第六节　子空间的交与和

主要内容

- 子空间的交
- 子空间的和
- 子空间的交与和的性质
- 例题
- 子空间的交与和的维数

一、子空间的交

1. 定义

定义　设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间，称

$$V_1 \cap V_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V_1 \text{ 且 } \alpha \in V_2\}$$

为 V_1, V_2 的交.

2. 性质

定理 5 如果V_1, V_2是线性空间 V 的两个子空间，那么它们的交$V_1\cap V_2$也是 V 的子空间.

证明 首先，由 $0\in V_1$， $0\in V_2$， 可知 $0\in V_1\cap V_2$， 因而 $V_1\cap V_2$是非空的. 其次，如果$\alpha,\beta\in V_1\cap V_2$，即 $\alpha,\beta\in V_1$， 而且$\alpha,\beta\in V_2$， 那么 $\alpha+\beta\in V_1$， $\alpha+\beta\in V_2$， 因此 $\alpha+\beta\in V_1\cap V_2$. 对数量乘积可以同样地证明. 所以$V_1\cap V_2$是 V 的子空间. 证毕

3. 子空间的交的运算规律

1) 交换律 $V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1$;

2) 结合律 $(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$.

由结合律，可以定义多个子空间的交：

$$V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s = \bigcap_{i=1}^{s} V_i,$$

它也是子空间.

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

二、子空间的和

1. 定义

定义 8　设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间，所谓 **V_1 与 V_2 的和**，是指由所有能表示成 $\alpha_1+\alpha_2$，而 $\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$ 的向量组成的子集合，记作 V_1+V_2，即

$$V_1+V_2=\{\alpha \mid \alpha=\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1\in V_1, \alpha_2\in V_2\}$$

2. 性质

定理 6 如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间，那么它们的和 $V_1 + V_2$ 也是 V 的子空间.

证明 首先，$V_1 + V_2$ 显然是非空的. 其次如果 $\alpha, \beta \in V_1 + V_2$，即

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2,$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2, \beta_1 \in V_1, \beta_2 \in V_2,$$

那么 $$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2).$$

又因为 V_1, V_2 是子空间，故有

$$\alpha_1+\beta_1\in V_1,\quad \alpha_2+\beta_2\in V_2.$$

因此

$$\alpha+\beta\in V_1+V_2.$$

同样，

$$k\alpha=k\alpha_1+k\alpha_2\in V_1+V_2.$$

所以，V_1+V_2 是 V 的子空间.

证毕

3. 子空间的和的运算规律

1) 交换律 $V_1+V_2=V_2+V_1$;

2) 结合律 $(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$.

由结合律，我们可以定义多个子空间的和:

$$V_1+V_2+\cdots+V_s=\sum_{i=1}^{s}V_i,$$

它是由所有表示成

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s,\ \alpha_i\in V_i\ (i=1,2,\ldots,s)$$

的向量组的子空间.

三、子空间的交与和的性质

性质 1 设 V_1, V_2, W 都是子空间，那么

(1) 由 $W \subset V_1$ 与 $W \subset V_2$ 可推出 $W \subset V_1 \cap V_2$；

(2) 由 $W \supset V_1$ 与 $W \supset V_2$ 可推出 $W \supset V_1 + V_2$.

性质 2 对于子空间 V_1, V_2，以下三个论断是等价的：

1) $V_1 \subset V_2$； 2) $V_1 \cap V_2 = V_1$； 3) $V_1 + V_2 = V_2$.

四、例题

例 1 设 $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$，$V_2 = L(\alpha_1, \alpha_3)$ 是 R^3 两个不同的 2 维子空间，求 $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$，并指它们的几何意义.

解 因为 V_1 和 V_2 是两个不同的子空间，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，否则 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示从而 $V_1 = V_2$ 与题设矛盾. 于是由子空间的交与和的定义可得 $V_1 \cap V_2 = L(\alpha_1)$，$V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$= R^3$.

