3.4 空间直线的方程

§ 3.5 直线与平面的相关位置

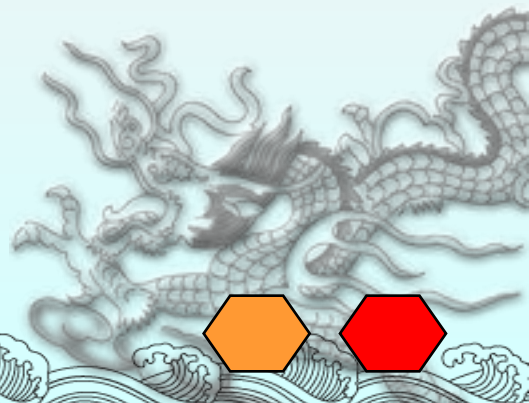
§ 3.6 空间两直线的相关位置

§ 3.7 空间直线与点的相关位置

§ 3.8 平面束



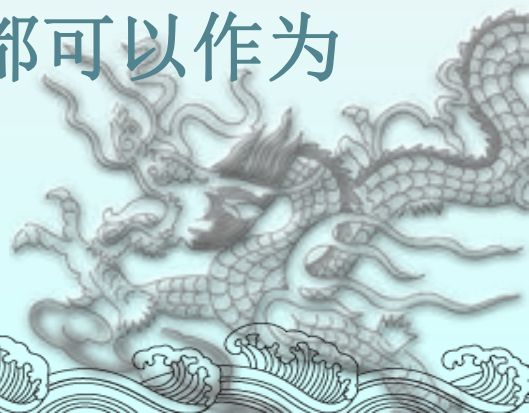
3.1 平面的方程



1 由平面上一点与平面的方位向量决定的平面方程

在空间给定了一点 M_0 与两个不共线的向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} ，那么通过点 M_0 且与向量 \mathbf{a} ， \mathbf{b} 平行的平面就唯一地被确定，向量 \mathbf{a} ， \mathbf{b} 叫做平面的**方位向量**。

任何一对与平面平行的不共线向量都可以作为平面的方位向量。 **方位向量不唯一**



在空间,取标架 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$,并设点 M_0 的径矢 $\overrightarrow{OM_0} = r_0$, 平面上的任意一点 M 的径矢为 $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ (图 3-1),显然点 M 在平面上的充要条件为矢量 $\overrightarrow{MM_0}$ 与 \mathbf{a}, \mathbf{b} 共面,因为 \mathbf{a}, \mathbf{b} 不共线,所以这个共面的条件可以写成:

$$\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a} + v\vec{b}$$

又因为 $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$,所以上式可

改写为: $\vec{r} - \vec{r}_0 = u\vec{a} + v\vec{b}$, 即

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}, \quad (3.1-1)$$

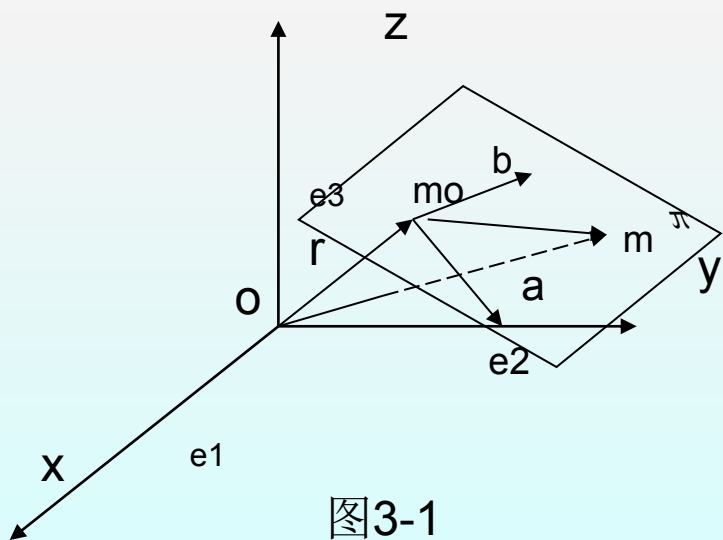
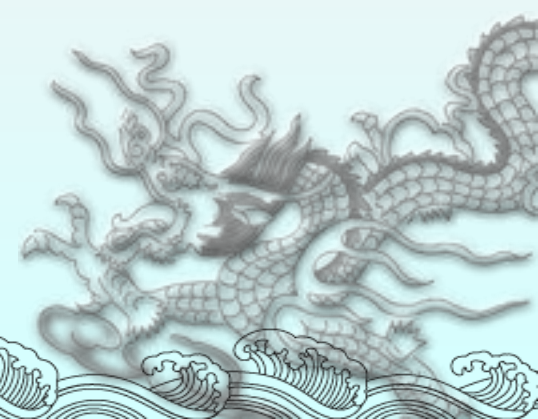
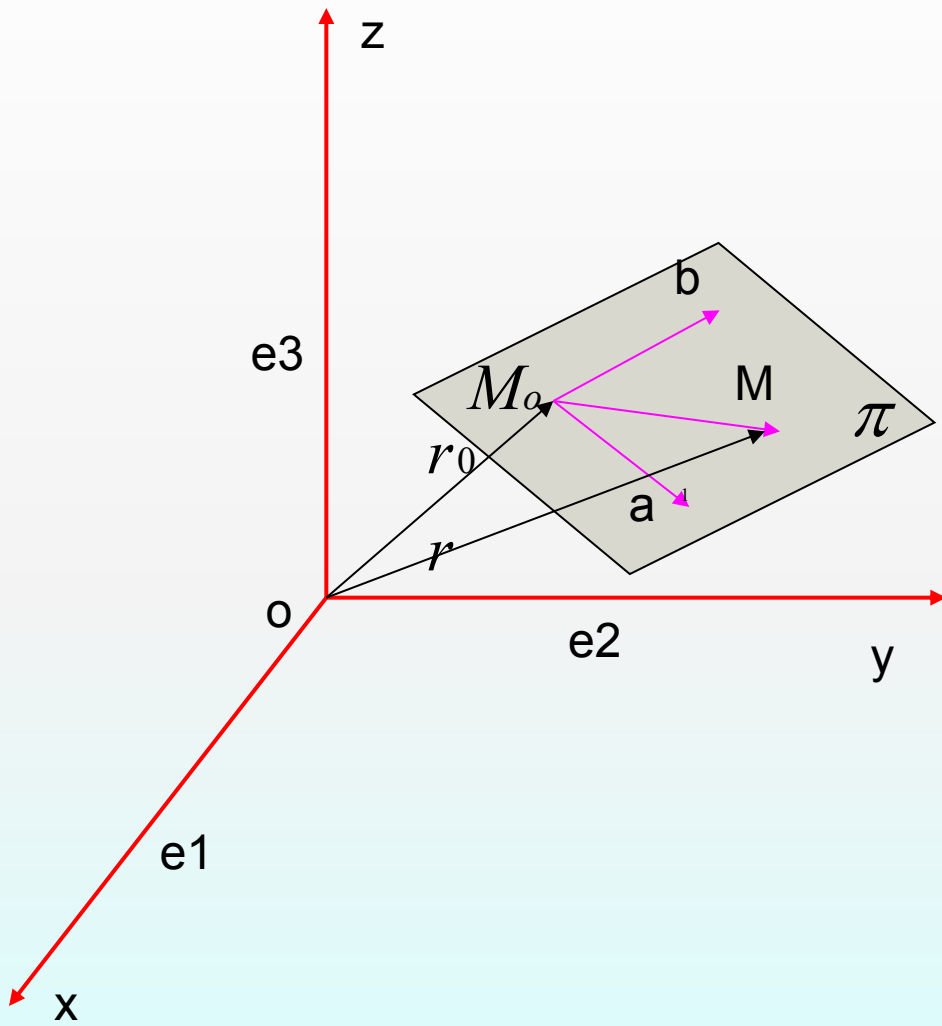


图3-1

(3.1-1)叫做平面 π 的矢量式参数方



如果设点 M_0, M 的坐标分别为 $(x_0, y_0, z_0), (x, y, z)$ 那么

$$\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \vec{r} = \{x, y, z\};$$

并设 $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$

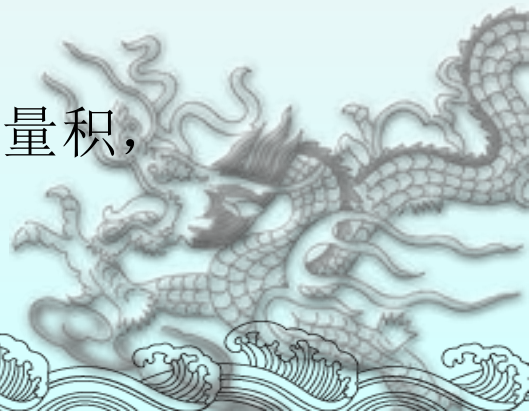
那么由(3.1-1)得

$$\begin{cases} x = x_0 + X_1u + X_2v, \\ y = y_0 + Y_1u + Y_2v, \\ z = z_0 + Z_1u + Z_2v. \end{cases} \quad (3.1-2)$$

(3.1-2)叫做平面 π 的坐标式参数方程，其中 u, v 为参数。

从(3.1-1)或 $\vec{r} - \vec{r}_0 = u\vec{a} + v\vec{b}$ 两边与 $\vec{a} \times \vec{b}$ 作数量积，消去参数 u, v 得

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}) = 0,$$



从 (3.1-2) 消去参数 u, v 得

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1-4)$$

(3.1-1) , (3.1-2), (3.1-3), (3.1-4) 都叫做平面的 **点位式方程**



例1 已知不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ 通过 M_1, M_2, M_3 三点的平面 π 的方程.

