1.4向量的线性关系与向量的分解

向量的**加法和数与向量的乘法**统称为向量的线性运算。

有限个向量经过线性运算，结果仍然是向量。

定义1.4.1　由向量a_1，a_2，… a_n 与数量λ_1，λ_2… λ_n

所组成的向量 $a=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n$

叫做向量a_1，a_2，… a_n的线性组合.

当向量a是a_1，a_2，… a_n的线性组合时，也称a可以用

a_1，… a_n线性表示.

或者说a可以分解成a_1，a_2，… a_n的线性组合.

下面几个式子就是向量a_1，a_2，… a_n的一些线性组合:

$a_1+a_2+\cdots+a_n$； $a_1-2a_2+\cdots a_n$；

a_1-a_2； $4a_1+5a_2$;

复习

零向量与任何共线的向量组共线.

零向量与任何共面的向量组共面.

对于共线 向量a, b，且$a \neq 0$

① a, b同向时 $\because$ $a_0 = \dfrac{a}{|a|}$, $b = |b| a_0$, $\therefore$ $b = |b| a_0$

$= \dfrac{|b|}{|a|} a$

②如果 a,b 反向时,同理有 $b = -|b| a_0$ $= -\dfrac{|b|}{|a|} a$

定理1.4.1　如果向量e≠0, 则向量 r与e共线的

充要条件是　　$r = x e$　　(1.4-1)

其中系数 x 被向量r, e 唯一确定．

e称为用线性组合来表示共线向量的基底.

证明：必要性：若r,e共线

r,e 同向：$r = \frac{|r|}{|e|} e$　r,e反向：$r = -\frac{|r|}{|e|} e$

此时，$x = \frac{|r|}{|e|}$　或　$x = -\frac{|r|}{|e|}$　即　$r = x e$

充分性：若　$r = x e$　由定义1.3.1知r , e共线.

定理1.4.1　如果向量e≠0, 则向量 r与e共线的

充要条件是　　　$r = x e$　　(1.4-1)

其中系数 x 被向量r, e 唯一确定 .

e称为用线性组合来表示共线向量的基底.

唯一性：　$r = x e$　中x的唯一.

若 $r = x_1 e = x_2 e$,　则有 $x_1 e = x_2 e$

即$(x_1 - x_2) e=0$

又$e \neq 0$　　所以 $x_1 - x_2=0$　　即 $x_1 = x_2$

定理1.4.2 如果向量e_1, e_2不共线，则向量r与e_1, e_2共面的充要条件是 $r = xe_1 + ye_2$ (1.4-2)

并且系数x, y被 r, e_1, e_2 唯一确定.

e_1、 e_2 叫做平面上向量的基底.

证：因为e_1, e_2不共线，于是 $e_1 \neq 0, e_2 \neq 0$.

1. 必要性 设r与e_1, e_2共面.

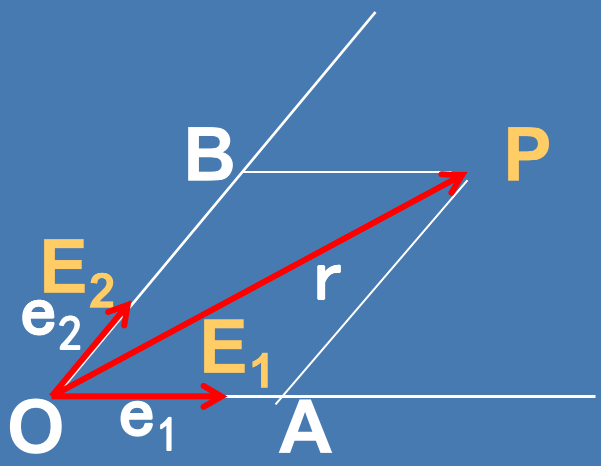
如果r与e_1或者e_2共线

由定理1.4.1,有$r = xe_1$,或$r = ye_2$

因此总有 $r = xe_1 + ye_2 (y = 0$或$x = 0)$

如果r与e_1和e_2都不共线，将它们归结到共同的起点O，

并设$\overrightarrow{OE_1}=e_1$，$\overrightarrow{OE_2}=e_2$，$\overrightarrow{OP}=r$



过P作PA∥OE_2交直线OE_1于A.

过P作PB∥OE_1交直线OE_2于B.