其几何意义是：$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$ 是向量 α_1, α_2 所确定的平面， $V_2 = L(\alpha_1, \alpha_3)$ 是向量 α_1, α_3 所确定的平面， $V_1 \cap V_2$ 是这两个平面的交线， $V_1 + V_2$ 是整个3维空间． 如图6-6所示．

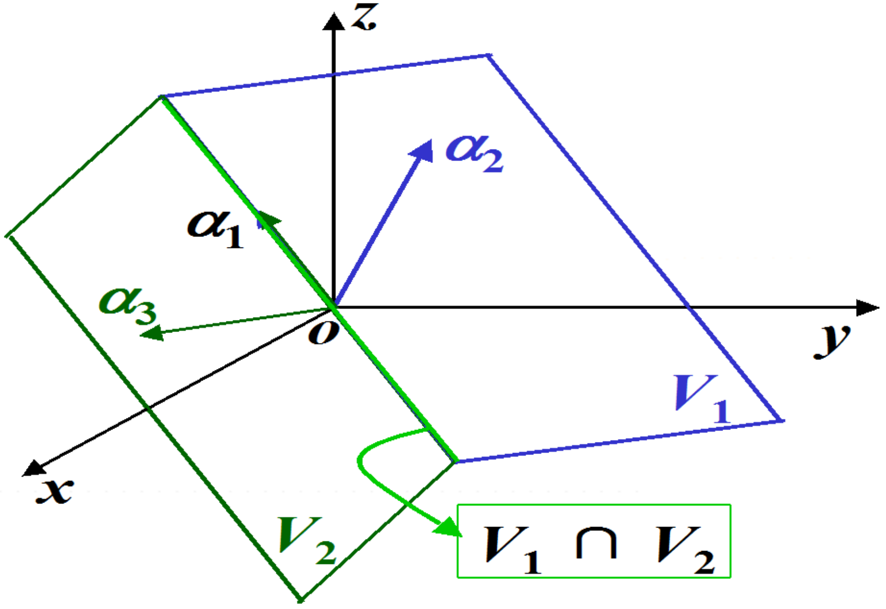

图 6-6

例 2 设 V_1, V_2 分别是 R^3 过原点的直线和平面（直线不在平面上)上的全体向量构成的子空间.

求 $V_1 \cap V_2$ 和 $V_1 + V_2$，并指它们的几何意义.

解 由定义容易求得

$$V_1 \cap V_2 = \{0\},\quad V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R^3.$$

其几何意义如图 6-7 所示

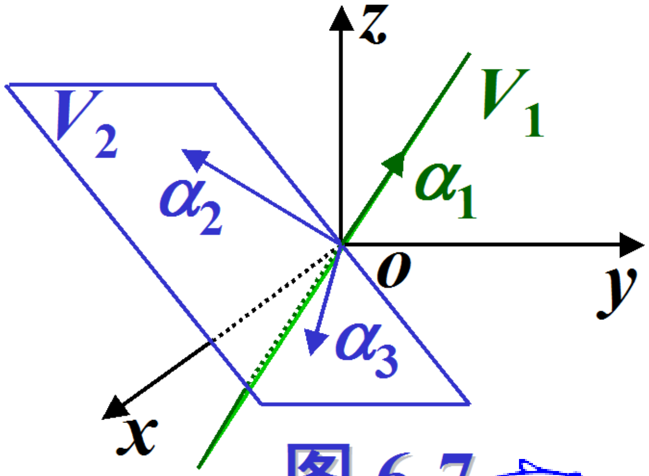

图 6-7

例 3　设 V_1, V_2 分别是 P^n 中齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解空间，那么 $V_1 \cap V_2$ 就是齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1 + b_{t2}x_2 + \cdots + b_{tn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解空间.

例 4　在一个线性空间 V 中，有

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$$

$$= L(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t)$$

五、子空间的交与和的维数

定理 8 （维数公式） 如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间，那么

$$维(V_1)+维(V_2)=维(V_1+V_2)+维(V_1\cap V_2).$$

证明 设 V_1, V_2 的维数分别是 s, t，$V_1 \cap V_2$ 的维数是 m.

取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

如果 $m = 0$，这个基是空集，下面的讨论中

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 不出现，但讨论同样能进行. 由

它可以扩充成 V_1 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{s-m},$$

也可以扩充成 V_2 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-m}.$$

下证，向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-m}$$

是 V_1+V_2 的一组基. 这样，V_1+V_2 的维数就等于 $s+t-m$，因而维数公式成立.