解: 取平面 π 的方位矢量

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{b} = \overrightarrow{M_1 M_3}$$

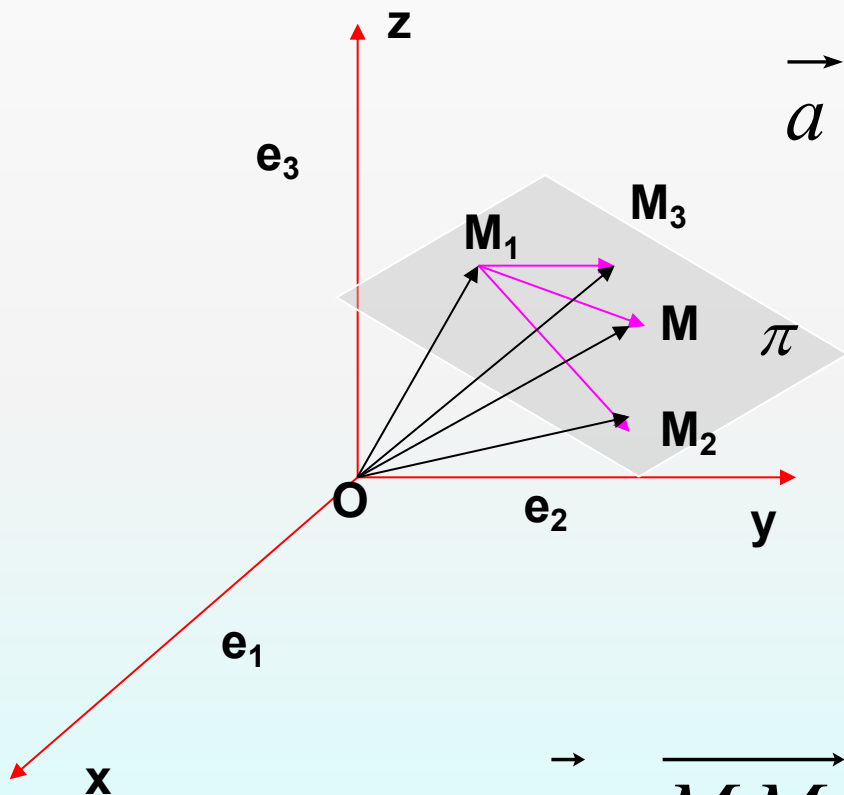
并设点 $M(x, y, z)$ 为平面 π 上的任意一点(图3-2),

那么 $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$,

$$\vec{r}_i = \overrightarrow{OM_i} = \{x_i, y_i, z_i\}, (i = 1, 2, 3)$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{M_1 M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\},$$

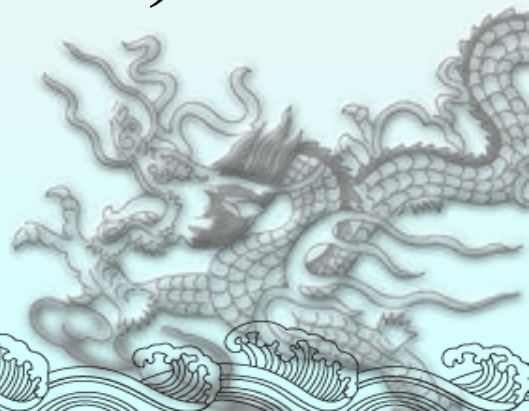


因此平面 π 的矢量式参数方程为:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + u(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + v(\vec{r}_3 - \vec{r}_1); \quad (3.1-5)$$

坐标式参数方程为:

$$\begin{cases} x = x_1 + u(x_2 - x_1) + v(x_3 - x_1), \\ y = y_1 + u(y_2 - y_1) + v(y_3 - y_1), \\ z = z_1 + u(z_2 - z_1) + v(z_3 - z_1); \end{cases} \quad (3.1-6)$$



从(3.1-5)与(3.1-6)分别消去参数 u, v 得

$$(r - r_1, r_2 - r_1, r_3 - r_1) = 0; \quad (3.1-7)$$

与

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0; \quad (3.1-8)$$

(3.1-8)又可改写为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.1-8')$$

方程(3.1-5)——(3.1-8')都叫做平面的三点式方程。

作为三点式的特例,如果已知三点为平面与三坐标轴的交点 $M_1(a,0,0), M_2(0,b,0), M_3(0,0,c)$ (其中 $abc \neq 0$) (图 3-3),那么由(3.1-8)得

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

把它展开可写成

$$bcx + acy + abz = abc,$$

由于 $abc \neq 0$,上式可改写为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3.1-9)$$

(3.1-9)叫做平面的截距式方程,其中 a, b, c 分别叫做平面在三坐标轴上的截距.