于是 $r=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

由定理1.4.1，$\overrightarrow{OA}=xe_1$ $\overrightarrow{OB}=ye_2$

所以$r=xe_1+ye_2$

必要性得证.

2. 充分性 设 $r = xe_1 + ye_2$， 要证明r与e_1, e_2共面

因为$r = xe_1 + ye_2$，此时，如果$x=0$，或$y=0$，

则有r与e_1共线或r与e_2共线．因此r与e_1, e_2共面.

如果$xy \neq 0$，由于$xe_1 \parallel e_1$，$ye_2 \parallel e_2$，

从两向量相加的平行四边形法则

可知：$r = xe_1 + ye_2$与e_1, e_2共面，

3. 证明x,y的唯一性

设 $r = x_1 e_1 + y_1 e_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2$

则$(x_1 - x_2)e_1 + (y_1 - y_2)e_2 = 0$,

又 $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$. 且不共线,

若 $x_1 \neq x_2$,则有 $e_1 = -\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} e_2$

由定理1.4.1 知 e_1和e_2共线. 矛盾.

于是 $x_1 = x_2$. 同理 $y_1 = y_2$

至此，我们从三个方面完成了定理1.4.2的证明:

1. 必要性: 设r与e_1, e_2共面，证明$r = xe_1+ye_2$成立.

2. 充分性: 设 $r=xe_1+ye_2$， 证明r与e_1,e_2共面.

3. 证明x,y的唯一性: 即证明x,y由r与e_1, e_2唯一确定.

定理1.4.3 如果向量e_1, e_2, e_3不共面,则空间任意

向量r可以由e_1, e_2, e_3线性表示:

$$r=xe_1+ye_2+ze_3 \qquad (1.4\text{-}3)$$

并且系数x, y, z由r与e_1, e_2, e_3唯一确定.

这时e_1, e_2, e_3叫做空间向量的基底

证:因为e_1, e_2, e_3不共面,所以有$e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$, $e_3 \neq 0$.

且 e_1, e_2, e_3彼此不平行.

1. 如果r与e_1, e_2 e_3中的某两个向量共面

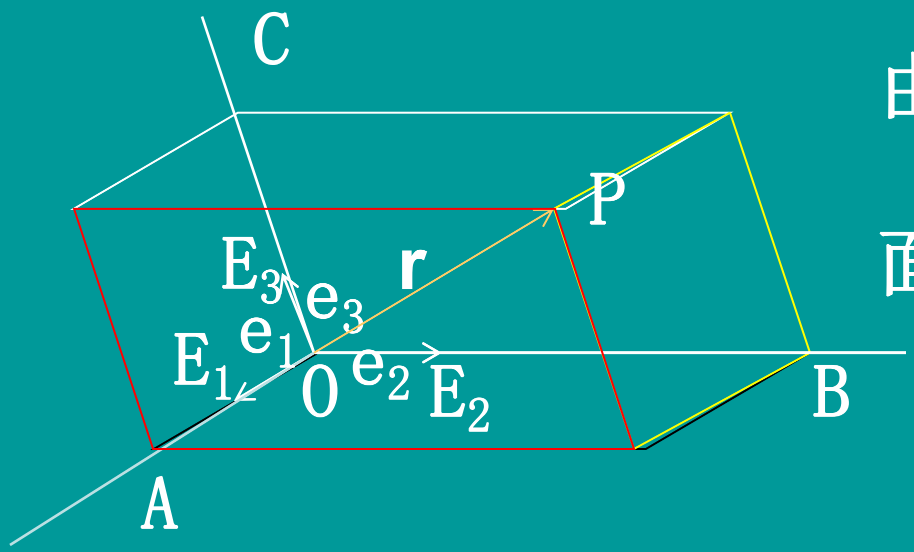
例如与e_1, e_2 共面, 则由定理1.4.2, 有$r=xe_1+ye_2$

