文山學院 WENSHAN UNIVERSITY

# 第四节　正交变换

## 主要内容

- 定义
- 性质

# 一、定义

定义 9　欧氏空间 $V$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 称为**正交变换**，如果它保持向量的内积不变，即对于任意的 $\alpha,\beta\in V$，都有

$$(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\alpha,\beta).$$

## 二、性质

**定理 4** 设 $\mathscr{A}$ 是 $n$ 维欧氏空间 $V$ 的一个线性变换，于是下面四个命题是相互等价的：

1) $\mathscr{A}$ 是正交变换；

2) $\mathscr{A}$ 保持向量的长度不变，即对于 $\alpha \in V$,

$$|\mathscr{A}\alpha| = |\alpha|;$$

3) 如果 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是标准正交基，那么 $\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \dots, \mathscr{A}\varepsilon_n$ 也是标准正交基;

4) $\mathscr{A}$ 在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

**证明** 首先证明 1) 与 2) 等价.

如果 $\mathscr{A}$ 是正交变换，那么

$$(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\alpha) = (\alpha, \alpha).$$

两边开方即得

$$|\mathscr{A}\alpha| = |\alpha|.$$

反过来，如果 $\mathscr{A}$ 保持向量的长度不变，那么

$$(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\alpha) = (\alpha, \alpha),$$

$$(\mathscr{A}\beta, \mathscr{A}\beta) = (\beta, \beta),$$

$$(\mathscr{A}(\alpha+\beta), \mathscr{A}(\alpha+\beta)) = (\alpha+\beta, \alpha+\beta).$$

把最后的等式展开即得

$$(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\alpha)+2(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)+(\mathscr{A}\beta,\mathscr{A}\beta)$$

$$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta).$$

再利用前面两个等式，就有

$$(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\alpha,\beta).$$

这就是说，$\mathscr{A}$ 是正交变换.

再来证 1) 与 3) 等价.

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ 是一组标准正交基，即

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

如果 $\mathscr{A}$ 是正交变换，那么

$$(\mathscr{A}\varepsilon_i, \mathscr{A}\varepsilon_j) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

这就是说，$\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \dots, \mathscr{A}\varepsilon_n$ 是标准正交基. 反过来，如果 $\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \dots, \mathscr{A}\varepsilon_n$ 是标准正交基，那么由

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n,$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \dots + y_n\varepsilon_n,$$

与

$$\mathscr{A}\alpha = x_1\mathscr{A}\varepsilon_1 + x_2\mathscr{A}\varepsilon_2 + \dots + x_n\mathscr{A}\varepsilon_n ,$$

$$\mathscr{A}\beta = y_1\mathscr{A}\varepsilon_1 + y_2\mathscr{A}\varepsilon_2 + \dots + y_n\mathscr{A}\varepsilon_n ,$$

即得

$$(\alpha, \beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = (\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\beta) .$$

因而 $\mathscr{A}$ 是正交变换.

最后来证 3) 与 4) 等价.

设 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 $A$，即

$$(\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \ldots, \mathscr{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)A .$$

如果 $\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \ldots, \mathscr{A}\varepsilon_n$ 是标准正交基，那么 $A$ 可以看作由标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 到 $\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \ldots, \mathscr{A}\varepsilon_n$ 的过渡矩阵，因而是正交矩阵．反过来，如果 $A$ 是正交矩阵，那么 $\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \ldots, \mathscr{A}\varepsilon_n$ 就是标准正交基．

这样，就证明了 1)，2)，3)，4)的等价性．

证毕

因为正交矩阵是可逆的，所以正交变换是可逆的．由定义不难看出，正交变换实际上就是一个欧氏空间到它自身的同构映射（§3），因而正交变换的乘积与正交变换的逆变换还是正交变换．在标准正交基下，正交变换与正交矩阵对应，因此，正交矩阵的乘积与正交矩阵的逆矩阵也是正交矩阵．

如果 $A$ 是正交矩阵，那么由 $AA^{\mathrm{T}}=E$

可知

$$|A|^2=1 \text{ 或者 } |A|=\pm 1.$$

因此，正交变换的行列式等于 +1 或者 -1． 行列式等于 +1 的正交变换通常称为**旋转**，或者称为**第一类的**；行列式等于 -1 的正交变换称为**第二类的**.

例如，在欧氏空间中任取一组标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$，定义线性变换 $\mathscr{A}$ 为

$$\mathscr{A}\varepsilon_1 = -\varepsilon_1, \quad \mathscr{A}\varepsilon_i = \varepsilon_i, i = 2, \dots, n.$$

那么，$\mathscr{A}$ 就是一个第二类的正交变换． 从几何上看，这是一个镜面反射(参看本章习题 15) .

例2 设 $\sigma \in L(R^3)$ 令 $\sigma(\xi) = (x_2, x_3, x_1)$, $\forall \xi = (x_1, x_2, x_3) \in V_3$

则 $\sigma$ 是 $R^3$ 的一个正交变换.

例3 将 $V_2$ 的每一向量旋转一个角 的正交变换关于

的任意标准正交基的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

又令 $\sigma$ 是例1中的正交变换. 在平面 $H$ 内取两个正交的单位向量 $\gamma_1, \gamma_2$, 再取一个垂直于 $H$ 的单位向量 $\gamma_3$, 那么 $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ 是 $V_3$ 的一个规范正交基. 关于这个基 $\sigma$ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

以上两个矩阵都是正交矩阵.

# 小结和作业

1.请叙述正交变换的定义.

2.判断正交变换的方法有哪些?