

# 第一章 向量与坐标

## 典型题解

### 解答题

1. 已知三矢量  $\vec{a} = \{1, 1, 2\}$ ,  $\vec{b} = \{2, -3, 4\}$ ,  $\vec{c} = \{1, 5, -1\}$ , 判定三矢量是否共面, 并判断矢量  $\vec{a} + \vec{b}$  与矢量  $\vec{c}$  是否垂直.

$$\text{解: 因为 } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$$

所以矢量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  不共面。

$$\vec{a} + \vec{b} = \{1, 1, 2\} + \{2, -3, 4\} = \{3, -2, 6\}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 + 6 \cdot (-1) = -13 \neq 0$$

$\therefore$  矢量  $\vec{a} + \vec{b}$  与矢量  $\vec{c}$  不垂直.

2. 已知三角形的顶点分别是  $A(1, 2, 3)$ 、 $B(3, 4, 5)$ 、 $C(2, 5, 7)$ , 求 (1)  $\triangle ABC$  的面积. (2)  $\triangle ABC$  的  $AB$  边上的高.

解: (1). 由题意知:  $\vec{AB} = \{2, 2, 2\}$ ,  $\vec{AC} = \{1, 3, 4\}$

$$\triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$\therefore \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2i - 6j + 4k$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{14}$$

(2). 根据三角形的面积公式可知  $AB$  边上的高 =  $\frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}|}$

$$\therefore |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 2\sqrt{14} \quad |\vec{AB}| = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore AB \text{ 边上的高} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}|} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

3. 已知三点  $M(1,1,1)$ 、 $A(2,2,1)$ 、 $B(2,1,2)$ ，求 (1). 三角形的面积 (2). 求  $\angle AMB$ .

解：(1). 由题意知： $\overrightarrow{MA} = \{1,1,0\}$ ， $\overrightarrow{MB} = \{1,0,1\}$

$$\Delta ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}|$$

$$\therefore \overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - j - k$$

$$\therefore \Delta ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2). \therefore |\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}| \cdot \sin \angle AMB$$

$$\therefore \sin \angle AMB = \frac{|\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}|}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \angle AMB = \frac{\pi}{3}$$

4. 已知  $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 5$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ ，试求  $[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})]^2$ .

解： $\therefore |\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 5$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

$$\therefore \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{5} \quad \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = 4$$

$$\therefore [(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})]^2 = [2(\vec{b} \times \vec{a})]^2 = 64$$

5. 已知四面体的三个顶点为  $A(2,1,-1)$ ， $B(3,0,1)$ ， $C(2,-1,3)$ ，其体积  $V = 5$ ，且它

的顶点  $D$  在  $Oy$  轴上，求  $D$  的坐标.

解：记  $D$  的坐标为  $(0,0,z)$ ，则由题意得

$$\overrightarrow{AB} = \{1, -1, 2\}, \overrightarrow{AC} = \{0, -2, 4\}, \overrightarrow{AD} = \{-2, -1, z+1\}$$

$\therefore$  四面体的体积为以  $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{AD}$  为棱的平行六面体的  $\frac{1}{6}$

$$\therefore (\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & z+1 \end{vmatrix} = 2 - 2z$$

$$V = \frac{1}{6} |(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}| = \frac{1-z}{3} = 5$$

$\therefore z = -14$   $\therefore D$  的坐标为  $(0, 0, -14)$

6. 在右手直角坐标系中，一个四面体的顶点为  $A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7), D(-5, 4, 8)$ ，求它的体积。

解：由已知得  $\overline{AB} = \{2, -2, -3\}, \overline{AC} = \{4, 0, 6\}, \overline{AD} = \{-7, 1, 7\}$ ，

则四面体的体积为以  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$  为棱的平行六面体的  $\frac{1}{6}$ ，

$$\begin{aligned} \text{即 } V &= \frac{1}{6} |(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}| \\ &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \frac{58}{3} \end{aligned}$$

7. 已知 3 个矢量  $\vec{a} = \{3, -6, 1\}$ ， $\vec{b} = \{1, 4, -5\}$  与  $\vec{c} = \{3, -4, 12\}$ ，求矢量  $\vec{a} + \vec{b}$  在矢量  $\vec{c}$  上的投影。

解：由题意得： $\vec{a} + \vec{b} = \{3, -6, 1\} + \{1, 4, -5\} = \{4, -2, -4\}$ ， $|\vec{c}| = 13$

$$\text{射影}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{52}{13} = 4$$

8. 设点  $M(7, -4, 1)$  和  $N(-2, 2, 4)$  把线段  $AB$  三等分，求点  $A, B$  的坐标。

解：设  $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ ， $M$  是  $AB$  的中点，则

$$\left(\frac{a_1-2}{2}, \frac{a_2+2}{2}, \frac{a_3+4}{2}\right) = (7, -4, 1) \quad \begin{array}{c} \text{---} | \text{---} | \text{---} | \text{---} \\ A \quad M \quad N \quad B \end{array}$$

解得

$$a_1 = 16, a_2 = -10, a_3 = -2$$

故  $A(16, -10, -2)$ ，同理可得  $B(-11, 8, 7)$ 。

9. 已知三角形的顶点  $A(1, 2, 3), B(3, 4, 5), C(2, \lambda, 7)$ ， $\triangle ABC$  的面积  $\sqrt{14}$ ，求三

角形的顶点  $C$  的坐标.

解: 设  $C$  点坐标为  $(x, y, z)$

由题意知:  $\overrightarrow{AB} = \{2, 2, 2\}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \{1, \lambda - 2, 4\}$

$$\Delta ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{14}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & \lambda - 2 & 4 \end{vmatrix} = (12 - 2\lambda)i - 6j + (4\lambda - 6)k$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(12 - 2\lambda)^2 + (-6)^2 + (4\lambda - 6)^2} = 2\sqrt{14}$$

解之得  $\lambda = 5$

10. 判别向量  $\vec{a} \{3, 0, -1\}$ ,  $\vec{b} \{2, -4, 3\}$ ,  $\vec{c} \{-1, -2, 2\}$  是否共面, 若不共面, 求以它们为三条棱的平行六面体的体积.

解: 三向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  不共面

$$\therefore (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$\therefore$  向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  不共面

由混合积的绝对值的几何意义知其为邻边的平行六面体体积  $V = 2$ .

11. 已知空间三点  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(2, -1, 5)$ ,  $C(3, 2, -5)$  试求

(1)  $\Delta ABC$  的面积

(2)  $\Delta ABC$  的  $AB$  边上的中线长.

解: (1) 由题意知  $\overrightarrow{AB} = \{1, -3, 2\}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \{2, 0, -8\}$ ,

$$\text{则 } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \{24, 12, 6\}$$

$$\Delta ABC \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{2}$$

(2) 设 AB 边上的中线为 CD, 则  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$

$$\text{所以 } \overrightarrow{CA} = \{-2, 0, 8\}, \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right\}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \{-2, 0, 8\} + \left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right\} = \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 9\right\}$$

12. 已知向量  $\vec{x}$  与  $a = \{1, 5, -2\}$  共线, 且满足  $\vec{a} \cdot \vec{x} = 3$ , 求向量  $\vec{x}$  的坐标.

解:  $\because$  向量  $\vec{x}$  与  $a = \{1, 5, -2\}$  共线

$$\therefore \vec{x} = \lambda \vec{a} = \lambda \{1, 5, -2\}$$

$$\because \vec{a} \cdot \vec{x} = 3 \quad \therefore \lambda(1 + 5^2 + (-2)^2) = 3$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{10} \quad \therefore \vec{x} = \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right\}$$

13. 已知四点  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(6, 0, 6)$ ,  $C(4, 3, 0)$ ,  $D(2, -1, 3)$ , 求三棱锥  $D-ABC$  中  $ABC$  面上的高.

解: 三棱锥体积为以  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  为棱的平行六面体的  $\frac{1}{6}$ , 或者是底面积乘以高的  $\frac{1}{3}$ . 记三棱锥  $D-ABC$  中  $ABC$  面上的高  $h$ .

$$\text{故 } h = \frac{\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}$$

由题意知:  $\overrightarrow{AB} = \{6, 0, 6\}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \{4, 3, 0\}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \{2, -1, 3\}$

$$\text{故 } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -18i - 24j + 18k$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 6\sqrt{34}$$

$$h = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{34}}{34}$$

14. 已知向量  $\vec{a} + 3\vec{b}$  与  $7\vec{a} - 5\vec{b}$  垂直, 且  $\vec{a} - 4\vec{b}$  与  $7\vec{a} - 2\vec{b}$  垂直, 求  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角.

$$\text{解: } (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0, \text{ 即 } 7\vec{a}^2 + 16\vec{a}\vec{b} - 15\vec{b}^2 = 0 \quad (1)$$

$$(\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (7\vec{a} - 2\vec{b}) = 0, \text{ 即 } 7\vec{a}^2 - 30\vec{a}\vec{b} + 8\vec{b}^2 = 0 \quad (2)$$

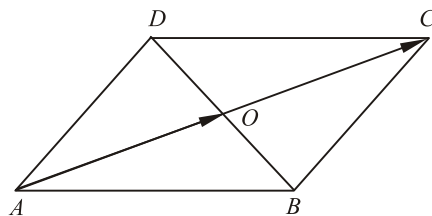
$$(1) - (2) \text{ 得: } 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b}^2 \quad (1) \times 8 + (2) \times 5 \text{ 得: } 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2$$

$$\therefore |\vec{a}| = |\vec{b}| \quad \therefore \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\frac{1}{2}|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$$

15. 在四边形 ABCD 中, 设对角线向量  $\overrightarrow{AC} = \vec{a}, \overrightarrow{BD} = \vec{b}$ , 若对角线互相平分, 求向量  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ , 并指出这个四边形为何种四边形.

解: 四边形 ABCD 中,  $\overrightarrow{AC} = \vec{a}, \overrightarrow{BD} = \vec{b}$  对角线互相平分,



$$\text{则 } \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{a}, \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

对角线互相平分的四边形为平行四边形。

16. 已知:  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2, \langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \frac{\pi}{3}$ , 求  $|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| &= \sqrt{(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})} \\ &= \sqrt{4\vec{\alpha}^2 - 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2} \\ &= \sqrt{16 - 12 \times 2 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} + 36} = 2\sqrt{7}. \end{aligned}$$

17. 设平行四边形对角线为  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$ , 而  $|\vec{m}| = 1, |\vec{n}| = 2, \angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30^\circ$ , 求该平行四边形的面积.