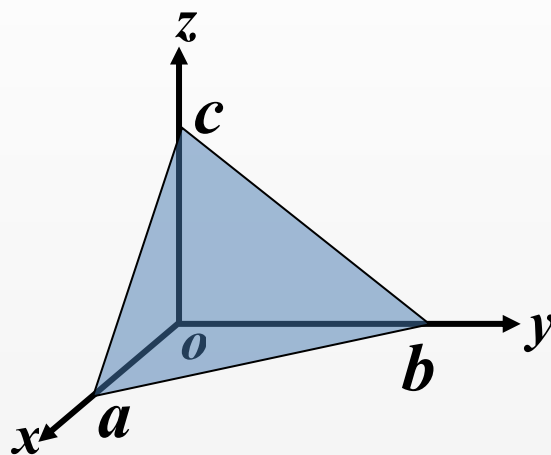
平面的截距式方程

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

x 轴上截距

y 轴上截距

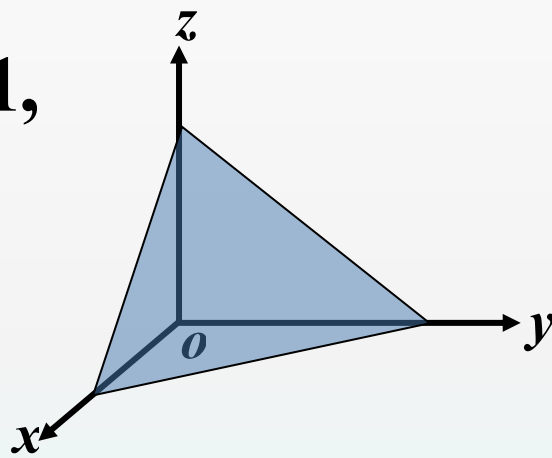
z 轴上截距



例 求平行于平面 $6x + y + 6z + 5 = 0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$,

$$\because V = 1, \therefore \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |abc| = 1,$$



由所求平面与已知平面平行得

(向量平行的充要条件) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c},$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{1} = \frac{1}{6},$$

化简得 $\frac{1}{6a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{6c}$, 令 $\frac{1}{6a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{6c} = t$

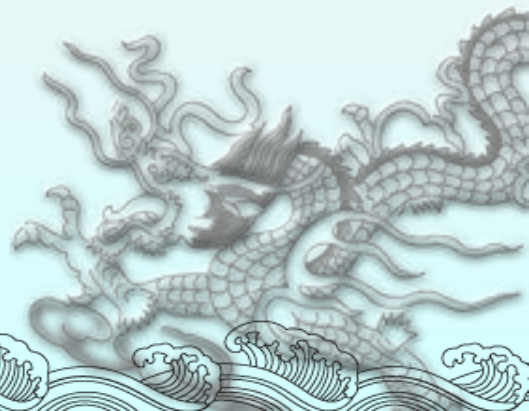
$\Rightarrow a = \frac{1}{6t}, b = \frac{1}{t}, c = \frac{1}{6t}$, 代入体积公式

$$\therefore 1 = \frac{1}{6} \cdot \left| \frac{1}{6t} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{6t} \right| \Rightarrow t = \pm \frac{1}{6},$$

$$\therefore a = \pm 1, b = \pm 6, c = \pm 1,$$

所求平面方程为 $6x + y + 6z = 6.$

或 $6x + y + 6z = -6.$



2平面的点法式方程

由平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

$= D$

即 任一平面 $\xrightleftharpoons[\text{?}]{\text{表示}}$ $Ax + By + Cz + D = 0$
(A,B,C不同时为零)

不妨设 $A \neq 0$, 则

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0, \text{ 为一平面.}$$

$Ax + By + Cz + D = 0$ 平面的一般方程

可知法向量 $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

2平面的方程

定理

空间中任一平面的方程都可以表示成一个关于变量 x, y, z 的一次方程；反过来，每一个关于变量 x, y, z 的一次方程都表示一个平面。

$Ax+By+Cz+D=0$ 叫做平面的一般方程



$Ax + By + Cz + D = 0$ 平面的一般方程

平面一般方程的几种特殊情况：

(1) $D = 0$ ，平面通过坐标原点；

(2) $A = 0$, $\begin{cases} D = 0, & \text{平面通过 } x \text{ 轴;} \\ D \neq 0, & \text{平面平行于 } x \text{ 轴;} \end{cases}$

类似地可讨论 $B = 0, C = 0$ 情形.

(3) $A = B = 0$, $\begin{cases} D = 0, & \text{有 } z = 0, \text{ 即 } xoy \text{ 面.} \\ D \neq 0, & \text{平面平行于 } xoy \text{ 坐标面;} \end{cases}$

类似可讨论 $B=C=0, A=C=0$



例 2 设平面过原点及点 $(6, -3, 2)$ ，且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直，求此平面方程。

解 设平面方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

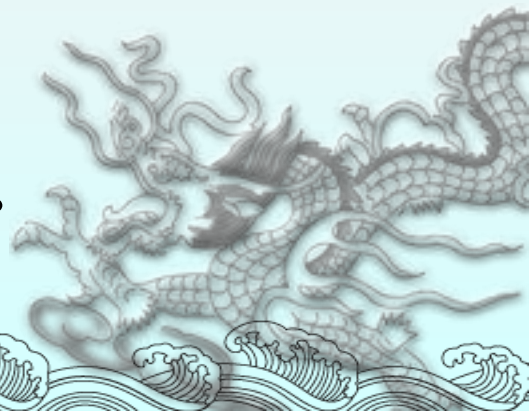
由平面过原点知 $D = 0$,

由平面过点 $(6, -3, 2)$ 知 $6A - 3B + 2C = 0$

$\because \vec{n} \perp \{4, -1, 2\}$, $\therefore 4A - B + 2C = 0$

$$\Rightarrow A = B = -\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x + 2y - 3z = 0$.