因为

$$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{s-m}),$$

$$V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-m}).$$

所以

$$V_1+V_2 = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-m}).$$

下证：向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-m}$$

是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m$$

$$+ \ p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + \ldots + p_{s-m}\beta_{s-m}$$

$$+ \ q_1\gamma_1 + q_2\gamma_2 + \ldots + q_{t-m}\gamma_{t-m} = 0 .$$

令

$$\alpha = k_1\alpha_1 + \ldots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \ldots + p_{s-m}\beta_{s-m}$$

$$= -q_1\gamma_1 - q_2\gamma_2 - \ldots - q_{t-m}\gamma_{t-m} .$$

由 $\alpha = k_1\alpha_1 + \ldots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \ldots + p_{s-m}\beta_{s-m}$

可知，$\alpha \in V_1$； 由 $\alpha = -q_1\gamma_1 - q_2\gamma_2 - \ldots - q_{t-m}\gamma_{t-m}$

可知，$\alpha \in V_2$. 于是 $\alpha \in V_1 \cap V_2$，即 α 可以被

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表示. 令 $\alpha = l_1\alpha_1 + \ldots + l_m\alpha_m$，

则

$$l_1\alpha_1 + \ldots + l_m\alpha_m + q_1\gamma_1 + \ldots + q_{t-m}\gamma_{t-m} = 0.$$

由于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-m}$ 线性无关，所以

$$l_1 = \ldots = l_m = q_1 = \ldots = q_{t-m} = 0,$$

因而 $\alpha = 0$. 从而有

$$k_1\alpha_1+\ldots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\ldots+p_{s-m}\beta_{s-m}=0.$$

由于 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_{s-m}$ 线性无关，又得

$$k_1=\ldots=k_m=p_1=\ldots=p_{s-m}=0.$$

这就证明了

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_{s-m},\gamma_1,\ldots,\gamma_{t-m}$$

线性无关，因而它是 V_1+V_2 的一组基，故维数公式成立.

证毕

文山学院
WENSHAN UNIVERSITY

从维数公式可以看到，和的维数往往要比维数的和来得小. 例如，在三维几何空间中，两张通过原点的不同的平面之和是整个三维空间，而其维数之和却等于4. 由此说明这两张平面的交是一维的直线.

推论 若 n 维线性空间 V 中两个子空间 V_1, V_2 的维数之和大于 n，那么 V_1, V_2 必含有非零的公共向量.

证明 由假设

$$维(V_1+V_2)+维(V_1\cap V_2)=维(V_1)+维(V_2)>n.$$

但因 V_1+V_2 是 V 的子空间而有

$$维(V_1+V_2)\le n,$$

所以

$$维(V_1\cap V_2)>0.$$

这就是说， $V_1\cap V_2$ 中含有非零向量. **证毕**

例 5 设 $V=P^4$，$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，其中

$$\alpha_1=(1,2,-1,-3),\ \alpha_2=(-1,-1,2,1),\ \alpha_3=(-1,-3,0,5),$$
$$\beta_1=(-1,0,4,-2),\ \beta_2=(0,5,9,-14).$$

求 V_1, V_2, $V_1\cap V_2$, V_1+V_2 的维数与基.

解 ☜

解 因为

$$V_1 + V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + L(\beta_1, \beta_2)$$
$$= L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2),$$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 的一个极大无关组就是 $V_1 + V_2$ 的一组基. 把向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 中的每个向量作为矩阵的一列，构造矩阵 A，对A 进行初等行变换，化成行最简形:

$$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\beta_1^T,\beta_2^T)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -3 & 0 & 5\\ -1 & 2 & 0 & 4 & 9\\ -3 & 1 & 5 & -2 & -14\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由 A 的行最简形矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 线性无关，且 $\beta_2 = \alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\beta_1$. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 是 $V_1 + V_2$ 的一组基，维$(V_1 + V_2) = 3$; α_1, α_2 是 V_1 的一组基，维$(V_1) = 2$; β_1, β_2 是V_2 的一组基，维$(V_2) = 2$.

由 $\beta_2 = \alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\beta_1$ 得

$$\alpha_1 - 3\alpha_2 = -4\beta_1 + \beta_2 = (-4, -5, 7, 6) \in V_1 \cap V_2 .$$

因为

$$维(V_1 \cap V_2) = 维(V_1) + 维(V_2) - 维(V_1 + V_2)$$

$$= 2 + 2 - 3 = 1 .$$

于是 $(-4, -5, 7, 6)$ 是 $V_1 \cap V_2$ 的一组基.