解: 由题意知:  $\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (3\vec{m} - 4\vec{n})$

$$= 6\vec{n} \times \vec{m} - 4\vec{m} \times \vec{n} = 10\vec{n} \times \vec{m}$$

$$= 10 \times 1 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{6} = 10$$

因为平行四边形的面积的 2 倍等于以它的对角线为边的平行四边形的面积

$\therefore$  该平行四边形的面积 = 5

18. 已知三矢量  $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$ ,  $\vec{b} = \{4, -2, 0\}$ ,  $\vec{c} = \{0, \frac{5}{2}, 3\}$ , 判定三矢量是否

共面, 能否将  $\vec{c}$  表成  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的线性组合? 若能表示, 写出表示式.

解: 因为  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 \end{vmatrix} = 0$ , 所以  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  三矢量共面.

又因为  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的对应坐标不成比例, 即  $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ ,

故可以将  $\vec{c}$  表成  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的线性组合.

设  $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ , 亦即  $\{0, 5, 6\} = \lambda\{1, 2, 3\} + \mu\{2, -1, 0\}$

从而 
$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0, \\ 2\lambda - \mu = 0, \\ 3\lambda = 6. \end{cases} \quad \text{解得 } \lambda = 2, \mu = -1$$

所以  $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ .

19. 在标架  $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  下, 平行四边形  $ABCD$  中三顶点坐标分别为  $A(0, 2, 0), B(-2, 1, 3), C(0, 4, 2)$ , 求第四点  $D$  和对角线的交点  $M$  的坐标.

解: 设  $D$  点坐标为  $(x, y, z)$ , 在平行四边形  $ABCD$  中

$$\vec{AB} = \vec{DC} \quad \text{即 } (-2, 1, 3) - (0, 2, 0) = (0, 4, 2) - (x, y, z)$$

$$\text{则 } \{-2, -1, 3\} = \{-x, 4-y, 2-z\}$$

$$\therefore x = 2, y = 5, z = -1$$

平行四边形  $ABCD$  中,  $M$  是线段  $AC$  的中点

故 M 点的坐标为 (0,3,1), D 点坐标为 (2,5,-1)

20. 已知向量  $\overrightarrow{AB}$  与单位向量  $\vec{e}$  的夹角为  $30^\circ$ , 且  $|\overrightarrow{AB}| = 10$ , 求射影向量  $\vec{e}\overrightarrow{AB}$  与射影  $\vec{e}\overrightarrow{AB}$ , 又如果  $\vec{e}' \neq -\vec{e}$ , 求射影向量  $\vec{e}'\overrightarrow{AB}$  与射影  $\vec{e}'\overrightarrow{AB}$ .

解: 射影  $\vec{e}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \angle(\vec{e}, \overrightarrow{AB}) = 10 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 5\sqrt{3}$

射影向量  $\vec{e}\overrightarrow{AB} = 5\sqrt{3}\vec{e}$

$\therefore \vec{e}' \neq -\vec{e}, \therefore \angle(\vec{e}', \overrightarrow{AB}) = \pi - \angle(\vec{e}, \overrightarrow{AB}) = \frac{5}{6}\pi$

$\therefore$  射影  $\vec{e}'\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \angle(\vec{e}', \overrightarrow{AB}) = 10 \cdot \cos \frac{5\pi}{6} = -5\sqrt{3}$

射影向量  $\vec{e}'\overrightarrow{AB} = -5\sqrt{3}\vec{e}'$

21. 已知  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}\pi, \vec{p} = 3\vec{a} - \vec{b}, \vec{q} = \lambda\vec{a} + 17\vec{b}$ . 问系数  $\lambda$  取何值时  $\vec{p}$  与  $\vec{q}$  垂直?

解: 由题意得:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \times 5 \times (\frac{1}{2}) = 5$

若  $\vec{p} \perp \vec{q}$

则  $\vec{p} \cdot \vec{q} = (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\lambda\vec{a} + 17\vec{b}) = 3\lambda|\vec{a}|^2 + 51\vec{a}\vec{b} - \lambda\vec{a} \cdot \vec{b} - 17|\vec{b}|^2 = -680 + 17\lambda = 0$

$\therefore \lambda = 40$  时,  $\vec{p} \perp \vec{q}$ .

22. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  互相垂直, 向量  $\vec{c}$  与  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角都是  $60^\circ$ , 且  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$ ,

计算  $(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})^2$ .

解:  $(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{c} - 4\vec{b}\vec{c} + 4\vec{b}^2 + \vec{c}^2$

$= 1 - 2 \times 3 \cos \frac{\pi}{3} - 4 \times 2 \times 3 \cos \frac{\pi}{3} + 4 \times 2^2 + 3^2 = 11$

23. 已知平行四边形以  $\vec{a} = \{1, 2, -2\}, \vec{b} = \{2, -2, 1\}$  为两边

(1) 求它的边长和内角 (2) 求它的两对角线的长和夹角.

解: (1)  $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = 3, |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1} = 3$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -\frac{4}{9} \quad \therefore \theta = \arccos \frac{4}{9} \text{ 或 } \pi - \arccos \frac{4}{9}$$

$$(2) \text{ 令 } c_1 = \vec{a} + \vec{b} = \{3, 0, -1\}, \quad c_2 = \vec{a} - \vec{b} = \{-1, 4, -3\}$$

$$|\vec{c}_1| = |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}, \quad |\vec{c}_2| = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{26}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2}{|\vec{c}_1| \cdot |\vec{c}_2|} = 0 \quad \therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$$

24. 已知  $\triangle ABC$  的三顶点  $A(0,0,3), B(4,0,0), C(0,4,0)$ , (1) 求  $\overline{AB}, \overline{AC}$  边的夹角余弦 (2) 求角  $A$  的角平分线矢量  $\overline{AD}$ , 并求  $\overline{AD}$  的方向余弦和单位矢量.

解: (1)  $\therefore$  由题意得  $\overline{AB} = \{4, 0, -3\}, \quad \overline{AC} = \{0, 4, -3\}$

$$|\overline{AB}| = 5, \quad |\overline{AC}| = 5$$

$$\therefore \cos \angle A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{9}{25}$$

$$(2) \cos \theta = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}|} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AD}}{|\overline{AC}| \cdot |\overline{AD}|} \quad \text{又} \because |\overline{AB}| = |\overline{AC}|$$

$$\therefore |\overline{BD}| = |\overline{CD}|, \text{ 则 } \overline{AD} = \{2, 2, -3\}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad \cos \gamma = \frac{-3}{\sqrt{17}}$$

设它的单位矢量为  $\{a, b, c\}$ , 且  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$\therefore \{a, b, c\} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}} \right\}$$

25. 已知三点  $A(1,0,0), B(0,1,1), C(2,0,1)$ , 且  $\overline{BC} = \vec{a}, \overline{CA} = \vec{b}, \overline{AB} = \vec{c}$ , 求

(1).  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角余弦. (2).  $\vec{a}$  在  $\vec{c}$  上的投影.

解: 由题意得:

$$\vec{a} = \overline{BC} = \{2, -1, 0\}, |\vec{a}| = \sqrt{5}, \quad \vec{b} = \overline{CA} = \{-1, 0, -1\}, |\vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{c} = \overline{AB} = \{-1, 1, 1\}, |\vec{c}| = \sqrt{3}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -2, \vec{a} \cdot \vec{c} = -3$$

因此可得:

$$(1). \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$(2). \text{射影}_c a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

26. 已知:  $\vec{a} = \{2, -3, 1\}$ ,  $\vec{b} = \{4, -2, 1\}$ ,  $\vec{d} = \{2, 1, -3\}$ , 求与  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  都垂直, 且满足  $\vec{c} \cdot \vec{d} = 8$  的矢量  $\vec{c}$ .

解: 设  $\vec{c} = \{x, y, z\}$ .  $\because \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$ ,

$$\therefore \vec{c} \cdot \vec{a} = 2x - 3y + z = 0 \quad (1) \qquad \vec{c} \cdot \vec{b} = 4x - 2y + z = 0 \quad (2)$$

$$\text{又} \because \vec{c} \cdot \vec{d} = 10 \qquad \therefore 2x + y - 3z = 8 \quad (3)$$

$$\text{由 (1), (2), (3) 得: } \vec{c} = \left\{ \frac{7}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{8}{5} \right\}.$$

27. 已知:  $\vec{a} = \{2, 2, 1\}$ ,  $\vec{b} = \{4, 2, 4\}$ , 试求: (1) 以  $\vec{a}, \vec{b}$  为边的平行四边形的面积.

(2) 这平行四边形的两条高的长.

解: (1) 由题意得:  $\vec{a} = \{2, 2, 1\}$ ,  $\vec{b} = \{4, 2, 4\}$

$$\text{则 } |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 6, \vec{a} \cdot \vec{b} = 16$$

$$S = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad \because \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{17}}{9} \therefore S = 2\sqrt{17}$$

$$(2) |\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 6, \quad \therefore h_1 = \frac{S}{|\vec{a}|} = \frac{2\sqrt{17}}{3} \quad h_2 = \frac{S}{|\vec{b}|} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

28. 已知直角坐标系内 A, B, C, D 四点坐标为  $A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7), D(-5, 4, 8)$

判别是否共面? 若不共面, 求以其为顶点的四面体体积和从顶点 D 所引出的高的长.