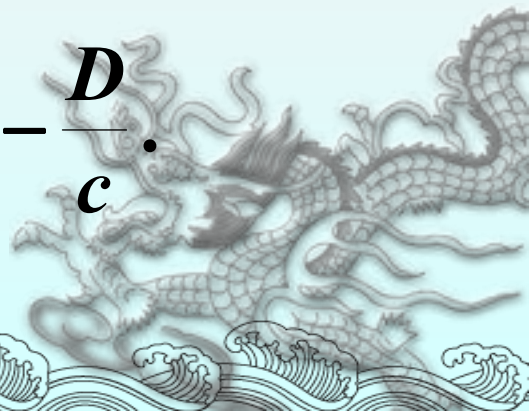


例 3 设平面与 x, y, z 三轴分别交于 $P(a, 0, 0)$ 、 $Q(0, b, 0)$ 、 $R(0, 0, c)$ (其中 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$)，求此平面方程。

解 设平面方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

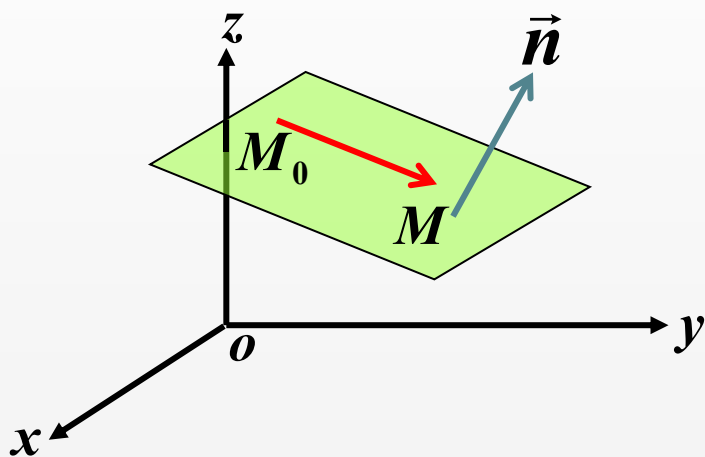
将三点坐标代入得
$$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$



3 平面的点法式方程

如果在空间给定一点 M_0 和一个非零向量 \vec{n} ，那么通过点 M_0 与向量 \vec{n} 垂直的平面也惟一地被确定。

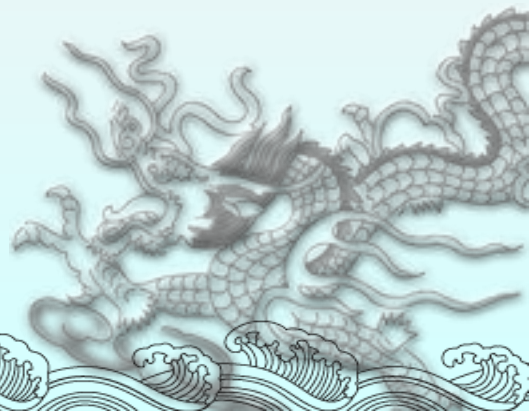


法向量 \vec{n} 的特征 **非零** 且 **垂直** 于平面内的任一向量。

已知 $\vec{n} = \{A, B, C\}$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$,

设平面上的任一点为 $M(x, y, z)$

必有 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$



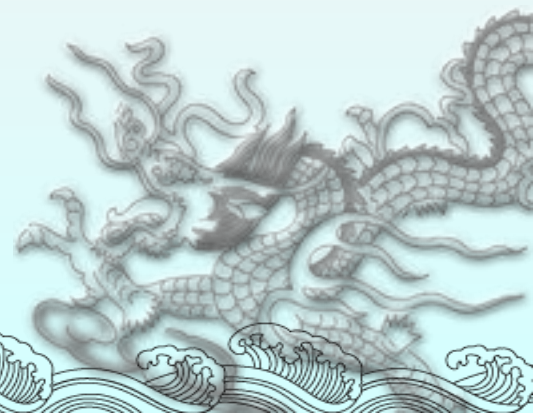
$$\because \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

$$\therefore A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

即为平面的点法式方程

其中法向量 $\vec{n} = \{A, B, C\}$,

已知点 (x_0, y_0, z_0) .



例求过点(1,1,1)，且垂直于平面 $x - y + z = 7$ 和 $3x + 2y - 12z + 5 = 0$ 的平面方程。

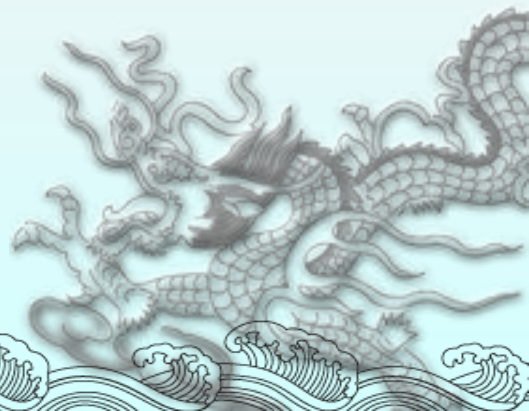
解 $\vec{n}_1 = \{1, -1, 1\}, \quad \vec{n}_2 = \{3, 2, -12\}$