从而有 $r=xe_1+ye_2+0e_3$

2.　如果r与e_1, e_2 e_3中的任意两个向量都不共面

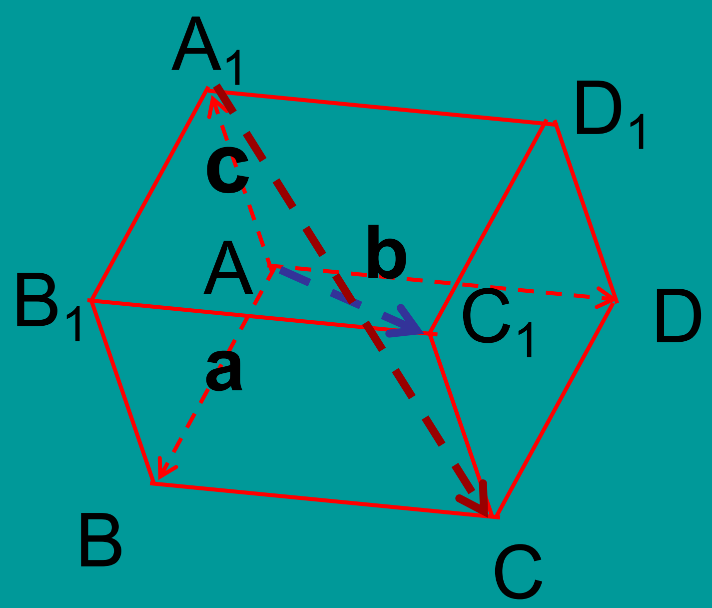
将r与e_1, e_2 , e_3归结到共同的始点O. 并设$\overrightarrow{OP}$= r

$\overrightarrow{OE_1}=e_1$ ，$\overrightarrow{OE_2}=e_2$ ，$\overrightarrow{OE_3}=e_3$ ， 过**r**的终点**P**作三平面分别与平面**OE_2E_3**，**OE_3E_1**，**OE_1E_2**平行，且分别与直线**OE_1**，**OE_2**，**OE_3**相交于**A**，**B**，**C**三点。



由此构成如图所示的平行六面体。

P8例2如图，在平行六面体中，$\overrightarrow{AB}$=a，$\overrightarrow{AD}$=b，$\overrightarrow{AA_1}$=c,试用a,b,c来表示对角线向量 $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$.



解： $\because \overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$

$\therefore \overrightarrow{AC_1}$ = **a+b+c**

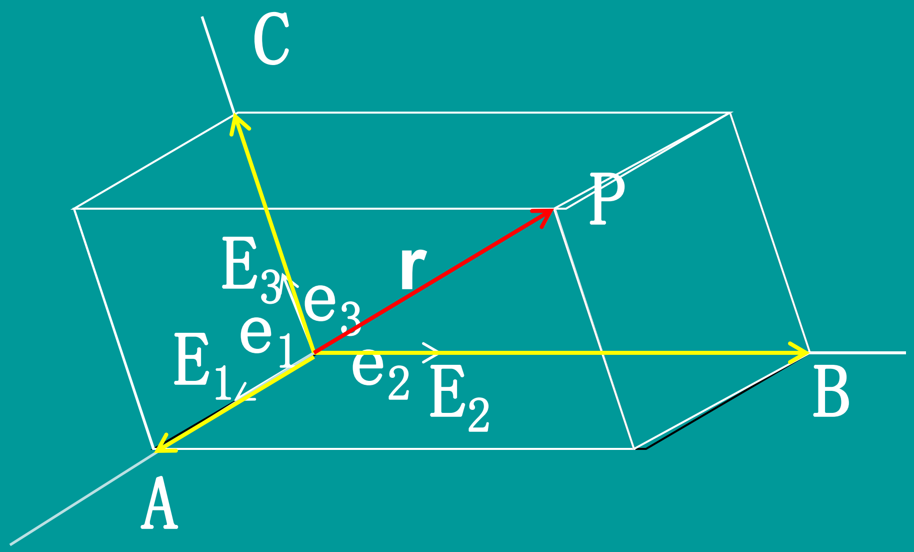
$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{A_1C}$= **-c+b+a=a+b-c**

从而有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

又根据定理1.4.1,可以假设: $\overrightarrow{OA}=xe_1,\overrightarrow{OB}=ye_2,\overrightarrow{OC}=ze_3$,

于是有: $r=xe_1+ye_2+ze_3$



3　证明系数x, y, z由r与e_1, e_2, e_3唯一确定.