解: 四面体的体积为以  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  为棱的平行六面体的  $\frac{1}{6}$

$$\therefore (\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times 58 \therefore V = \frac{58}{3}$$

$$\text{又 } \overline{AB} \times \overline{AC} = \{-12, -24, 8\}, \therefore |\overline{AB} \times \overline{AC}| = 28,$$

$$\therefore h = \frac{116}{28} = \frac{29}{7} \therefore \text{顶点 } D \text{ 所引出的四面体高为 } \frac{29}{7}.$$

29. 设向量  $\vec{a} = \{3, 5, -4\}$ ,  $\vec{b} = \{2, 1, 8\}$ , 计算  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ , 并选择适当的  $\lambda, \mu$  使得  $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$  与  $z$  轴垂直.

$$\text{解: } \therefore \vec{a} = \{3, 5, -4\}, \vec{b} = \{2, 1, 8\}$$

$$\therefore 2\vec{a} + 3\vec{b} = \{12, 13, 16\}, \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \{3\lambda + 2\mu, 5\lambda + \mu, -4\lambda + 8\mu\}$$

$$\therefore \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \text{ 与 } z \text{ 轴垂直}$$

$$\therefore -4\lambda + 8\mu = 0 \text{ 即 } \lambda = 2\mu$$

30. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $\frac{\pi}{6}$ , 且  $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1$ , 计算两向量  $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$  和  $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$  之间的夹角  $\theta$  的余弦.

$$\text{解: } |\vec{p}| = |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \sqrt{7}$$

$$|\vec{q}| = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = 1$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

31. 求长为 14 且同时垂直于向量  $\vec{a} = \{3, 2, 2\}$  与  $\vec{b} = \{18, -22, -5\}$  又与  $y$  轴成钝角的向量  $\vec{c}$ .

$$\text{解: 由题意知: } |\vec{c}| = 14, \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$\therefore \text{设向量 } \vec{c} = \{x, y, z\}, \text{ 则}$$

$$3x + 2y + 2z = 0; 18x - 22y - 5z = 0, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 14$$

又因为  $\vec{c}$  与 y 轴成钝角的

则联立得  $x = -4, y = -6, z = 12$

32. 在直角坐标系内, 已知  $\vec{a} = \{1, 0, -1\}, \vec{b} = \{1, -2, 0\}, \vec{c} = \{-1, 2, 1\}$ , 求  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$  和  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ .

$$\begin{aligned}\text{解: } (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} = -2\vec{b} + 5\vec{a} \\ &= \{-2, 4, 0\} + \{5, 0, -5\} = \{3, 4, -5\} \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = -2\vec{b} - \vec{c} \\ &= \{-2, 4, 0\} - \{-1, 2, 1\} = \{-1, 2, -1\}.\end{aligned}$$

33. 已知  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  两两互相垂直, 且  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 2$ , 求  $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  的长及  $\vec{r}$  与  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  的夹角.

解:  $\because \vec{a} \perp \vec{b} \perp \vec{c}$ , 且  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 2$ .

$$\text{设 } \vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \quad \therefore |\vec{r}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

设  $\vec{r}$  与  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  的夹角分别为  $\alpha, \beta, \gamma$ .

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore \alpha = \arccos \frac{1}{3}, \quad \beta = \arccos \frac{2}{3}, \quad \gamma = \arccos \frac{2}{3}.$$

34. 在  $\triangle ABC$  中, 设  $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1, \overrightarrow{AC} = \vec{e}_2$ . 设  $D, E$  是边  $BC$  三等分点, 将向量  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$  分解为  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  的线性组合.

$$\text{解: } \because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1, \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\vec{e}_2 - \vec{e}_1)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_1 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2$$

$$\text{同理 } \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_1$$

35. 在  $\triangle ABC$  中, 设  $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_2$ ,  $\angle A$  的平分线交边  $BC$  于点  $T$ ,  $\overrightarrow{BT} = \lambda \overrightarrow{TC}$ ,

$\overrightarrow{AT} = \frac{\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}}{1 + \lambda}$ , 求将  $\overrightarrow{AT}$  分解为  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  的线性组合.

解: 由题意知:  $\overrightarrow{BT} = \lambda \overrightarrow{TC}$  即  $\lambda = \frac{|\overrightarrow{BT}|}{|\overrightarrow{TC}|} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|\vec{e}_1|}{|\vec{e}_2|}$ ,

且  $\overrightarrow{BT}$  与  $\overrightarrow{TC}$  方向相同,

所以  $\lambda = \frac{|\vec{e}_1|}{|\vec{e}_2|}$ . 代入  $\overrightarrow{AT} = \frac{\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}}{1 + \lambda}$

$$\overrightarrow{AT} = \frac{\vec{e}_1 + \frac{|\vec{e}_1|}{|\vec{e}_2|} \vec{e}_2}{1 + \frac{|\vec{e}_1|}{|\vec{e}_2|}} = \frac{|\vec{e}_2| \vec{e}_1 + |\vec{e}_1| \vec{e}_2}{|\vec{e}_1| + |\vec{e}_2|}$$

36. 已知直角坐标系内向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  的分量  $\vec{a} = \{3, 4, 5\}$ ,  $\vec{b} = \{1, 2, 2\}$ ,  $\vec{c} = \{9, 14, 16\}$ , 能否求出以它们为三邻边的平行六面体体积?

解: 向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  不共面时才能求平行六面体体积, 要判定向量是否共面, 主要看向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  混合积是否为 0.

$$\therefore (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$  向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  共面.

$\therefore$  不能求出以它们为三邻边的平行六面体体积

37. 已知三点  $M(1, 1, 1)$ 、 $A(2, 2, 1)$ 、 $B(2, \lambda, 2)$ ,  $\angle AMB = \frac{\pi}{3}$ , 求三角形的面积.

解: 由题意知:  $\overrightarrow{MA} = \{1, 1, 0\}$ ,  $\overrightarrow{MB} = \{1, \lambda - 1, 1\}$

$$\triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}|$$

$$|\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{vmatrix} = i - j + (\lambda - 2)k$$

$$\therefore \sin \angle AMB = \frac{|\overline{MA} \times \overline{MB}|}{|\overline{MA}| \cdot |\overline{MB}|} = \frac{\sqrt{2 + (\lambda - 2)^2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + (\lambda - 1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

解之得:  $\lambda = 1 \quad \therefore \overline{MB} = (1, 0, 1)$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} |\overline{MA} \times \overline{MB}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

38. 在标架  $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  下, 平行四边形  $ABCD$  中顶点  $A, B$  坐标分别为  $A(0, 2, 0), B(-2, 1, 3)$ , 对角线的交点  $M$  的坐标  $(0, 3, 1)$ , 求另外两点  $C, D$  的坐标.

解: 平行四边形  $ABCD$  中,  $M$  是线段  $AC, BD$  的中点, 设  $C, D$  的坐标分别为  $(x, y, z)$  和  $(a, b, c)$ , 对角线的交点  $M$  的坐标  $(0, 3, 1)$

$\therefore M$  为线段  $AC, BD$  的中点

$$\therefore M \text{ 点的坐标为 } \left( \frac{x}{2}, \frac{2+y}{2}, \frac{z}{2} \right) \text{ 和 } \left( \frac{-2+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{3+c}{2} \right)$$

$\therefore$  计算得:  $x = 0, y = 4, z = 2, a = 2, b = 4, c = -1$

$\therefore$  两点  $C, D$  的坐标为  $(0, 4, 2)$  和  $(2, 4, -1)$ 。

39. 已知通过点  $M(0, -1, 1)$  的直线平行于矢量  $\vec{v} = \{2, 1, -2\}$ , 求点  $P(1, 0, 1)$  到此直线的距离.

解: 如图所示, 过点  $M$  且平行于矢量的直线记为  $L$ , 过点  $P$  做  $PD \perp L$ , 则  $|\overline{PD}|$  就是所求直线的距离,

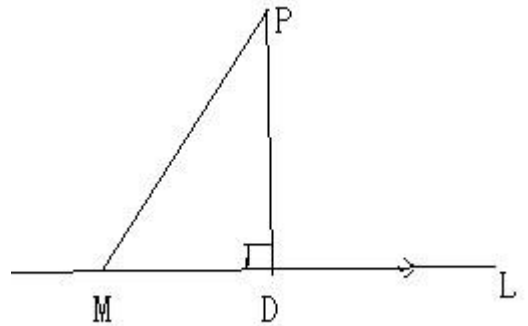
$$|\overline{PD}| = \sqrt{|\overline{MP}|^2 - |\overline{MD}|^2}$$

$\therefore M(0, -1, 1), P(1, 0, 1), \vec{v} = \{2, 1, -2\}$

$$\therefore \overline{MP} = \{1, 1, 0\}, |\overline{MP}| = \sqrt{2}$$

$$|\overline{MD}| = |\text{射影}_L \overline{MP}| = |\text{射影}_{\vec{v}} \overline{MP}| = \frac{|\overline{MP} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|2 + 1 + 0|}{3} = 1$$

$$\therefore |\overline{PD}| = \sqrt{|\overline{MP}|^2 - |\overline{MD}|^2} = \sqrt{2 - 1} = 1$$



40. 已知矢量  $\vec{a} + 3\vec{b}$  与  $7\vec{a} - 5\vec{b}$  垂直, 且  $\vec{a} - 4\vec{b}$  与  $7\vec{a} - 2\vec{b}$  垂直, 求  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角.

解法如下：由题意知：  $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0$ ，即  $7\vec{a}^2+16\vec{a}\vec{b}-15\vec{a}^2=0$  (1)

$$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0, \text{ 即 } 7\vec{a}^2-30\vec{a}\vec{b}+8\vec{b}^2=0 \quad (2)$$

(1) - (2) 得：  $2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$  (3)                      即  $2\vec{a}=\vec{b}$ ，从而  $\vec{a}\times\vec{b}=0$  (4)

$$\therefore \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0 \quad \therefore \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \text{ 或 } \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi \quad (5)$$

以上解法中有两步骤有误，在哪里？并写出正确做法。

解：步骤 (4)，(5) 有误，(4) 数量积没有消去律，(5) 中非零向量夹角只能有一个，应用余弦公式。

正确做法：  $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0$ ，即  $7\vec{a}^2+16\vec{a}\vec{b}-15\vec{a}^2=0$  (1)

$$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0, \text{ 即 } 7\vec{a}^2-30\vec{a}\vec{b}+8\vec{b}^2=0 \quad (2)$$

(1) - (2) 得：  $2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$                       (1)  $\times 8 + (2) \times 5$  得：  $2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2$

$$\therefore |\vec{a}|=|\vec{b}| \quad \therefore \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\frac{1}{2}|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$$

41. 已知  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ， $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$ ， $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=3$ ，求  $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  的长。

解：由题意得：  $|\vec{r}| = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{a}\cdot\vec{c}}$

$$\therefore \vec{a} \perp \vec{b}, \angle(\vec{a}, \vec{c}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}, |\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=3,$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0, \vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{3}{2}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 3$$

$$\therefore |\vec{r}| = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{a}\cdot\vec{c}}$$

$$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 3 + 6} = \sqrt{23}$$

42. 已知向量  $\vec{a} = \{2, -3, 6\}$  与  $\vec{b} = \{-1, 2, -2\}$  共起点，在沿  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  角平分线的方向

上求一长为  $3\sqrt{42}$  的向量。

解：角平分线的方向向量用  $\vec{a}, \vec{b}$  表示为  $\frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$

代入  $\vec{a} = \{2, -3, 6\}$ ,  $\vec{b} = \{-1, 2, -2\}$  得

$$\frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} = \frac{1}{10} (-1, 5, 4)$$

则长为  $3\sqrt{42}$  的矢量为  $\{-3, 15, 12\}$

43. 已知向量  $\vec{a} = \{3, -2, 1\}$ ,  $\vec{b} = \{-1, 1, -2\}$ ,  $\vec{c} = \{2, 1, -3\}$ , 求向量  $\vec{p} = \{11, -6, 5\}$

关于三矢量的分解式.