取法向量 $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{10, 15, 5\},$

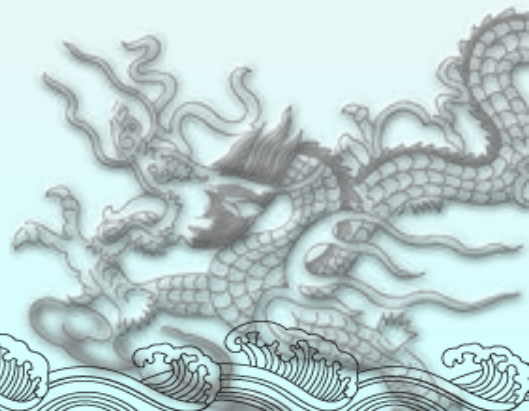
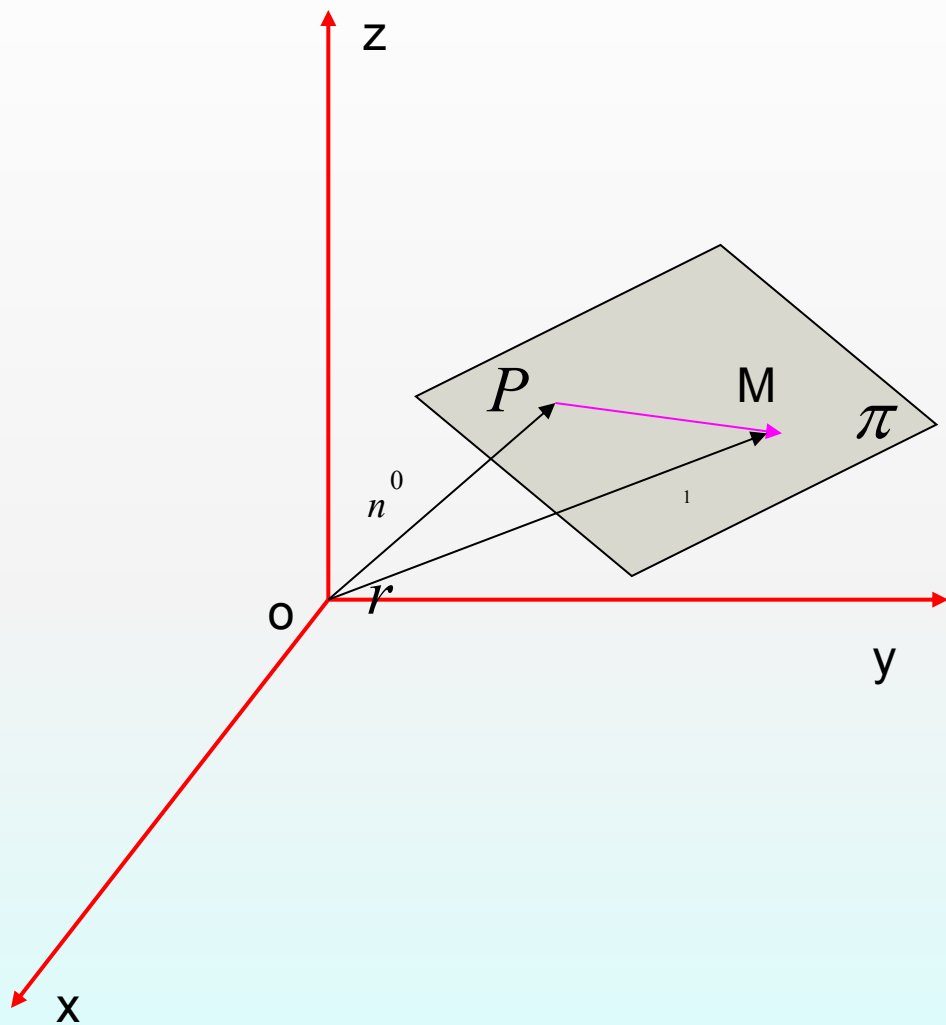
所求平面方程为