设向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$中每个向量表示3维空间中的一个平面，则$V_1, V_2$分别表示如图6-8中所示的直线，$V_1+V_2$为整个空间，$V_1 \cap V_2$为两直线所确定的平面.

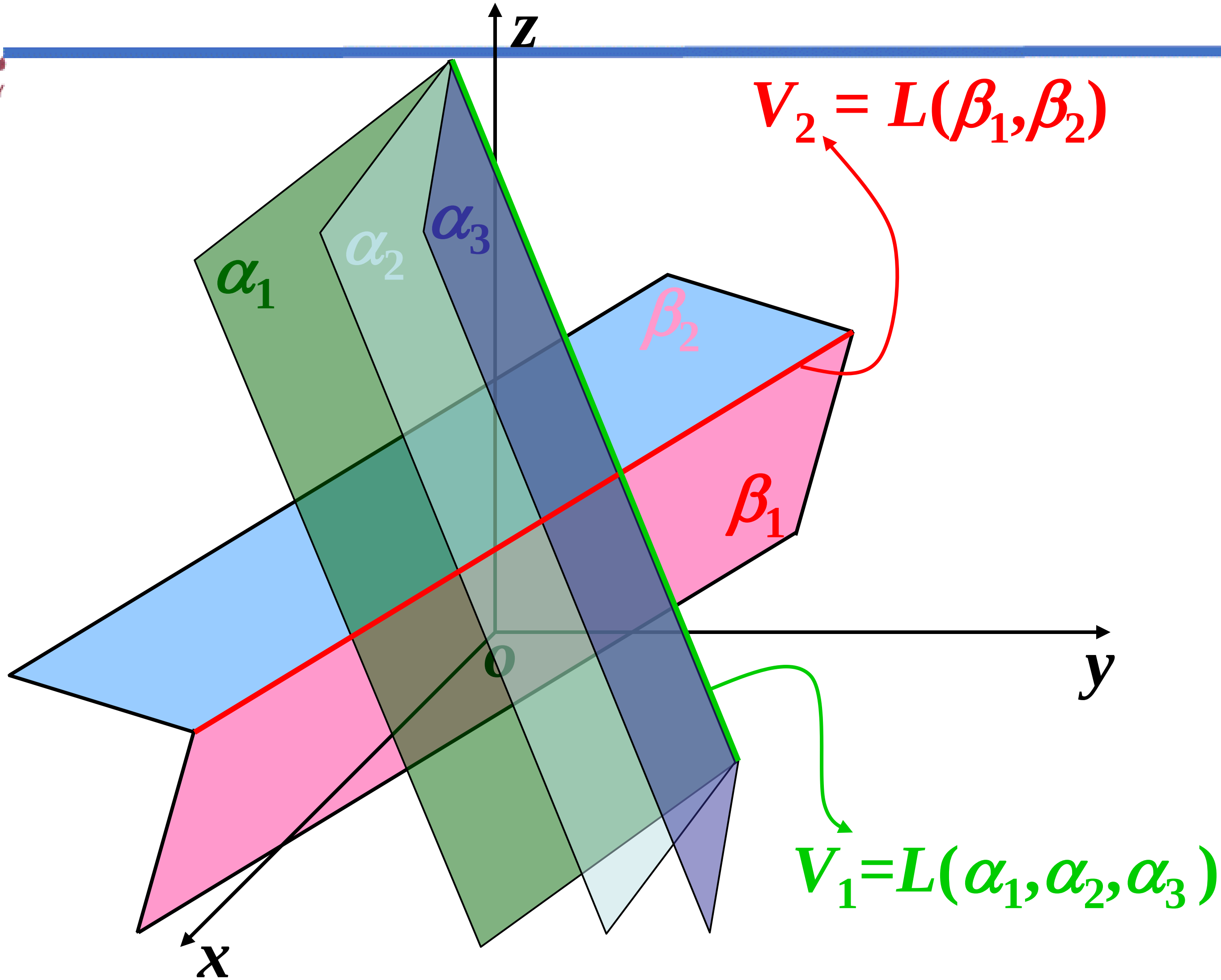
z
$V_2 = L(\beta_1,\beta_2)$
α_1
α_2
α_3
β_2
β_1
o
y
x
$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

图 6 - 8