解：记  $p = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$ , 将三矢量代入得

$$\vec{p} = (3\lambda - \mu + 2\nu)\vec{a} + (-2\lambda + \mu + \nu)\vec{b} + (\lambda - 2\mu - 3\nu)\vec{c}$$

$$\therefore \vec{p} = \{11, -6, 5\}$$

$$\therefore \begin{cases} 3\lambda - \mu + 2\nu = 11 \\ -2\lambda + \mu + \nu = -6 \\ \lambda - 2\mu - 3\nu = 5 \end{cases} \text{ 解之得: } \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = -3 \\ \nu = 1 \end{cases}$$

$\therefore$  向量  $\vec{p} = \{11, -6, 5\}$  关于三矢量的分解式为  $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ 。

44. 已知平行六面体的棱长  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ , 以及三个顶角

$\angle BOC = \alpha, \angle COA = \beta, \angle AOB = \gamma$ , 求从点  $O$  所引的对角线的长.

解：记从点  $O$  所引的对角线为  $\vec{OD}$ , 则  $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

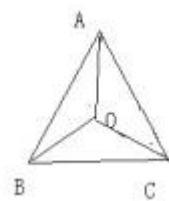
$$\begin{aligned} \text{则 } |\vec{OD}| &= |\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}| = \sqrt{(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2} \\ &= \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} \cos \alpha + 2\vec{a} \cdot \vec{c} \cos \beta + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cos \gamma} \end{aligned}$$

45. 已知向量  $\vec{c}$  垂直于两向量  $\vec{a}, \vec{b}$ ,  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $\frac{\pi}{6}$ , 且  $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = |\vec{c}| = 3$ , 计算

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

$$\text{解: } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm 1 \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| = \pm 1 \cdot |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \sin \frac{\pi}{6} |\vec{c}| = \pm 27$$

46. 已知三角形  $ABC$  三边的矢量  $\vec{BC} = \vec{a}, \vec{CA} = \vec{b}, \vec{AB} = \vec{c}$ , 点  $O$  是三角形的外心,



用向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  来表示向量  $\overrightarrow{AO}$ .

解: 把向量  $\overrightarrow{AO} = x$  用  $\vec{b}, \vec{c}$  表示即  $x = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$ , 依题意有:

$$\left(x + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 0, \quad \left(x - \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot \vec{c} = 0$$

将  $x = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$  代入得:

$$\vec{b}^2 \lambda + \vec{b} \cdot \vec{c} \mu = -\frac{1}{2}\vec{b}^2, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} \lambda + \vec{c}^2 \mu = \frac{1}{2}\vec{c}^2$$

$$\text{解之得: } \lambda = \frac{\vec{c}^2 (\vec{a}\vec{b})}{2(\vec{b} \times \vec{c})^2}, \quad \mu = -\frac{\vec{b}^2 (\vec{a}\vec{c})}{2(\vec{b} \times \vec{c})^2}$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{\vec{c}^2 (\vec{a}\vec{b})}{2(\vec{b} \times \vec{c})^2} \vec{b} - \frac{\vec{b}^2 (\vec{a}\vec{c})}{2(\vec{b} \times \vec{c})^2} \vec{c}$$

47. 在空间直角坐标系  $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  下, 求  $M(a, b, c)$  关于

(1) 坐标平面; (2) 坐标轴; (3) 坐标原点的各个对称点的坐标.

解:  $M(a, b, c)$  关于  $xOy$  平面的对称点坐标为  $(a, b, -c)$ ,

$M(a, b, c)$  关于  $yOz$  平面的对称点坐标为  $(-a, b, c)$ ,

$M(a, b, c)$  关于  $xOz$  平面的对称点坐标为  $(a, -b, c)$ ,

$M(a, b, c)$  关于  $x$  轴平面的对称点坐标为  $(a, -b, -c)$ ,

$M(a, b, c)$  关于  $y$  轴的对称点的坐标为  $(-a, b, -c)$ ,

$M(a, b, c)$  关于  $z$  轴的对称点的坐标为  $(-a, -b, c)$ .

48. 已知  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 2$ , 计算  $[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a})$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } & [(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \\ & = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \\ & = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} + \vec{0} \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} \\ & \quad + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} + \vec{0} \cdot \vec{a} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

$$= 2(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 2(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 4$$

49. 设  $\vec{m} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}$ ,  $\vec{n} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}$ ,  $\vec{p} = 5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ , 求矢量

$\vec{a} = 4\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p}$  在  $x$  轴上的射影及在  $y$  轴上的射影矢量.

$$\begin{aligned} \text{解: } \because \vec{a} &= 4\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p} = 4(3\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}) + 3(2\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}) - (5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}) \\ &= 13\vec{i} + 7\vec{j} + 15\vec{k}, \end{aligned}$$

$\therefore$  在  $x$  轴上的射影为  $a_x = 13$ , 在  $y$  轴上的射影矢量为  $7\vec{j}$ .

50. 已知  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 7$ ,  $|\vec{c}| = 5$ , 并且  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , 计算  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ .

解:  $\because |\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 7$ ,  $|\vec{c}| = 5$ , 并且  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

则  $\vec{a}$  与  $\vec{c}$  同向,  $\vec{a}, \vec{c}$  均与  $\vec{b}$  反向.

所以  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$

$$\begin{aligned} &= 2 \times 7 \cos 180^\circ + 7 \times 5 \cos 180^\circ + 5 \times 2 \cos 0^\circ \\ &= -14 - 35 + 10 \\ &= -39 \end{aligned}$$

51. 设力  $F = -i + 3j - 2k$  作用在原点, 求力  $F$  对点  $B(-2, 0, 1)$  的力矩的大小.

解: 原点坐标  $O(0, 0, 0)$ , 则  $\vec{OB} = \{-2, 0, 1\} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}$

$F = -i + 3j - 2k$ ,  $F$  对  $B$  的力矩为

$$M = \vec{OB} \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 5\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\text{力矩的大小为 } M = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{70}$$

52. 矢量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  具有相同的模, 且两两所成的角相等, 若  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  的坐标分别为  $\{1, 1, 0\}$  和  $\{0, 1, 1\}$ , 求矢量  $\vec{c}$  的坐标.

解:  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = r$  且它们两两所成的角相等, 设为  $\theta$

则有  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{r^2}$$

设向量  $\vec{c}$  的坐标为  $\{x, y, z\}$

$$\text{则 } \vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = x + y = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos \theta = r \cdot r \cdot \frac{1}{r^2} = 1 \quad (1)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = y + z = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \theta = r \cdot r \cdot \frac{1}{r^2} = 1 \quad (2)$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{所以 } x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad (3)$$

$$\text{联立 (1)、(2)、(3) 求出 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \text{ 或 } \\ z = 1 \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

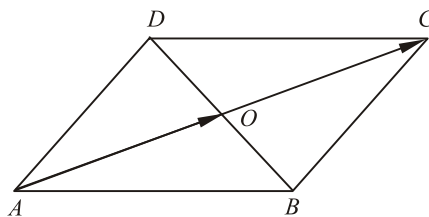
所以向量  $c$  的坐标为  $\{1, 0, 1\}$  或  $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$

53. 已知点  $A(3, 6, 1)$ ,  $B(2, -4, 1)$ ,  $C(0, -2, 3)$ ,  $D(-2, 0, -3)$ ,

(1) 求以  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  为邻边组成的平行六面体的体积.

(2) 求三棱锥  $A-BCD$  的体积.

(3) 求  $\triangle BCD$  的面积.



解: 因为  $A(3, 0, 1)$ ,  $B(2, -4, 1)$ ,  $C(0, -2, 3)$ ,  $D(-2, 0, -3)$

所以  $\overline{AB} = \{-1, -10, 0\}$ ,  $\overline{AC} = \{-3, -8, 2\}$ ,  $\overline{AD} = \{-5, -6, -4\}$

(1)  $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})$  是以它们为邻边的平行六面体的体积

$$V = \begin{vmatrix} -1 & -10 & 0 \\ -3 & -8 & 2 \\ -5 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -3 + 100 + 0 - (0 - 120 + 12) = 176$$

(2) 由立体几何中知道, 四面体  $ABCD$  (三棱锥  $A-BCD$ ) 的体积

$$V_T = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6} \times 176 = \frac{88}{3}$$

(3) 因为  $\overrightarrow{BC} = \{-2, 2, 2\}$ ,  $\overrightarrow{BD} = \{-4, 4, -4\}$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -16i - 16j + 0k$$

所以  $|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-16)^2 + (-16)^2} = 16\sqrt{2}$ , 这是平行四边形  $BCED$  的面积

$$\text{因此 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} S_{\square BCED} = \frac{1}{2} \times 16\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

54. 已知平面  $\alpha$  与三个坐标轴的交点分别为  $A, B, C$  且  $O-ABC$  的体积为 80, 又  $\alpha$  在三个坐标轴上的截距之比为  $4:-5:-3$ , 求点  $A, B, C$  的坐标.

解: 设  $\alpha$  在三个坐标轴上的截距之比为  $a:b:c = 4:(-5):(-3) = k$ , 则平面  $\alpha$  与三个坐标轴的交点为  $A(4k, 0, 0), B(0, -5k, 0), C(0, 0, 3k)$

$$V_{O-ABC} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| = \frac{1}{6} \cdot 4k \cdot 5k \cdot 3k = 80$$

所以,  $k^3 = 8, k = 2$

因此, 点  $A$  的坐标为  $(8, 0, 0)$ , 点  $B$  的坐标为  $(0, -10, 0)$ , 点  $C$  的坐标为  $(0, 0, 6)$ .

55. 设  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ , 试在  $\vec{a}, \vec{b}$  所确定的平面内, 求一个与  $\vec{a}$  垂直的单位矢量.