$$10(x - 1) + 15(y - 1) + 5(z - 1) = 0,$$

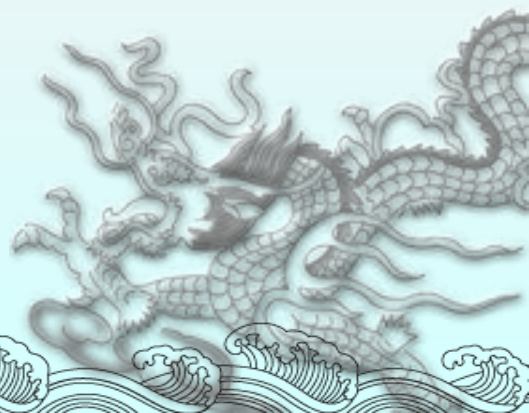
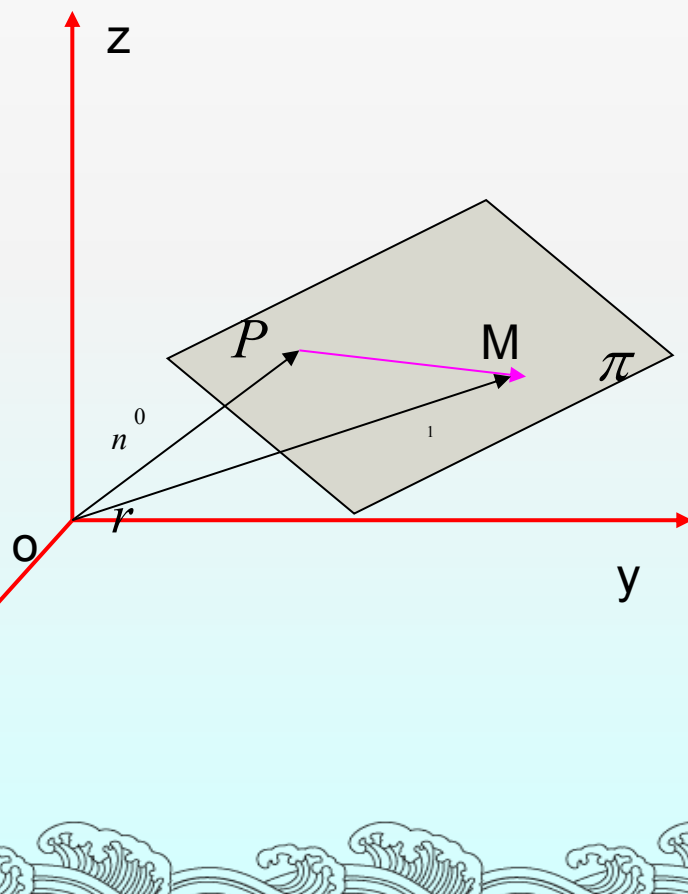
化简得 $2x + 3y + z - 6 = 0.$

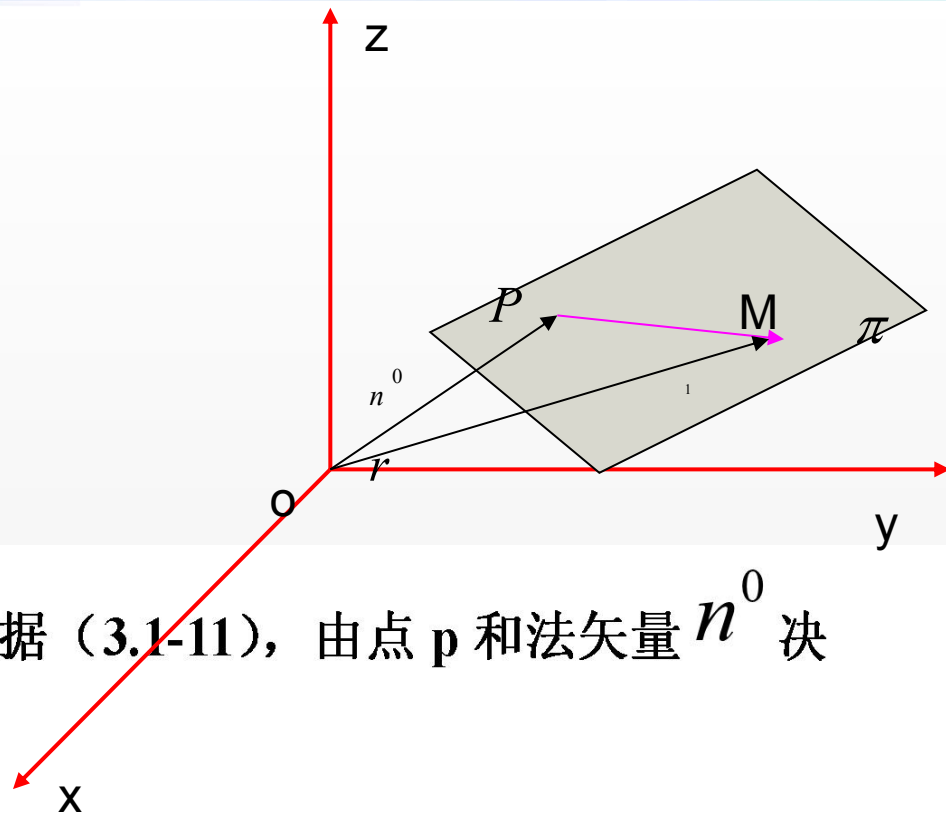


4平面的法式方程



如果平面上的点 M_0 特殊的取自原点 O 向平面 π 所引垂线的垂足 P ，而 π 的法向量取单位法向量 \vec{n}^0 。当平面不过原点时， \vec{n}^0 的正向取做与矢量 \vec{OP} 相同（图 3-5）；当平面通过原点时， \vec{n}^0 的正向在垂直于平面的两个方向中任意取定一个，设 $|\vec{OP}|=p$ ，





