# 《高等代数（2）》期末考试　　试卷(A)

任课教师________班级_______姓名________学号__________得分________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 | 阅卷人 | 复核人 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

| 得分 | |
|---|---|

## 一、单项选择题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。）

1. 下列二次型正惯性指数等于 2 的是　　（　）

A. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2-2x_2^2$　　B. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-2x_1x_2$

C. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2$　　D. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2$

2. 在 $R^3$ 中 $\xi$ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标是 $(x_1,2x_2,3x_3)$, 则 $\xi$ 关于基 $\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3$ 的坐标是（　）

A. $(3x_1,2x_2,x_3)$　　B. $(x_1,2x_2,3x_3)$　　C. $(x_1,x_2,x_3)$　　D. $(x_1,3x_2,2x_3)$

3. $n$ 维线性空间 $V$ 的单位变换的值域与核的维数分别是　　（　）

A. $1,n-1$　　B. $n-1,1$　　C. $n,0$　　D. $0,n$

4. 设线性变换 $\sigma$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $\sigma$ 在 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2$ 下的矩阵是（　）

A. $\begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix} c+d & c \\ a-c+b-d & a-c \end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a & b \end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d-a-b & d-b \end{pmatrix}$

5. 欧氏空间 $R^3$ 中的标准正交基是　　（　）

A. $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}),(0,1,0)$　　B. $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0),(0,0,1)$

C. $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),(0,0,0)$　　D. $(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,-1)$

| 得分 | |
|---|---|

## 二、填空题（本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。）

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+2020x_2^{\ 2}+6x_1x_3+4x_2x_3$ 的矩阵是______________________.

2. 设 $A$ 为 3 阶方阵, 其特征值为 3, -1, 2, 则 $|A|=$__________________________.

3. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性空间 V 的一组基, 则基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 $\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1$ 的过渡矩阵是_________________________________________________________________.

4. 在欧氏空间 $R^4$ 中, $\alpha=(3,2,2,1),\beta=(1,1,t,3)$, 若 $\alpha$ 与 $\beta$ 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$, 则 $t=$________.

5. $R^3$ 中的单位向量 $\beta$ 分别正交于 $(1,-1,0),(2,0,1)$, 则 $\beta=$_______________________.

| 得分 | |
|---|---|

## 三、计算题（本大题共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分。）

1. 化实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 为规范形.

2. $\lambda$ 取何值时, 二次型 $2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+\lambda x_2x_3$ 是正定的.

3. 在 $P^4$ 中求由方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0 \\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0 \end{cases}$ 确定的解空间的基与维数.

4. 设$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵 T, 使$T'AT$为对角矩阵.

| 得分 | |
|---|---|

**四、证明题**（本题型共 4 小题, 第 1、2 小题每小题 7 分, 第 3、4 小题每小题 8 分, 共 30 分。）

1. 证明：如果$V=V_1\oplus V_2, V_1=V_{11}\oplus V_{12}$, 那么$V=V_{11}\oplus V_{12}\oplus V_2$.

2. 证明：若$V_1$, $V_2$是线性空间$V$的子空间，则它们的交$V_1 \cap V_2$也是$V$的子空间.

3. 设$\sigma$是数域$F$上向量空间$V$的一个线性变换，$\xi \in V$，并且$\xi, \sigma(\xi), \cdots, \sigma^{k-1}(\xi)$都不等于零，但$\sigma^k(\xi)=0$，证明 $\xi, \sigma(\xi), \cdots, \sigma^{k-1}(\xi)$线性无关.

4. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$是欧氏空间 V 的一组基，证明：如果$\gamma \in V$使$(\gamma, \alpha_i)=0$，$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$，那么$\gamma = 0$.