解: 设所求矢量为  $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \{2\lambda + \mu, -\lambda + 3\mu, \lambda - \mu\}$ , 则有

$$\vec{a} \cdot (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = 0 \Rightarrow 4\lambda + 2\mu + \lambda - 3\mu + \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \mu = 3\lambda$$

$$(2\lambda + \mu)^2 + (-\lambda + 3\mu)^2 + (\lambda - \mu)^2 = 1 \Rightarrow 6\lambda^2 + 11\mu^2 - 4\lambda\mu = 1$$

$$93\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{93}}{93}, \quad \mu = \pm \frac{3\sqrt{93}}{93}$$

$$\text{所求矢量为 } \left\{ \frac{5\sqrt{93}}{93}, \frac{8\sqrt{93}}{93}, -\frac{2\sqrt{93}}{93} \right\} \text{ 或 } \left\{ -\frac{5\sqrt{93}}{93}, -\frac{8\sqrt{93}}{93}, \frac{2\sqrt{93}}{93} \right\}$$

## 证明题

1. 设  $\vec{AB} = \vec{a} + 5\vec{b}$ ,  $\vec{BC} = -2\vec{a} + 8\vec{b}$ ,  $\vec{CD} = 3(\vec{a} - \vec{b})$ , 证明:  $A, B, D$  三点共线.

证明:  $\because \vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = -2\vec{a} + 8\vec{b} + 3(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} + 5\vec{b} = \vec{AB}$

$\therefore \vec{AB}$  与  $\vec{BD}$  共线, 又  $\because B$  为公共点, 从而  $A, B, D$  三点共线.

2. 设  $\vec{a}, \vec{b}$  是两不共线矢量, 证明矢量  $\vec{u} = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b}, \vec{v} = \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b}$  共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

证明: 两矢量  $\vec{u}, \vec{v}$  共线的充要条件是存在不全为 0 的实数  $\lambda, \mu$  使得  $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$  即

$$\lambda(\lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b}) + \mu(\lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b}) = \vec{0} \quad \therefore (\lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2)\vec{a} + (\lambda\mu_1 + \mu\mu_2)\vec{b} = \vec{0}$$

$\because \vec{a}, \vec{b}$  是两不共线矢量

$$\therefore \lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2 = 0, \quad \lambda\mu_1 + \mu\mu_2 = 0$$

又  $\because$  实数  $\lambda, \mu$  不全为 0

$$\therefore \text{矢量 } \vec{u} = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b}, \vec{v} = \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b} \text{ 共线的充要条件是 } \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 证明三个矢量  $\vec{a} = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{b} = 4\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \vec{c} = -3\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 11\vec{e}_3$  共面, 其中  $\vec{a}$  能否用  $\vec{b}, \vec{c}$  线性表示? 如能表示, 写出线性表示关系式.

证明: 由于矢量  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  不共面, 即它们线性无关.

考虑表达式  $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$ , 即

$$\lambda(-\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) + \mu(4\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) + \nu(-3\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 11\vec{e}_3) = \vec{0},$$

$$\text{则 } (-\lambda + 4\mu - 3\nu)\vec{e}_1 + (3\lambda - 6\mu + 12\nu)\vec{e}_2 + (2\lambda + 2\mu + 11\nu)\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

由于  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  线性无关, 故有

$$\begin{cases} -\lambda + 4\mu - 3\nu = 0 \\ 3\lambda - 6\mu + 12\nu = 0 \\ 2\lambda + 2\mu + 11\nu = 0 \end{cases}$$

解得  $\lambda = -10, \mu = -1, \nu = 2.$

由于  $\lambda = -10 \neq 0$ , 所以  $\vec{a}$  能用  $\vec{b}, \vec{c}$  线性表示

$$\vec{a} = -\frac{1}{10}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}.$$

4. 如图  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  是三个两两不共线的矢量, 且  $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ , 试证

$A, B, C$  三点共线的充要条件是  $\lambda + \mu = 1$ .

证明: ( $\Rightarrow$ ):  $\because A, B, C$  共线  $\therefore \overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{CB}$

且有  $m \neq -1$ , 使得  $\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{CB}$

$$\text{即 } \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$$

$$(1+m)\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+m}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{1+m}\overrightarrow{OB}$$

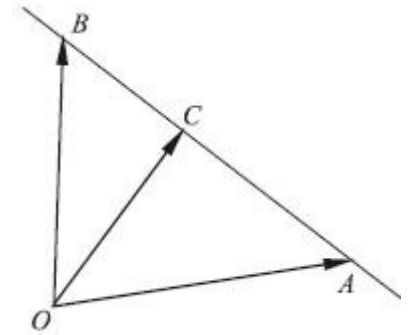
由分解的唯一性可得  $\lambda = \frac{1}{1+m}$ ,  $\mu = \frac{m}{1+m}$

$$\therefore \lambda + \mu = 1$$

( $\Leftarrow$ ): 设  $\lambda + \mu = 1$ , 则有  $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \lambda(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$

$$\text{即 } \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \lambda(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \quad \text{即 } \overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{BA}$$

$\therefore \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{BA}$ , 故  $A, B, C$  三点共线



5. 设  $\overrightarrow{OP_i} = g_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 证明若  $P_1, P_2, P_3, P_4$  四点共面则是存在不全为 0 的实数

$\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 使得  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i \overrightarrow{\gamma_i} = 0$  且  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$ .

证明:  $\because P_1, P_2, P_3, P_4$  四点共面

$\therefore$  三矢量  $\overrightarrow{P_1P_4}, \overrightarrow{P_2P_4}, \overrightarrow{P_3P_4}$  共面, 故三矢量线性相关

即存在不全为 0 的数  $k_1, k_2, k_3$  使得  $k_1\overrightarrow{P_1P_4} + k_2\overrightarrow{P_2P_4} + k_3\overrightarrow{P_3P_4} = 0$

$$\text{即 } k_1(\overrightarrow{\gamma_4} - \overrightarrow{\gamma_1}) + k_2(\overrightarrow{\gamma_4} - \overrightarrow{\gamma_2}) + k_3(\overrightarrow{\gamma_4} - \overrightarrow{\gamma_3}) = 0$$

$$\text{由此得 } k_1\overrightarrow{\gamma_1} + k_2\overrightarrow{\gamma_2} + k_3\overrightarrow{\gamma_3} - (k_1 + k_2 + k_3)\overrightarrow{\gamma_4} = 0$$

$$\text{令 } \lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2, \lambda_3 = k_3, \lambda_4 = -(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$\text{则 } \sum_{i=1}^4 \lambda_i \overrightarrow{\gamma_i} = 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1.$$

6. 已知非零矢量  $\vec{n}$  和平面  $\alpha$ ，平面内有两非零矢量  $\vec{a}, \vec{b}$  相交， $\vec{n} \perp \vec{a}$ ， $\vec{n} \perp \vec{b}$ ，求证  $\vec{n}$  垂直于平面  $\alpha$ 。

证明：  $\because \vec{n} \perp \vec{a}, \vec{n} \perp \vec{b} \quad \therefore \vec{n} \cdot \vec{a} = 0, \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$

对于平面内任意矢量  $\vec{c}$ ，  $\because \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$

$$\therefore \vec{n} \cdot \vec{c} = \vec{n} \cdot (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \vec{n} \cdot \vec{a} + \mu \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$$

$\therefore \vec{n}$  垂直于平面内任一矢量，则  $\vec{n}$  垂直于平面  $\alpha$ 。

7. 已知矢量  $\vec{a}, \vec{b}$  不共线，问  $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$  与  $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$  是否线性相关？

证明：假设线性相关，则存在不全为 0 的  $\lambda, \mu$ ，使得  $\lambda \vec{c} + \mu \vec{d} = 0$

$$\text{即 } \lambda(2\vec{a} - \vec{b}) + \mu(3\vec{a} - 2\vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a}(2\lambda + 3\mu) + \vec{b}(-\lambda - 2\mu) = 0$$

故由已知  $\vec{a}, \vec{b}$  不共线得  $\begin{cases} 2\lambda + 3\mu = 0 \\ -\lambda - 2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$  与假设矛盾，故不存在不全为 0 的

$\lambda, \mu$ ，使得  $\lambda \vec{c} + \mu \vec{d} = 0$  成立。所以  $\vec{c}, \vec{d}$  线性无关。

8. 用向量法证明： $P$  是  $\triangle ABC$  重心的充要条件是  $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = 0$ 。

证明：在  $\triangle ABC$  中，设  $D, E, F$  分别是  $BC, AC, AB$  边的中点

必要性：由  $P$  是三角形的重心得  $\vec{PC} = 2\vec{PF}$ ，

$$\text{而 } \vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PF} \quad \text{即 } \vec{PA} + \vec{PB} = -\vec{PC}$$

所以

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = 0$$

充分性 在  $\triangle ABC$  中，  $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PF}$

又由  $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = 0$  知  $\vec{PA} + \vec{PB} = -\vec{PC}$ ，

故  $\overrightarrow{PF}$  与  $\overrightarrow{PC}$  共线从而 C, P, F 共线, 即 P 在 AB 边的中线上,

同理可得 P 也在 BC 与 AC 边的中线上

上

即 P 是三角形的重心.

9. 设  $\overrightarrow{OP_i} = g_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 证明若存在不全为 0 的实数  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 使得

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i \overrightarrow{\gamma_i} = 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1, \text{ 则 } P_1, P_2, P_3, P_4 \text{ 四点共面.}$$

证明: 设有不全为 0 的实数  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 使得  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i \overrightarrow{\gamma_i} = 0$  且  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$

根据条件设  $\lambda_4 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \neq 0$  代入等式整理得

$$\lambda_1(\overrightarrow{\gamma_4} - \overrightarrow{\gamma_1}) + \lambda_2(\overrightarrow{\gamma_4} - \overrightarrow{\gamma_2}) + \lambda_3(\overrightarrow{\gamma_4} - \overrightarrow{\gamma_3}) = 0$$

$$\text{即 } \lambda_1 \overrightarrow{P_1 P_4} + \lambda_2 \overrightarrow{P_2 P_4} + \lambda_3 \overrightarrow{P_3 P_4} = 0$$

又  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$  故  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  不全为 0

所以三矢量共面, 即  $P_1, P_2, P_3, P_4$  四点共面.

10. 证明菱形的两对角线互相垂直.