如果　$r = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3 = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3$

则$(x_1 - x_2)e_1 + (y_1 - y_2)e_2 + (z_1 - z_2)e_3 = 0$

如果 $x_1 \neq x_2$，则 $e_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} e_2 + \dfrac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2} e_3$

由定理**1.4.2**知，e_1与e_2, e_3共面，又由定理假设知

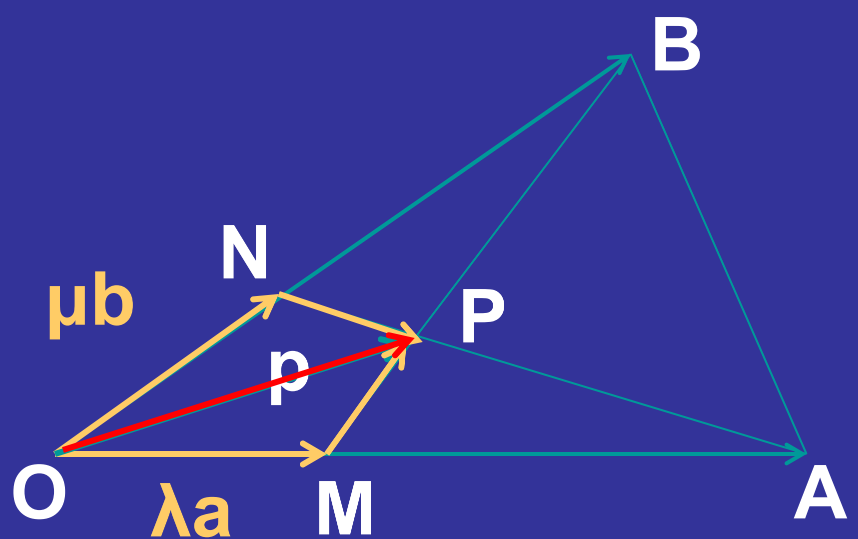
e_1, e_2, e_3不共面，矛盾. 所以$x_1 = x_2$

同理可证　$y_1 = y_2$，　$z_1 = z_2$. 唯一性得到证明.

例1　在△OAB中, $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=b$ ． M, N分别是边OA, OB上的点．且有$\overrightarrow{OM}=\lambda a$,　　$\overrightarrow{ON}=\mu b$

其中　$0<\lambda<1$, $0<\mu<1$

设AN与BM相交于P,试把向量$\overrightarrow{OP}=p$分解成a,b的线性组合。



解：　因为

$p=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}$　或 $p=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}$

$\overrightarrow{OM}=\lambda a$,

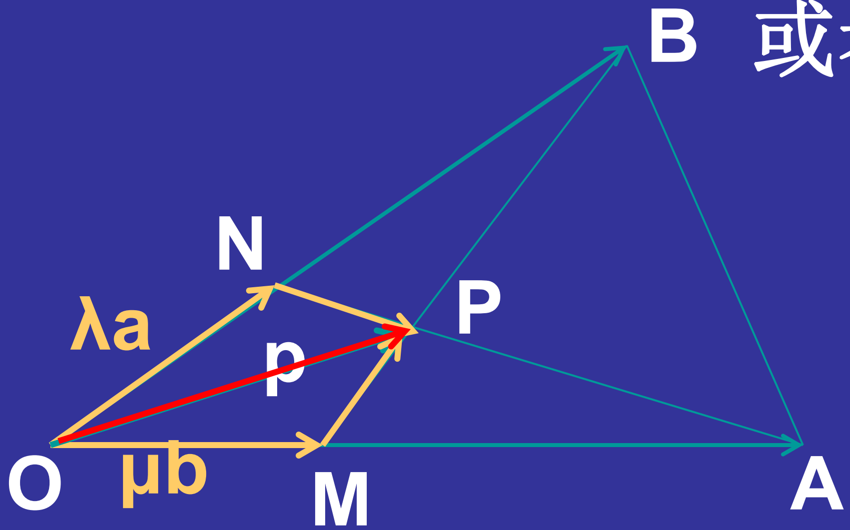
而$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MB}=x(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$

$=x(b-\lambda a)$

又 $\overrightarrow{ON} = \mu b$,

$\overrightarrow{NP} = y\overrightarrow{NA} = y(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON}) = y(a - \mu b)$

