矩阵的逆

文山学院 数学与工程学院

黄卫华（副教授）

主要内容

- 一、问题的提出
- 二、逆矩阵的定义
- 三、矩阵可逆的条件

（求逆公式）

一、问题的提出

1. 数的运算规则有哪些?

2.矩阵的运算规则有哪些?

二、逆矩阵的定义

1. 可逆的定义

定义 7 n 级方阵 A 称为**可逆的**，如果有n级方阵 B，

使得

$$AB = BA = E,\qquad(1)$$

这里 E 是 n 级单位矩阵.

矩阵 B 称为矩阵 A的**逆矩阵**，记为 A^{-1} .

2. 逆矩阵的唯一性

若方阵 A 可逆，则其逆矩阵唯一．

证明 设 B 和 C 都是 A 的逆矩阵，则由定义有

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

于是

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

所以逆矩阵唯一.

证毕

三、矩阵可逆的条件

现在的问题是：

（1）在什么条件下矩阵 A 是可逆的？

（2）如果 A 可逆，怎样求 A^{-1}？

1. 伴随矩阵

定义 9 设 A_{ij} 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

中元素 a_{ij} 的代数余子式，矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的**伴随矩阵**.

问：A 的伴随矩阵A^* 与矩阵 A的积 A^*A=?

矩阵A 与A的伴随矩阵A^* 的积AA^*=?

由行列式按一行(列)展开的公式立即得出：

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix} = dE \qquad (2)$$

其中 $d = |A|$.

如果 $d=|A|\neq 0$，那么由 (2) 得

$$A\left(\frac{1}{d}A^*\right)=\left(\frac{1}{d}A^*\right)A=E. \qquad \textbf{(3)}$$

2. 矩阵可逆的充分必要条件

定理 3 矩阵 A 可逆的充要条件是 A 非退化，且

$$A^{-1}=\frac{1}{d}A^{*} \qquad (d=|A|\neq 0).$$

证明 当 $d=|A|\neq 0$，由 (3) 可知，A 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{d}A^{*}. \qquad (4)$$

反过来，如果 A 可逆，那么有 A^{-1} 使

$$AA^{-1} = E .$$

两边取行列式，得

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |E| = 1 ,$$

因而 $|A| \neq 0$，即 A 非退化．

证毕

定理 3 不但给出了一矩阵可逆的条件，同时也给出了求逆矩阵的公式 (4)，用公式 (4) 求逆矩阵的方法叫**伴随矩阵法**.

例 1 用伴随矩阵法求下列矩阵的逆阵

$$(1)\quad A_1=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\qquad (2)\quad A_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 1\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

小结与思考

1.请叙述判断可逆矩阵的充要条件

2. 如何求可逆矩阵的逆矩阵?

3. 形如$AX=B$，其中A，B都是n级方阵，若A是非退化的，怎么解该方程?