证明: 设菱形的相邻两矢量为  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$ , 则  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ,

菱形的两对角线为  $\vec{a} + \vec{b}$  和  $\vec{a} - \vec{b}$

$$\text{则 } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$$

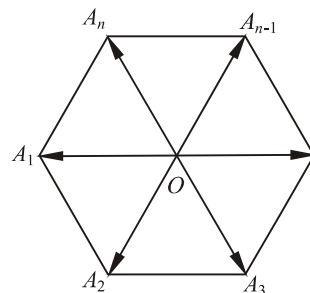
$$\text{则 } (\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$$

11. 设点 O 是平面上正多边形  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的中心, 证明:  $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} =$

$\vec{0}$ .

证明: 因为  $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} = \lambda \overrightarrow{OA_2}$ ,

$$\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_4} = \lambda \overrightarrow{OA_3},$$



.....

$$\overrightarrow{OA_{n-1}} + \overrightarrow{OA_1} = \lambda \overrightarrow{OA_n},$$

$$\overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OA_2} = \lambda \overrightarrow{OA_1},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } & 2(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}) \\ & = \lambda(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } (\lambda - 2)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}) = \vec{0}.$$

显然  $\lambda \neq 2$ , 即  $\lambda - 2 \neq 0$ .

$$\text{所以 } \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

12. 用向量法证明三角形各边的垂直平分线共点且这点到各顶点等距.

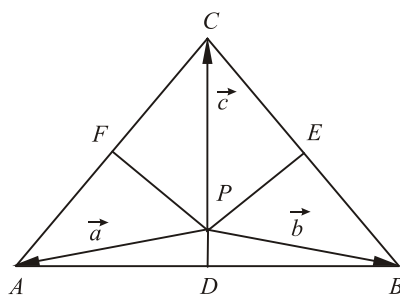
证明: 如图所示, 设  $AB, BC$  边的垂直平分线

$PD, PE$  相交于  $P, D, E, F$  为  $AB, BC, CA$  的中点,

$$\text{设 } \overrightarrow{PA} = \vec{a}, \overrightarrow{PB} = \vec{b}, \overrightarrow{PC} = \vec{c},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}, \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b}).$$



因为  $\overrightarrow{PD} \perp \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{BC}$ ,

$$\text{所以 } \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{b}^2 - \vec{a}^2) = 0, \quad \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c}^2 - \vec{b}^2) = 0,$$

$$\text{从而有 } \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2, \quad \text{即 } |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{c}^2 - \vec{a}^2) = 0,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PF} \perp \overrightarrow{CA}, \quad \text{且 } |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|.$$

故三角形各边的垂直平分线共点且这点到各顶点等距.

13. 设  $L, M, N$  分别是  $\triangle ABC$  的三边  $BC, CA, AB$  的中点, 证明: 三中线向量  $\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}$  可以构成一个三角形.

$$\text{证明: } \because \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}), \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$$\therefore \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}$$

$\therefore$  三中线向量  $\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}$  构成一个三角形.

14. 用向量法证明平行四边形的对角线互相平分.

证明：如图所示，在平行四边形 ABCD 中，O 是对角线 AC，BD 的交点

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$\text{但 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$$

由于  $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \parallel \overrightarrow{AC}$ ,  $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \parallel \overrightarrow{BD}$ , 而  $\overrightarrow{AC}$  不平行于  $\overrightarrow{BD}$ ,

$$\therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \mathbf{0},$$

从而  $OA=OC$ ,  $OB=OD$ 。

15. 用向量法证明三角形三中线共点。

证明：设 BC，CA，AB 中点分别为 L，M，N。

AL 与 BM 交于  $P_1$ ，AL 于 CN 交于  $P_2$ , BM 于 CN 交于  $P_3$ ,

取空间任一点 O，则

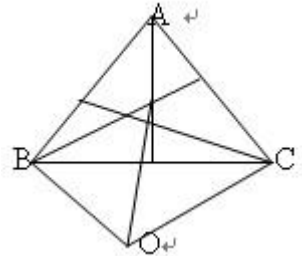
$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP_1} = \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\text{同理 } \overrightarrow{OP_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OP_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$\therefore P_1, P_2, P_3$  三点重合, 即三角形三中线共点。



16. 用向量法证明梯形两腰中点连续平行于上、下两底边且等于它们长度和的一半。

证明：已知梯形 ABCD，两腰中点分别为 M、N，连接 AN、BN。

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}, \therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}, \text{ 即}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}), \text{ 故 } \overrightarrow{MN} \text{ 平行且等于 } \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

17. 记互不共线的三矢量为  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ，证明三矢量首尾顺次连接形成三角形的充要条件是它们的和是  $\vec{0}$ 。

证明: ( $\Rightarrow$ ): 若三矢量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  首尾顺次连接形成  $\triangle ABC$

如图所示, 记  $\angle A, \angle B, \angle C$  对应的矢量分别为  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

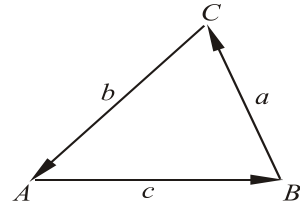
$$\text{则 } \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

$$\text{即 } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

( $\Leftarrow$ ): 设  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , 记  $\vec{AB} = \vec{c}, \vec{BC} = \vec{a}$

$$\text{则 } \vec{AC} = \vec{a} + \vec{c} \quad \therefore \vec{AC} + \vec{b} = \vec{0} \quad \text{即 } \vec{b} = -\vec{AC} = \vec{CA}$$

$\therefore$  三矢量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  首尾顺次连接形成三角形.



18. 内接于半圆且以直径为一边的三角形是直角三角形.

解: 如图所示,  $\triangle ABC$  内接于圆  $O$ ,  $AB$  为直径,

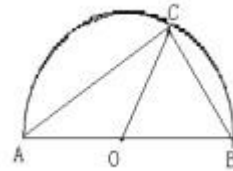
$$\text{则 } |\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|, \text{ 且 } \vec{OA} = -\vec{OB}$$

$$\therefore \vec{AC} \cdot \vec{BC} = (\vec{OC} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB})$$

$$= (\vec{OC} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OC} + \vec{OA})$$

$$= \vec{OC}^2 - \vec{OA}^2 = 0$$

$\therefore \vec{AC} \perp \vec{BC}$ , 则  $\triangle ABC$  是直角三角形.



19. 用矢量方法证明三角形的正弦定理:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .

证明: 在  $\triangle ABC$  中, 设  $\vec{BC} = \vec{a}$ ,  $\vec{CA} = \vec{b}$ ,  $\vec{AB} = \vec{c}$ ,

$$\text{且 } |\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c, \text{ 则 } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0},$$

$$\text{从而有 } \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b},$$

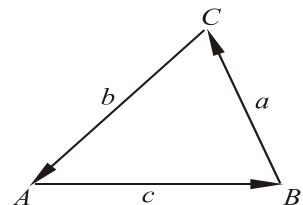
$$\text{所以 } |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{c} \times \vec{a}| = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

$$bc \sin A = ca \sin B = ab \sin C,$$

$$\text{于是 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

20. 用矢量方法证明三角形面积公式:  $\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ , 式中  $p = (a+b+c)$  是三角形的半周长,  $\Delta$  为三角形的面积.

证明: 如图所示,  $\triangle ABC$  的面积为  $\Delta = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$ ,



所以  $\Delta^2 = \frac{1}{4}(\vec{a} \times \vec{b})^2$ .

因为  $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2$ ,

所以  $\Delta^2 = \frac{1}{4}[a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2]$ .

由于  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ,

从而  $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$ ,  $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{c}^2$ ,

所以  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{c}^2 - \vec{a}^2 - \vec{b}^2) = \frac{1}{2}(c^2 - a^2 - b^2)$ ,

故有 
$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \frac{1}{4}[a^2 b^2 - \frac{1}{4}(c^2 - a^2 - b^2)^2] \\ &= \frac{1}{16}[2ab - (c^2 - a^2 - b^2)][2ab + (c^2 - a^2 - b^2)] \\ &= \frac{1}{16}[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] \\ &= \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \\ &= \frac{1}{16} \cdot 2p \cdot (2p-2c)(2p-2b)(2p-2a). \end{aligned}$$

所以  $\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ ,

或  $\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

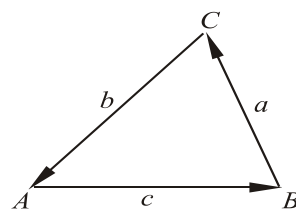
21. 用向量法证明三角形的余弦定理  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ .

证明: 如图所示,  $\triangle ABC$  中, 设  $\vec{AC} = \vec{b}$ ,  $\vec{AB} = \vec{c}$ ,  $\vec{BC} = \vec{a}$ ,

且  $|\vec{a}| = a$ ,  $|\vec{b}| = b$ ,  $|\vec{c}| = c$ . 则  $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ ,

$$\vec{a}^2 = (\vec{b} - \vec{c})^2 = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos A.$$

即  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ .



22. 利用数性积证明不等式  $\left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^3 a_i^2 \sum_{i=1}^3 b_i^2$ .

证明: 设  $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \quad \text{即} \quad \left|\sum_{i=1}^3 a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^3 b_i^2}$$

$$\therefore \left( \sum_{i=1}^3 a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^3 a_i^2 \sum_{i=1}^3 b_i^2$$

23. 证明: (1). 矢量  $\vec{a}$  垂直于矢量  $(\vec{a}\vec{b})\vec{c} - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$ .

(2). 如果  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ ,  $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$ . 那么  $\vec{a} - \vec{d}$  与  $\vec{b} - \vec{c}$  共线.

证明: 1) 由于  $\vec{a} \cdot [(\vec{a}\vec{b})\vec{c} - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}] = \vec{a} \cdot [(\vec{a}\vec{b})\vec{c}] - \vec{a} \cdot [(\vec{a}\vec{c})\vec{b}]$

$$= (\vec{a}\vec{b})(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{c})(\vec{a}\vec{b}) = 0$$

因此,  $\vec{a}$  垂直于矢量  $(\vec{a}\vec{b})\vec{c} - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$ .

2) 由题意知:  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ ,  $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$

$$\begin{aligned} \therefore (\vec{a} - \vec{d}) \times (\vec{b} - \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{d} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{d} + \vec{d} \times \vec{c} \\ &= \vec{c} \times \vec{d} - \vec{b} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{d} - \vec{c} \times \vec{d} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \vec{a} - \vec{d}$  与  $\vec{b} - \vec{c}$  共线.