所以 $p = \lambda a + x(b - \lambda a) = \lambda(1 - x)\, a + xb$



或者 $p = \mu b + y(a - \mu b)$

$= ya + \mu(1 - y)\, b$

即 $p=\lambda(1-x)a+xb$

$p=ya+\mu(1-y)b$

由于a, b不共线,由定理1.4.2得: $\begin{cases}\lambda(1-x)=y\\ x=\mu(1-y)\end{cases}$

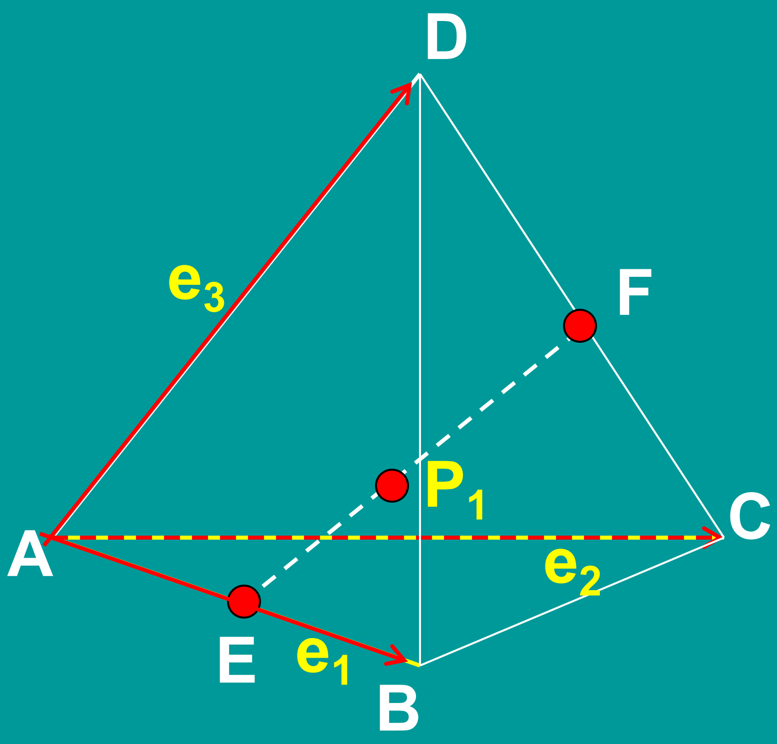
用代入消元法解得: $x=\dfrac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}$ $y=\dfrac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}$

将之代入$p=\lambda(1-x)a+xb$ 中整理得:

$$p=\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}a+\frac{\mu(1-\lambda)}{1-\lambda\mu}b$$

例2　证明四面体对边中点的连线交于一点，且互相平分。

证：　设四面体ABCD的一组对边AB、CD的中点E，F的连线为EF，其中点为P_1，其余二组对边中点连线的中点分别为P_2，P_3，下面证明P_1，P_2，P_3三点重合。



