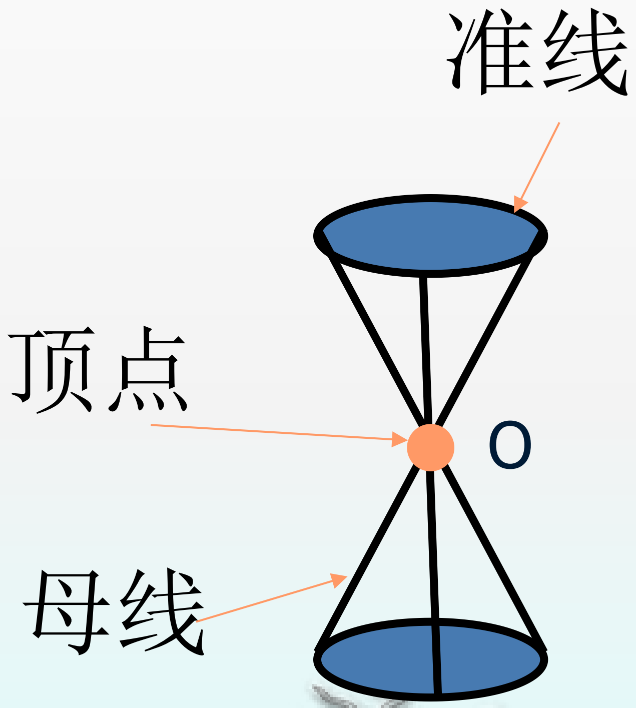
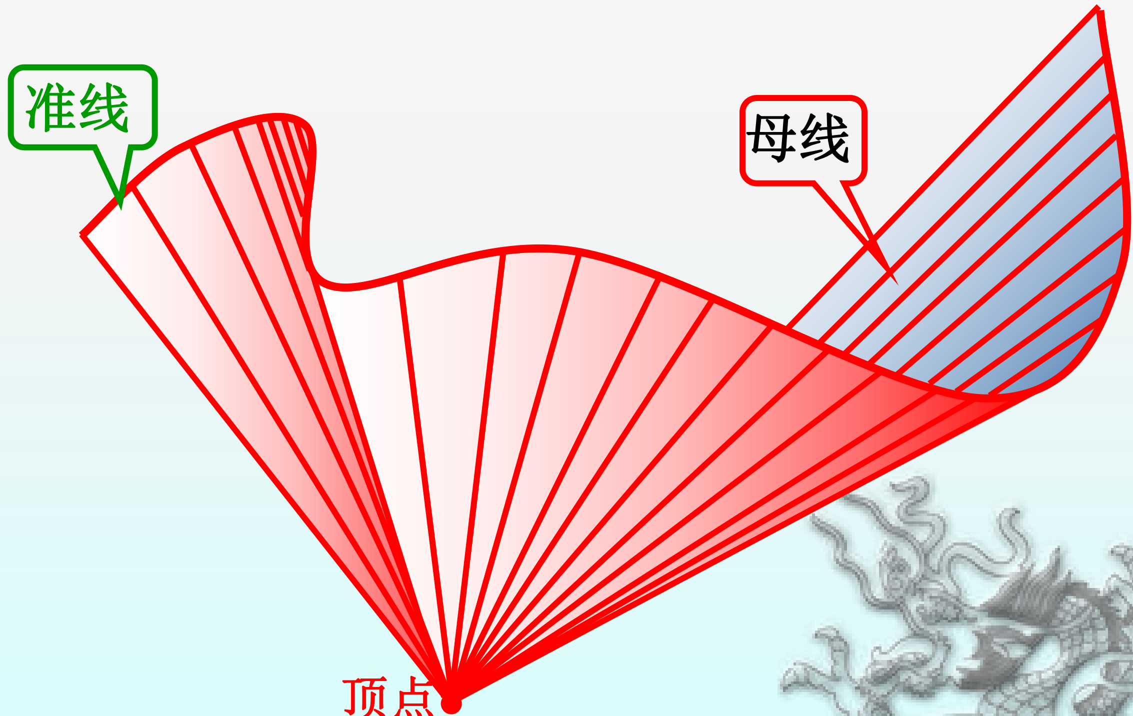
§4.2锥面

一、锥面的概念

1. 定义：在空间，通过一定点且与定曲线相交的一族直线所产生的曲面叫做锥面。



2. 说明：锥面的准线不是唯一的，和一切母线都相交的每一条曲线都可以作为它的准线。



二、锥面的方程

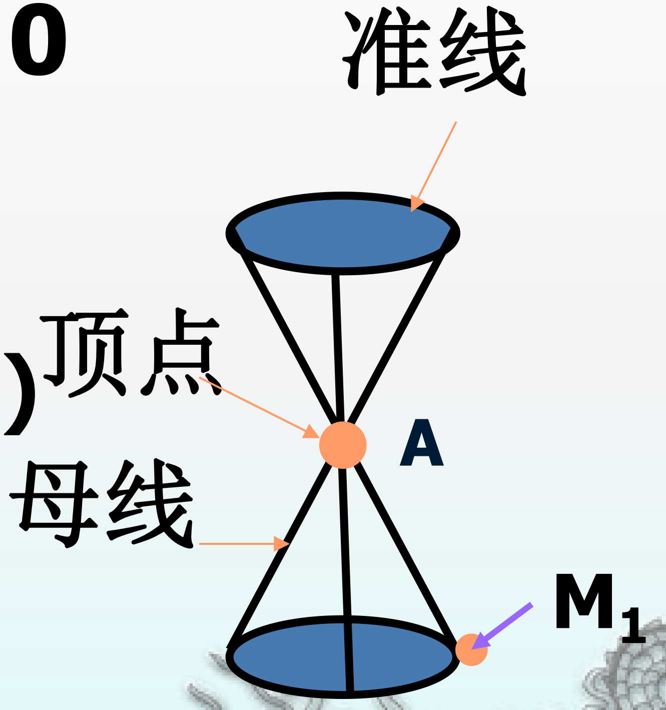
设准线方程为 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$