24. 如果  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , 那么  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ .

证明: 由于  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , 故  $\vec{a} = -(\vec{b} + \vec{c})$

于是  $\vec{a} \times \vec{b} = [-(\vec{b} + \vec{c})] \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{c} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$ ;

同理  $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \times [-(\vec{b} + \vec{c})] = -(\vec{c} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{c}) = -\vec{c} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$ .

因此  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ .

25. 如果  $\vec{a} = \vec{p} \times \vec{n}$ ,  $\vec{b} = \vec{q} \times \vec{n}$ ,  $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{n}$ , 那么  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  共面.

证明: 由题意知:  $\vec{a} = \vec{p} \times \vec{n}$ ,  $\vec{b} = \vec{q} \times \vec{n}$ ,  $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{n}$ ,

则  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{p} \times \vec{n}) \times (\vec{q} \times \vec{n}) \cdot (\vec{r} \times \vec{n})$

$$= [\vec{p} \cdot (\vec{n} \times \vec{n}) \cdot \vec{q} - (\vec{p} \times \vec{n}) \cdot \vec{q} \cdot \vec{n}] \cdot (\vec{r} \times \vec{n})$$

$$\because -(\vec{p} \times \vec{n}) \cdot \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) = 0 \quad \vec{n} \times \vec{n} = \vec{0}$$

$$\therefore (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

$\therefore \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  共面.

26. 设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  为三个非零矢量, 证明  $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}) = 2(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

证明: 左端  $= [(\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a})] \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

$$= [\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}] \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\begin{aligned}
&= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} + (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{a} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} + (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \\
&= (\vec{b} \vec{c} \vec{a}) + (\vec{c} \vec{a} \vec{b}) = 2(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \text{右端}.
\end{aligned}$$

$$\text{故 } (\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}) = 2(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

27. 证明在平面上如果  $\vec{m}_1 \neq \vec{m}_2$ , 且  $\vec{a} \cdot \vec{m}_i = \vec{b} \cdot \vec{m}_i$  ( $i=1,2$ ), 则有  $\vec{a} = \vec{b}$ .

证明: 因为  $\vec{m}_1 \neq \vec{m}_2$ ,

所以对该平面上任意矢量  $\vec{c}$ ,  $\vec{c}$  可表示为  $\vec{c} = \lambda \vec{m}_1 + \mu \vec{m}_2$ ,

$$\begin{aligned}
\text{则由题意知: } (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\lambda \vec{m}_1 + \mu \vec{m}_2) \\
&= \lambda \vec{m}_1 \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + \mu \vec{m}_2 \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\
&= \lambda (\vec{a} \cdot \vec{m}_1 - \vec{b} \cdot \vec{m}_1) + \mu (\vec{a} \cdot \vec{m}_2 - \vec{b} \cdot \vec{m}_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

故  $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{c}$ . 由  $\vec{c}$  的任意性知  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$

从而  $\vec{a} = \vec{b}$ .

28. 在平行四边形 ABCD 中, 求证  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ .

证明:  $\because \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}
\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}) = 0
\end{aligned}$$

29. 设  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  为三个非零矢量, 证明  $(\vec{a} \times \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$ , 并说明在什么情形下等号成立.

$$\begin{aligned}
\text{证明: } (\vec{a} \times \vec{b})^2 &= |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\
&\leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2.
\end{aligned}$$

要使等号成立, 必须  $\sin^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ , 从而  $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ ,

故  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ , 即当  $\vec{a} \perp \vec{b}$  时, 等号成立.

30. 对矢量  $\vec{a}, \vec{b}$ , 求证  $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ .

证明:  $\because \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2, (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b})$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= (\vec{a} \times \vec{b})^2 \end{aligned}$$

$$\therefore (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

31. 若三向量  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  满足条件  $\vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA} + \vec{OA} \times \vec{OB} = \vec{0}$ , 则三向量  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  共面.

证明:  $\because \vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA} + \vec{OA} \times \vec{OB} = \vec{0}$

$\therefore$  等式两边点乘  $\vec{OA}$  得

$$\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA} + \vec{OA} \times \vec{OB}) = 0$$

$$\text{即 } (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) = 0$$

$\therefore$  三向量  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  共面.

32. 若三向量  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  满足  $\vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA} + \vec{OA} \times \vec{OB} = \vec{0}$ , 求证三点  $A, B, C$  共线.

证明:  $\because \vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA} + \vec{OA} \times \vec{OB} = \vec{0}$

$$\therefore \vec{AB} \times \vec{AC} = (\vec{OB} - \vec{OA}) \times (\vec{OC} - \vec{OA})$$

$$= \vec{OB} \times \vec{OC} - \vec{OB} \times \vec{OA} - \vec{OA} \times \vec{OC} + \vec{OA} \times \vec{OA}$$

$$= \vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA} + \vec{OA} \times \vec{OB}$$

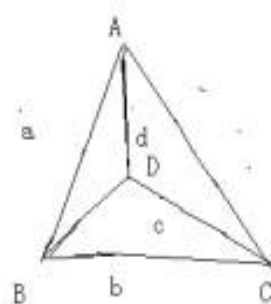
$$= \vec{0}$$

$\therefore \vec{AB} // \vec{AC}$ , 所以三点  $A, B, C$  共线.

33. 如图所示, 在空间四边形  $ABCD$  中,

$$\vec{AB} = \vec{a}, \vec{BC} = \vec{b}, \vec{CD} = \vec{c}, \vec{DA} = \vec{d}, \quad |\vec{AB}| = a, |\vec{BC}| = b,$$

$$|\vec{CD}| = c, |\vec{DA}| = d, \text{ 若 } \vec{AC} \perp \vec{BD}, \text{ 证明 } \vec{a}^2 + \vec{c}^2 = \vec{b}^2 + \vec{d}^2.$$



证明:  $\because \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

$$\text{即 } (\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \vec{b}^2 + \vec{b}\vec{c} = 0$$

$$\text{又} \because \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0 \quad \therefore \vec{d} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

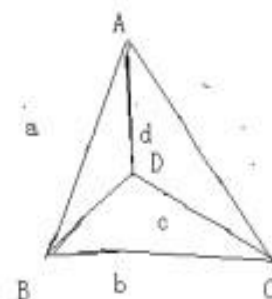
$$\begin{aligned} \therefore \vec{d}^2 &= -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2) \\ &= \vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{c}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{a}^2 + \vec{c}^2 = \vec{b}^2 + \vec{d}^2.$$

34. 如图所示, 在空间四边形 ABCD 中,

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{c}, \overrightarrow{DA} = \vec{d}, \quad |\overrightarrow{AB}| = a, |\overrightarrow{BC}| = b,$$

$$|\overrightarrow{CD}| = c, |\overrightarrow{DA}| = d, \text{ 证明若 } \vec{a}^2 + \vec{c}^2 = \vec{b}^2 + \vec{d}^2, \text{ 则 } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}.$$



证明:  $\because \vec{a}^2 + \vec{c}^2 = \vec{b}^2 + \vec{d}^2, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$

$$\therefore \vec{d} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{d}^2 &= -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2) \\ &= \vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b}) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{移项得 } 2(\vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{d}^2 + \vec{b}^2) - (\vec{a}^2 + \vec{c}^2) = (\vec{b}^2 + \vec{d}^2) - (\vec{a}^2 + \vec{c}^2) = 0$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c}) = 0 \text{ 即 } AC \perp BD.$$

35. 证明  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  共面的充要条件是  $\vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}$  共面.

$$\text{证 } \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \text{ 共面的} \Leftrightarrow (\vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[ (\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a}) \right] \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[ (\vec{b} \vec{c} \vec{a}) \vec{c} - (\vec{b} \vec{c} \vec{c}) \vec{a} \right] \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a} \vec{b} \vec{c})^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 共面.}$$

36. 利用向量证明  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$ , 并说明何

时等号成立.

证明: 设  $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ ,  $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$

$$\begin{aligned} \text{则 } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 &= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c})^2 \\ &= (|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}))^2 \\ &= (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) |\vec{c}| \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}))^2 \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 \sin^2 \angle(\vec{a}, \vec{b}) \cos^2 \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \end{aligned}$$

且当  $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ ,  $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$  两两垂直时等号成立.

37. 设一直线上三点  $A, B, P$  满足  $\vec{AP} = \lambda \vec{PB}$  ( $\lambda \neq -1$ ),  $O$  是空间任意一点, 求证:

$$\vec{OP} = \frac{\vec{OA} + \lambda \vec{OB}}{1 + \lambda}.$$

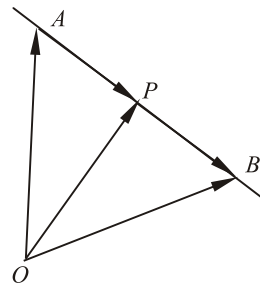
证明: 如图所示, 因为

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}, \vec{PB} = \vec{OB} - \vec{OP},$$

所以  $\vec{OP} - \vec{OA} = \lambda(\vec{OB} - \vec{OP})$ ,

$$(1 + \lambda)\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda\vec{OB},$$

$$\text{从而 } \vec{OP} = \frac{\vec{OA} + \lambda\vec{OB}}{1 + \lambda}$$



38. 设径矢  $\vec{OA} = \vec{r}_1$ ,  $\vec{OB} = \vec{r}_2$ ,  $\vec{OC} = \vec{r}_3$ , 证明  $\vec{R} = (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) + (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) + (\vec{r}_3 \times \vec{r}_1)$  垂直于  $ABC$  平面.

证明: 因为  $\vec{AB} \cdot \vec{R} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot [(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) + (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) + (\vec{r}_3 \times \vec{r}_1)]$

$$\begin{aligned}
&= (\vec{r}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2) + (\vec{r}_2, \vec{r}_2, \vec{r}_3) + (\vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_1) - (\vec{r}_1, \vec{r}_1, \vec{r}_2) - (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) - (\vec{r}_1, \vec{r}_3, \vec{r}_1) \\
&= (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) - (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = 0,
\end{aligned}$$

所以  $\vec{AB} \perp \vec{R}$ .

同理可证  $\vec{AC} \perp \vec{R}$ .

所以  $\vec{R} \perp$  平面  $ABC$ .

39. 如果非零矢量  $\vec{r}_i (i=1,2,3)$  满足  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{r}_3$ ,  $\vec{r}_2 = \vec{r}_3 \times \vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_3 = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ , 那么  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  是彼此垂直的单位矢量.