取不共线三向量　$\overrightarrow{AB}=e_1$

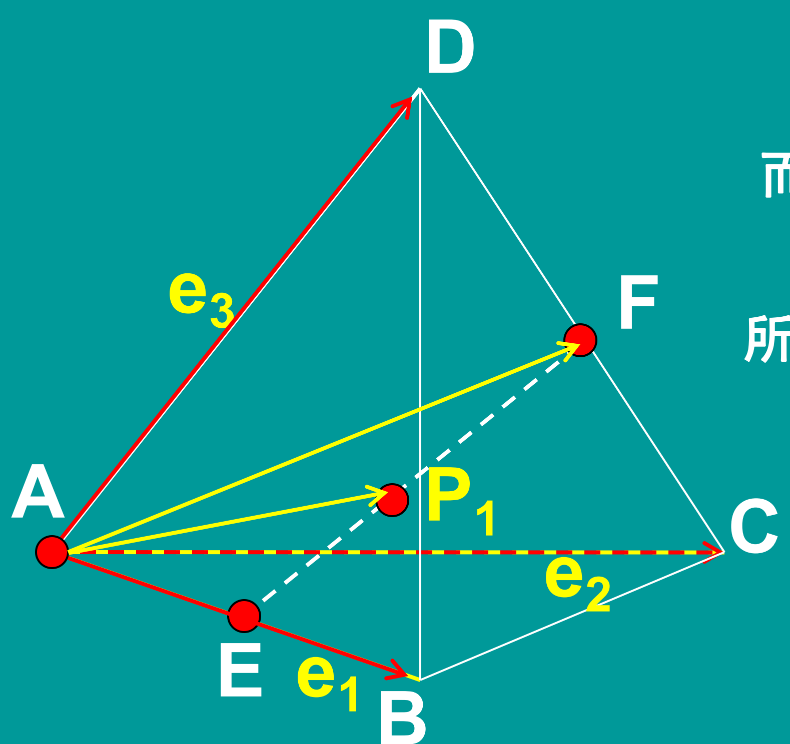
$\overrightarrow{AC}=e_2$

$\overrightarrow{AD}=e_3$

先求$\overrightarrow{AP_1}$用 e_1, e_2, e_3 线性表示的关系式

连结AF，因为AP_1是△AEF的中线，所以有 $\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$

又因为AF是△ACD的中线，所以又有



$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(e_2+e_3)$$

而 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}e_1$

所以 $\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$

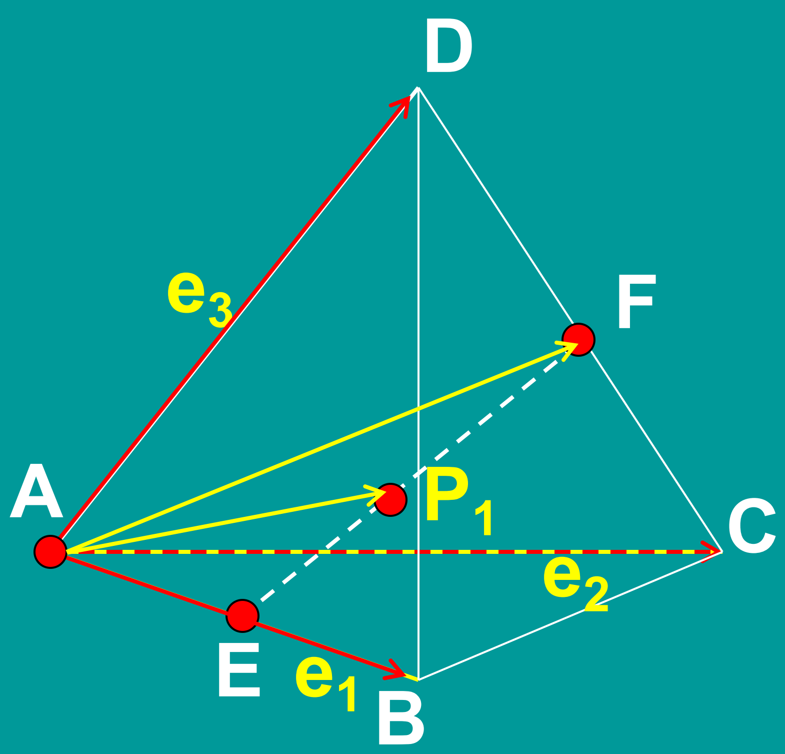
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}(e_2+e_3)\right]$$

$$=\frac{1}{4}(e_1+e_2+e_3)$$

所以 $\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{4}(e_1+e_2+e_3)$

同理可得 $\overrightarrow{AP_2} = \frac{1}{4}(e_1+e_2+e_3)$

$\overrightarrow{AP_3} = \frac{1}{4}(e_1+e_2+e_3)$



所以 $\overrightarrow{AP_1}=\overrightarrow{AP_2}=\overrightarrow{AP_3}$

由此可知 P_1，P_2，P_3重合，

问题得证。

定义1.4.2　　对于n个向量$a_1, a_2, \ldots, a_n$，如果存在n 个不全为零的数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，使得

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n=0 \qquad (1.4\text{-}4)$$

那么称这n个向量$a_1, a_2, \ldots, a_n$线性相关.　　如果只有当

$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ 时，$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n=0$ 才成立

那么称这n个向量$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 线性无关.

例如：在a, b, c中，若$c=a+b$，则a, b, c线性相关.

（此时，$a+b-c=0$，　　$\lambda_1=1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$　　不全为0）

又例如:

在 a, b, c 中, 若 c =0 则 a, b, c 线性相关.

(此时, 0. a+0. b+1. c=0, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$ 不全为0)

在 a, b, c 中, 若 a+b=0 , 则 a, b, c 线性相关

(此时, 1. a+1. b+0. c=0, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$ 不全为0)

推论：一个向量 a 线性相关的充要条件是 a=0

定理1.4.4 在$n\geqslant 2$时，向量$a_1, a_2, \ldots, a_n$线性相关的充要条件是：其中有一个向量是其余向量的线性组合.

证：（必要性）设$a_1, a_2, \ldots, a_n$线性相关，要证其中有一个向量是其余向量的线性组合.