顶点坐标A（x_0,y_0,z_0),

在准线上任取一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$

则过M_1的母线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$



又M_1在准线上，有 $\begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0 \\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0 \end{cases}$

由 $$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

$$\begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0 \\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0 \end{cases}$$

消去x_1,y_1,z_1,即得所求锥面方程。

二、锥面的方程

例1 锥面的顶点在原点，且准线为 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$ ，求锥面的方程。

三、锥面的判定定理

定理 一个关于x,y,z的齐次方程总表示顶点在坐标原点的锥面。

证：设关于x,y,z的齐次方程为

$$F(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

于是，对实数t，当t^{λ}有意义时，

$$F(tx,ty,tz)=t^{\lambda}f(x,y,z)$$

则 当t=0时，有F(0,0,0)=0，

即（1）过原点。

如果**M_0（x_0,y_0,z_0）**是图形上的非原点，

则直线**OM_0**的参数方程为：

$$\begin{cases} x=x_0t, \\ y=y_0t, \\ z=z_0t, \end{cases}$$

代入 **$F(x,y,z)=0$** 中，得

$F(x,y,z)=F(tx_0,ty_0,tz_0)$

$=t^\lambda F(x_0,y_0,z_0)=0$

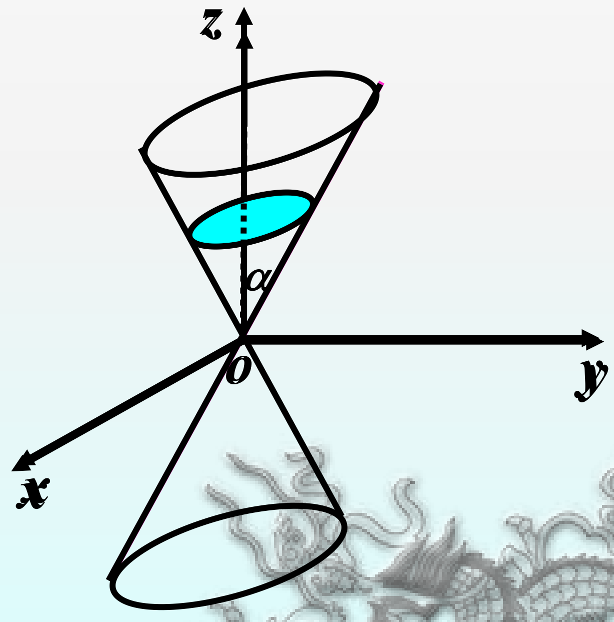
说明整条直线都在图形上.

综上所述:

(1)表示的曲面是由这种通过坐标原点的

直线所组成，即它是以原点为顶点的锥面。

例 2 直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫**圆锥面**．两直线的交点叫圆锥面的**顶点**，两直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 叫圆锥面的**半顶角**．试建立顶点在坐标原点，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面方程.



解 yoz 面上直线方程为

$$z = y\cot\alpha$$

圆锥面方程 $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$

令 $a=\cot\alpha$ **得** $z^2=a^2\left(x^2+y^2\right)$

推论：关于$x-x_0,y-y_0,z-z_0$的齐次方程表示

顶点在（x_0,y_0,z_0）的锥面

四、课堂小结

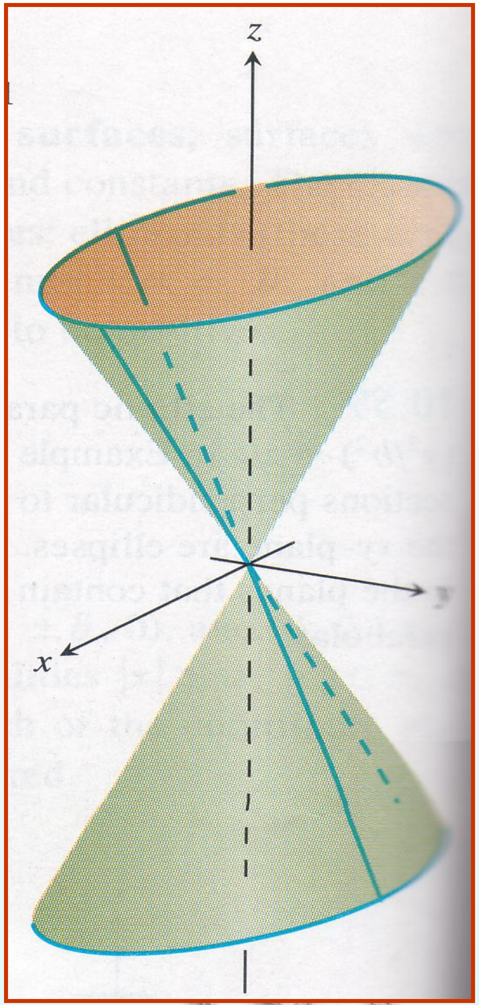
1. 一般锥面方程的求解；

2. 顶点为原点的锥面方程。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

椭圆锥面

请同学们思考：如何用截痕法研究其形状？



返回