证明: 由矢性积的定义易知  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  彼此垂直.

下面证它们均为单位矢量.

$$\text{因为 } \vec{r}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{r}_3, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_3 \times \vec{r}_1,$$

$$\text{所以 } |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| |\vec{r}_3|, \quad |\vec{r}_2| = |\vec{r}_3| \cdot |\vec{r}_1|, \text{ 即 } |\vec{r}_1| = |\vec{r}_1| |\vec{r}_3|^2.$$

$$\text{由于 } |\vec{r}_1| \neq 0, \text{ 从而 } |\vec{r}_3|^2 = 1, \quad |\vec{r}_3| = 1.$$

$$\text{同理可证 } |\vec{r}_2| = 1, \quad |\vec{r}_1| = 1.$$

从而  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  都是单位矢量.

40. 用向量法证明等腰三角形底边上的中线垂直于底边.

证明: 设等腰  $\triangle ABC$  的三边矢量为  $\vec{AB} = \vec{c}, \vec{BC} = \vec{a}, \vec{CA} = \vec{b}$

且  $|\vec{BC}| = |\vec{CA}|$ , 即  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , 底边上的中线为  $CD$

$$\text{则 } \vec{CD} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\text{则 } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = -\vec{c} \cdot \left( \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) \quad \because \vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\begin{aligned}
\therefore \vec{AB} \cdot \vec{CD} &= -\vec{c} \cdot \left( \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) = -(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \left[ \vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \right] \\
&= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{b}^2 - \vec{a}^2) = 0
\end{aligned}$$

$\therefore \vec{AB} \perp \vec{CD}$ , 即等腰三角形底边上的中线垂直于底边.

41. 三角形三条中线的长度的平方和等于它的三边的长度平方和的  $\frac{3}{4}$ .

证明：记三角形三边矢量为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ，则三条中线的矢量分别是

$$\vec{l} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \vec{m} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}, \vec{n} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\because \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{l}^2 + \vec{m}^2 + \vec{n}^2 &= \frac{5}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2) + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{3}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2) \end{aligned}$$

$\therefore$  三角形三中线的长度的平方和等于它的三边长度平方和的 $\frac{3}{4}$ .

42. 证明如果三个矢量 $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$ 共面，则它们也共线。

证明：记与三矢量均垂直的矢量为 $\vec{e}$ ，

则由题意知： $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}$ 与矢量 $\vec{a} \times \vec{b}$ 均垂直，则 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}$ 共面；

同理得 $\vec{a}, \vec{c}, \vec{e}$ 和 $\vec{b}, \vec{c}, \vec{e}$ 共面。

$\therefore \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 即 $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$ 垂直与同一平面

故 $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$ 共线。

43. 对于任意三个矢量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ，证明：矢量 $\vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}, \vec{a} - \vec{b}$ 共面。

$$\begin{aligned} \text{证明：} \because (\vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}, \vec{a} - \vec{b}) &= [(\vec{b} - \vec{c}) \times (\vec{c} - \vec{a})] \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= (\vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= (b, c, a) - (c, a, b) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore$  矢量 $\vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}, \vec{a} - \vec{b}$ 共面。

44. 证明等式： $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = 0$ 。

$$\begin{aligned} \text{证明：} \because (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \\ (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} = \end{aligned}$$

$$(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$\therefore$  三式相加得  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = 0$

45. 证明  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a}' \times \vec{b}') = (\vec{a}\vec{b}\vec{b}')\vec{a}' - (\vec{a}\vec{b}\vec{a}')\vec{b}' = (\vec{a}\vec{a}'\vec{b}')\vec{b} - (\vec{b}\vec{a}'\vec{b}')\vec{a}$ .

证明：首先证明第一个等号成立：设  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}$

$$\begin{aligned} \text{则 } (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a}' \times \vec{b}') &= \vec{e} \times (\vec{a}' \times \vec{b}') = (\vec{e} \cdot \vec{b}')\vec{a}' - (\vec{e} \cdot \vec{a}')\vec{b}' \\ &= \left( (\vec{a} \times \vec{b})\vec{b}' \right)\vec{a}' - \left( (\vec{a} \times \vec{b})\vec{a}' \right)\vec{b}' \\ &= (\vec{a}\vec{b}\vec{b}')\vec{a}' - (\vec{a}\vec{b}\vec{a}')\vec{b}' \end{aligned}$$

$$\therefore (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a}' \times \vec{b}') = (\vec{a}\vec{b}\vec{b}')\vec{a}' - (\vec{a}\vec{b}\vec{a}')\vec{b}'$$

接着证明  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a}' \times \vec{b}') = (\vec{a}\vec{a}'\vec{b}')\vec{b} - (\vec{b}\vec{a}'\vec{b}')\vec{a}$

$$\begin{aligned} \text{即 } \therefore (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a}' \times \vec{b}') &= -(\vec{a}' \times \vec{b}') \times (\vec{a} \times \vec{b}) \\ &= -\left[ (\vec{a}'\vec{b}'\vec{b})\vec{a} - (\vec{a}'\vec{b}'\vec{a})\vec{b} \right] \\ &= (\vec{a}\vec{a}'\vec{b}')\vec{b} - (\vec{b}\vec{a}'\vec{b}')\vec{a} \end{aligned}$$

$$\therefore (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a}' \times \vec{b}') = (\vec{a}\vec{b}\vec{b}')\vec{a}' - (\vec{a}\vec{b}\vec{a}')\vec{b}' = (\vec{a}\vec{a}'\vec{b}')\vec{b} - (\vec{b}\vec{a}'\vec{b}')\vec{a}$$

46. 证明 对于任意矢量  $\vec{r}_i (i=1,2,3,4)$  下式成立：

$$\left( \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \right) \left( \vec{r}_3 \times \vec{r}_4 \right) + \left( \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 \right) \left( \vec{r}_4 \times \vec{r}_2 \right) + \left( \vec{r}_1 \times \vec{r}_4 \right) \left( \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 \right) = \vec{0}.$$

证明：左式 =  $\left( \vec{r}_1 \vec{r}_3 \right) \left( \vec{r}_2 \vec{r}_4 \right) - \left( \vec{r}_1 \vec{r}_4 \right) \left( \vec{r}_2 \vec{r}_3 \right) + \left( \vec{r}_1 \vec{r}_4 \right) \left( \vec{r}_3 \vec{r}_2 \right)$

$$-\begin{pmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_3 & \vec{r}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_3 & \vec{r}_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_2 & \vec{r}_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

47. 证明  $\begin{pmatrix} \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}, \vec{e} \times \vec{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} \vec{b} \vec{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{c} \vec{e} \vec{f} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{a} \vec{b} \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{d} \vec{e} \vec{f} \end{pmatrix}.$

证明:  $\begin{pmatrix} \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}, \vec{e} \times \vec{f} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} \vec{a} \times \vec{b} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{c} \times \vec{d} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \vec{e} \times \vec{f} \end{pmatrix}$

$$= \left[ \begin{pmatrix} \vec{a} \vec{b} \vec{d} \end{pmatrix} \vec{c} - \begin{pmatrix} \vec{a} \vec{b} \vec{c} \end{pmatrix} \vec{d} \right] \cdot \begin{pmatrix} \vec{e} \times \vec{f} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{a} \vec{b} \vec{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{c} \vec{e} \vec{f} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{a} \vec{b} \vec{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{d} \vec{e} \vec{f} \end{pmatrix}$$

48. 对于任意矢量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ , 证明

$$\begin{pmatrix} \vec{b} \vec{c} \vec{d} \end{pmatrix} \vec{a} - \begin{pmatrix} \vec{c} \vec{d} \vec{a} \end{pmatrix} \vec{b} + \begin{pmatrix} \vec{d} \vec{a} \vec{b} \end{pmatrix} \vec{c} - \begin{pmatrix} \vec{a} \vec{b} \vec{c} \end{pmatrix} \vec{d} = \vec{0}.$$

证明:  $\begin{pmatrix} \vec{b} \vec{c} \vec{d} \end{pmatrix} \vec{a} - \begin{pmatrix} \vec{c} \vec{d} \vec{a} \end{pmatrix} \vec{b} + \begin{pmatrix} \vec{d} \vec{a} \vec{b} \end{pmatrix} \vec{c} - \begin{pmatrix} \vec{a} \vec{b} \vec{c} \end{pmatrix} \vec{d}$

$$= \left[ \begin{pmatrix} \vec{c} \times \vec{d} \end{pmatrix} \vec{b} \right] \vec{a} - \left[ \begin{pmatrix} \vec{c} \times \vec{d} \end{pmatrix} \vec{a} \right] \vec{b} + \left[ \begin{pmatrix} \vec{a} \times \vec{b} \end{pmatrix} \vec{d} \right] \vec{c} - \left[ \begin{pmatrix} \vec{a} \times \vec{b} \end{pmatrix} \vec{c} \right] \vec{d}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{c} \times \vec{d} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{a} \times \vec{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{a} \times \vec{b} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{c} \times \vec{d} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{a} \times \vec{b} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{c} \times \vec{d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{a} \times \vec{b} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{c} \times \vec{d} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

49. 证明等式:  $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{a} \times \lambda \vec{a} = \vec{0}.$

证明: 只要证  $\vec{a} \times \lambda \vec{a} = \vec{0}$  即可, 因为  $\vec{a}$  与  $\lambda \vec{a}$  平行 (即共线)

所以其夹角  $\theta = 0$  或  $\pi$ , 从而  $\sin \theta = 0$

$$\text{因此 } |\vec{a} \times \lambda \vec{a}| = |\vec{a}| |\lambda \vec{a}| \sin \theta = 0,$$

而模为 0 的矢量为零矢量, 所以  $\vec{a} \times \lambda \vec{a} = \vec{0}.$

50. 已知三角形的三个顶点为  $A(-1, 2, 3), B(1, 1, 1), C(0, 0, 5)$ , 试证  $\triangle ABC$

为直角三角形，并求  $\angle B$ 。

证明：  $\because \overrightarrow{AB} = \{2, -1, -2\}$ ， $\overrightarrow{AC} = \{1, -2, 2\}$ ， $\overrightarrow{BC} = \{-1, -1, 4\}$

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ，所以  $\triangle ABC$  为直角三角形，

$$\text{则 } \cos B = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{9}{3 \times 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = \frac{\pi}{4}.$$