那么点 p 的径矢 $\overrightarrow{OP} = pn^0$ ，因此根据 (3.1-11)，由点 p 和法矢量 n^0 决定的平面 π 的方程为：

$$\vec{n}^0 \cdot (\vec{r} - p\vec{n}^0) = 0,$$

式中 r 是平面 π 上任意点 M 的径矢。因为 $\vec{n}^0 \cdot \vec{n}^0 = 1$ ，所以上式可写成

$$\underline{\vec{n}^0 \cdot \vec{r} - p = 0}, \quad (3.1-13)$$

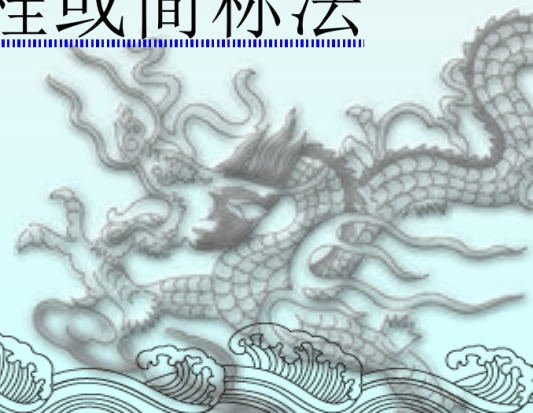
(3.1-13) 叫做平面的矢量式法式方程。

如果设 $\vec{r} = \{x, y, z\}$, $\vec{n}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$,

那么由 (3.1-13) 得

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (3.1-14)$$

(3.1-14) 叫做平面的坐标式法式方程或简称法式方程。



平面的法式方程(3.1-14)是具有下列两个特征的一种一般方程:

(1) 一次项的系数是单位法矢量的分量, 它们的平方和等于 1

(2) 因为 p 是原点 O 到平面 π 的距离, 所以常数项 $-p \leq 0$ 。



根据平面的法式方程的两个特征，我们不难把平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 化为平面的法式方程。事实上， $n=\{A,B,C\}$ 是平面的法矢量，而 $r=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$ ，所以 (3.1-10) 可写成：

$$n.r + D = 0, \quad (3.1-15)$$



把 (3.1-15) 与 (3.1-13) 比较可知, 只要以

$$\lambda = \frac{1}{\pm |\vec{n}|} = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

乘 (3.1-10) 就可得到法式方程:

$$\frac{Ax}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{By}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{Cz}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0, \quad (3.1-16)$$

其中 λ 的正负号选取一个, 使它满足 $\lambda D = -P \leq 0$, 或说当 $D \neq 0$ 时, 取 λ 的符号与 D 异号; 当 $D=0$ 时, λ 的符任意 (正的或负的)。



我们在前面已指出在直角坐标系下，平面的一般方程 (3.1-10) 中的一次项系数 A , B , C 为平面的一个法向量分量，在这里我们又看到了 $-\lambda D = P$ 等于原点到这个平面的距离。平面的一般方程 (3.1-10) 乘上取定符号的 λ 以后，便可得到平面的法式方程 (3.1-16)，通常我们称这个变形为方程 (3.1-10) 的法式化，而因子

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (\text{在取定符号后})$$

就叫法式化因子。



例3 已知两点 $M_1(1,-2,3)$ 与 $M_2(3,0,-1)$, 求线段 M_1M_2 的垂直平分面 π 的方程。

解: 因为矢量 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{2, 2, -4\} = 2\{1, 1, -2\}$ 垂直于平面 π ,
所以 π 的一个法矢量为

$$n = \{1, 1, -2\},$$

所求平面 π 又通过 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的中点 $M_0(2, -1, 1)$, 因此平面

$$\pi \text{ 的点法式方程为 } (x-2) + (y+1) - 2(z-1) = 0,$$

所以化简整理, 得所求平面 π 的方程为

$$x + y - 2z + 1 = 0.$$

例 4: 把平面 π 的方程 $3x - 2y + 6z + 14 = 0$ 化为法式方程, 求自原点指向平面 π 的单位法矢量及其方向余弦, 并求原点到平面的距离。

解 因为 $A = 3, B = -2, C = 6, D = 14 > 0$

所以取法式化因子

$$\lambda = \frac{1}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{-\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = -\frac{1}{7},$$

将已知的方程乘上 $\lambda = -\frac{1}{7}$, 即得法式方程:



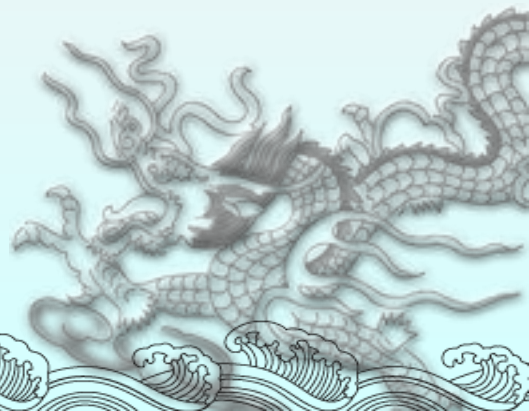
$$-\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{6}{7}z - 2 = 0,$$

原点指向平面 π 的单位法矢量为

$$n^0 = \left\{ -\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{6}{7} \right\},$$
 它的方向余弦为 $\cos \alpha$

$$= -\frac{3}{7}, \quad \cos \beta = \frac{2}{7}, \quad \cos \gamma = -\frac{6}{7},$$
 原点 O 到

平面 π 的距离为 $p = 2$.



四、课堂小结

1. 确定平面的关键要素：**平面上一点和一个法向量**；
2. 平面方程之间的相互关系。