因为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$线性相关

所以存在n 个不全为零的数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，使得

$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n=0$ 成立

不妨设 $\lambda_n \neq 0$,

移项得：$\lambda_n a_n = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 - \ldots - \lambda_{n-1} a_{n-1}$

于是有 $a_n = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n} a_1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_n} a_2 - \ldots - \dfrac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} a_{n-1}$

即a_n 可以用其余向量来线性表示.

(充分性)：设在向量$a_1, a_2, \ldots, a_n$中，其中有一个向量是其余向量的线性组合，要证明$a_1, a_2, \ldots, a_n$线性相关.

不妨设 a_n为其余向量的线性组合,即

$$a_n = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{n-1} a_{n-1}$$

所以 $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots (-1) a_n = 0$ 成立

即存在不全为0的数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, -1$，使(1.4-4)成立.

定理1.4.5　如果一组向量中的一部分线性相关,那么这组向量就线性相关.

设有一组向量$a_1, a_2, \ldots, a_r$ $(s \leqslant r)$, 其中一部分比如说

$a_1, a_2, \ldots, a_s$线性相关, 即有不全为零的数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$

使得　$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_s a_s=0$ 成立

由上式显然有

$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_s a_s+0a_{s+1}+\ldots+0a_r=0$　成立.

因为$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$至少有一个不为零, 所以

$a_1, a_2, \ldots, a_r$线性相关.

推论：如果一组向量中含有零向量,则它们线性相关.

因为零向量本身线性相关. 故由定理得证.

定理1.4.6 两向量共线的充要条件是它们线性相关.

证： (必要性) 设向量a, b共线, 要证明它们线性相关.

即要找到不全为0的数x, y, 使得$xa+yb=0$

事实上, 由于a, b共线, 若$b\neq 0$, 由定理1.4.1

有$a=yb$, 即$a-yb=0$, 所以a, b线性相关.

若$b=0$, 由推论, a, b线性相关.

(充分性)：设a, b线性相关, 要证明a, b共线.

由于a, b线性相关, 所以存在不全为0的数x, y,

使得xa+yb=0　　不妨设$x\neq0$，于是，$a=\dfrac{y}{x}b$

若$b\neq0$, 由定理1.4.1，a, b共线.

若b=0, 显然 a, b共线. 所以定理得证.

故由定理**1.4.6**知

a, b共线的充要条件是它们线性相关，即存在不全为0的数x, y, 使得

$$xa+yb=0 \qquad (1.4\text{-}5)$$

定理1.4.7　三向量共面的充要条件是它们线性相关.

即向量a, b, c共面的充要条件是存在不全为0的数x, y, z,

使得 $$xa+yb+zc=0 \qquad (1.4\text{-}6)$$

定理1.4.8　空间任何四个向量总是线性相关.

证：设a, b, c, d为空间任意四个向量,

1　若a, b, c共面, 由定理1.4.7, a, b, c线性相关

再由定理1.4.5, a, b, c, d线性相关

2　　若a, b, c不共面,

由定理1.4.3知, **d**=xa+yb+zc

再由定理1.4.4知 a, b, c, **d** 线性相关.

定理得证.

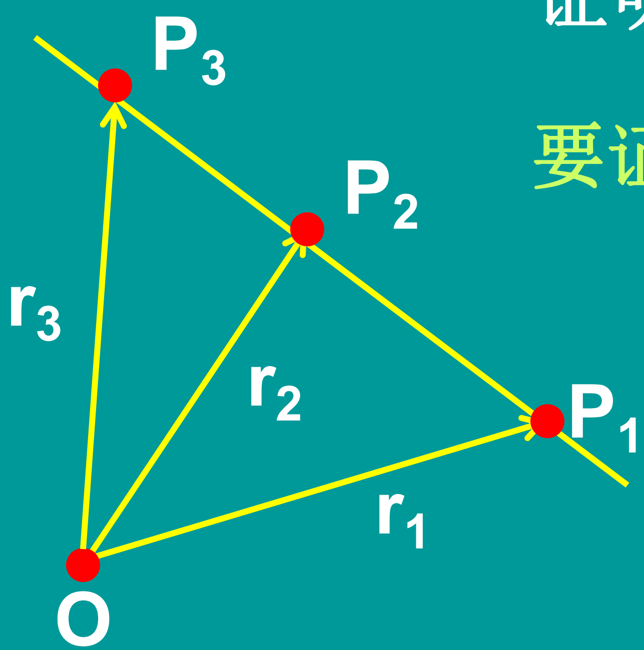
由定理1.4.5和定理1.4.8知:

推论:　空间四个以上向量总是线性相关

例3 设$\overrightarrow{OP_i}=r_i$ $(i=1,2,3)$ 试证 P_1, P_2, P_3 三点共线

的充要条件是存在不全为0的数λ_1，λ_2，λ_3,使得

$\lambda_1 r_1+\lambda_2 r_2+\lambda_3 r_3=0$ 且$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$



证明：必要性 设P_1, P_2, P_3三点共线，

要证存在不全为0的数λ_1，λ_2，λ_3,使得

$\lambda_1 r_1+\lambda_2 r_2+\lambda_3 r_3=0$，且$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$

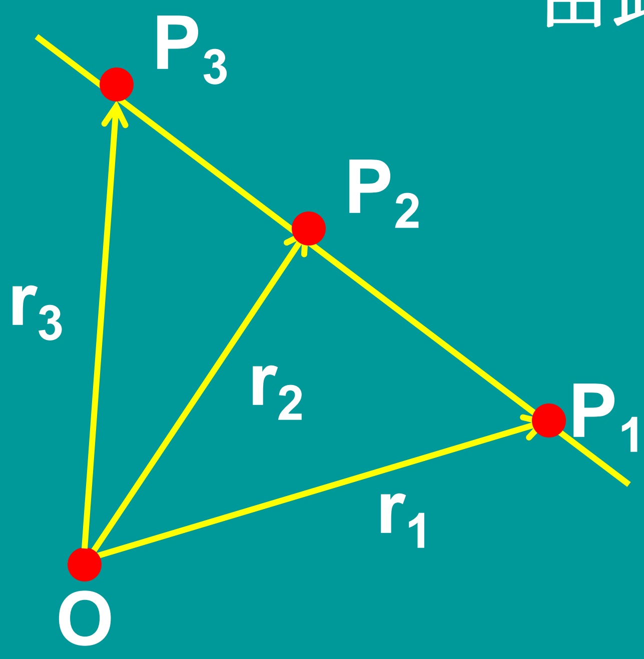
事实上，因为P_1, P_2, P_3三点共线，

所以$\overrightarrow{P_1P_3}$，$\overrightarrow{P_2P_3}$两向量共线。

由于$\overrightarrow{P_1P_3}$，$\overrightarrow{P_2P_3}$两向量共线.

所以存在不全为0的数 m, n ，使得 $m\overrightarrow{P_1P_3}+n\overrightarrow{P_2P_3}=0$

即 $m(r_3-r_1)+n(r_3-r_2)=0$



由此得 $mr_1+nr_2-(m+n)r_3=0$

$\lambda_1=m$, $\lambda_2=n$, $\lambda_3=-(m+n)$

则有 λ_1, λ_2, λ_3不全为0

使得 $\lambda_1r_1+\lambda_2r_2+\lambda_3r_3=0$,

且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$

必要性得证.

充分性　如果存在不全为0的数λ_1，λ_2，λ_3，使得

$$\lambda_1 r_1+\lambda_2 r_2+\lambda_3 r_3=0 \quad 且\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$$

要证 P_1, P_2, P_3 三点共线

事实上，因为存在不全为0的数λ_1，λ_2，λ_3，使得

$$\lambda_1 r_1+\lambda_2 r_2+\lambda_3 r_3=0 \quad 且\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$$

不妨设$\lambda_3\neq 0$，　根据条件，$\lambda_3=-(\lambda_1+\lambda_2)$

所以$\lambda_1 r_1+\lambda_2 r_2-(\lambda_1+\lambda_2) r_3=0$

整理得 $\lambda_1(r_3-r_1)+\lambda_2(r_3-r_2)=0$

所以 $\lambda_1\overrightarrow{P_1P_3}+\lambda_2\overrightarrow{P_2P_3}=0$

因为$\lambda_3 \neq 0$，且$\lambda_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$

所以 λ_1，λ_2不全为0,

于是由 $\lambda_1 \overrightarrow{P_1P_3} + \lambda_2 \overrightarrow{P_2P_3} = 0$

可以得出 $\overrightarrow{P_1P_3}$，$\overrightarrow{P_2P_3}$两向量共线.

即 P_1, P_2, P_3 三点共线.

充分性得到证明.