第四节　矩阵的秩

主要内容

- 矩阵的秩的定义
- 矩阵的秩与行列式的关系
- 矩阵的秩的求法

一、矩阵秩的定义

1. 矩阵行秩和列秩的定义

定义 15 所谓矩阵的**行秩**就是指矩阵的行向量组的秩；矩阵的**列秩**就是矩阵的列向量组的秩.

例 1 设有矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求(1)矩阵 A 的行秩和列秩.

(2)矩阵 A 的行秩与列秩的关系.

2. 行秩与列秩的性质

先利用行秩的概念把第一节的定理1改进如下.

引理 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1)$$

的系数矩阵A的行秩 $r < n$，那么它有非零解.

证明 设矩阵 A 的行向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$

因为它的秩为 r，所以极大线性无关组由 r 个向量组成.

不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 是一个极大线性无关组

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\ldots,\alpha_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ 等价，

所以方程组(1)与方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases} \qquad (2)$$

同解.

在方程组(2)中，已知r<n，应用定理1，即得证.

定理 4　矩阵的行秩与列秩相等.

证明　设所讨论的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

而 A 的行秩 $=r$，列秩 $=r_1$. 为了证明 $r=r_1$，先来证 $r\le r_1$.

设矩阵 A 的行向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$.

不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是它的一个极大线性无关组.

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是线性无关的，所以方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots x_r\alpha_r = 0$$ 只有零解，

这也就是说，齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{r1}x_r = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{r2}x_r = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{rn}x_r = 0, \end{cases}$$ 只有零解.

由引理，这个方程的系数矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$，

的行秩 $\geq r$. 因此在它的行向量中可以找到 r 个是线性无关的，不妨设为

$$(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{r1}), (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{r2}), \cdots, (a_{1r}, a_{2r}, \cdots, a_{rr})$$

线性无关.

在这些向量上添上几个分量后所得的向量组

$$(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{r1}, \cdots, a_{s1}), (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{r2}, \cdots, a_{s2}),$$

$\cdots, (a_{1r}, a_{2r}, \cdots, a_{rr}, \cdots, a_{sr})$ 也线性无关.

正好是矩阵 A 的 r 个列向量,可知矩阵 A 的列秩 r_1 至少是 r,

也就是说 $r_1 \geq r$.

同样的方法可证 $r \geq r_1$.

这就证明了行秩与列秩相等.　　证毕

3. 矩阵的秩

定义 把矩阵的行秩和列秩统称为**矩阵的秩**.

二、矩阵的秩与行列式的关系

1. 齐次线性方程组有非零解的充要条件

定理5 $n \times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式为零的**充要条件**是 A 的秩小于 n.

证明　先证充分性．因为 A 的秩小于 n，所以 A 的 n 个行向量组线性相关．当 $n=1$ 时，A 只有一个数，即只有一个一维向量，它又是线性相关的向量组，就是零向量，从而 $|A|=|0|=0$．

当 $n>1$ 时，矩阵 A 中有一行是其余各行的线性组合．对这行适当的变换，这一行就全变成零，由行列式的性质可知 $|A|=0$．

再证必要性. 对 n 作数学归纳法.

当 $n=1$ 时, 由 $|A|=0$ 可知 A 的仅有的一个元素就是零,

因而 A 的秩为零.

假设结论对 $n-1$ 级矩阵已证, 现在来看 n 级矩阵的情形.

设矩阵 A 的行向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

检查 A 的第一列的元素 $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$, 如果这 n 个元素全为零, 那么 A 的列向量组中含有零向量,当然秩小于 n .

如果这 n 个元素中有一个不为零, 譬如说 $a_{11} \neq 0$,
那么用第一行的适当倍数加到第二行、三行、…、 n 行把 $a_{21}, \ldots, a_{n1}$ 消成零, 即得

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

由 $|A|=0$ 可知 $n-1$ 级矩阵 $\begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$

的行列式为零．根据归纳法假定，这个矩阵的行向量组线性相关．

因而向量组$-\frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1+\alpha_2, -\frac{a_{31}}{a_{11}}\alpha_1+\alpha_3, \cdots, -\frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1+\alpha_n$

线性相关，这就是说，有不全为零的数$k_2, \ldots, k_n$

使
$$k_2(\alpha_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1)+\cdots+k_n(\alpha_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1)=0.$$

改写一下，有
$$-\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}k_2+\cdots+\frac{a_{n1}}{a_{11}}k_n\right)\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0.$$

$-\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}k_2+\cdots+\frac{a_{n1}}{a_{11}}k_n\right), k_2, \cdots, k_n$ 这组数当然也不全为0，

从而向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关，它的秩小于$n$.

根据归纳法原理，必要性得证.

证毕

推论　齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的充要条件是它的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
的行列式等于零.

证明？？？？

2. 矩阵的秩与行列式的关系

定义 16 在一个 $s\times n$ 矩阵 A 中任意选定 k 行和 k 列，位于这些选定的行和列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序所组成的 k 级行列式，称为 A 的一个 **k 级子式**.

例2 在矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 找一个2级子式和所有的3级和4级子式.

矩阵的秩与行列式的关系?

定理 6 一矩阵的秩是 r 的**充要条件**为矩阵中有一个 r 级子式不为零，同时所有 $r+1$ 级子式全为零.

证明 先证必要性. 设矩阵 A 的秩为 r.

这时矩阵 A 中任意 $r+1$ 个行向量都线性相关，

矩阵 A 的任意 $r+1$ 级子式的行向量也线性相关.

由定理5知：任意 $r+1$ 级子式全为零.

下证矩阵 A 中至少有一个 r 级子式不为零.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

的秩为 r，所以在 A 中有 r 个行向量线性无关，

不妨设就是前 r 个行向量. 把这 r 行取出来，作一新

的矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}.$$

显然，矩阵 A_1 的行秩为 r，因而它的列秩也是 r，这就是说，在 A_1 中有 r 列线性无关. 不妨设前 r 列线性无关，因之，行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

它就是矩阵 A 中一个 r 级子式. 这就证明了必要性.

再证充分性．设在矩阵 A 中有一 r 级子式不为零，而所有 $r+1$ 级子式全为零．证明 A 的秩为 r．

首先，由行列式按一行展开的公式可知，如果 A 的 $r+1$ 级子式全为零，那么 A 的 $r+2$ 级子式也一定为零，从而 A 的所有级数大于 r 的子式全为零．

设秩$(A)=t$．必有 $t\geq r$，否则A 的 r 级子式就全为零了.

且 $t\leq r$，否则 A 就要有一个$t\,(t\geq r+1)$级子式不为零,

而按照假定这是不可能的. 因而 $t=r$,

证毕

问题：定理6的证明过程中你有什么发现?

提示（1）矩阵A的秩≥r的充要条件?

（2）矩阵A的秩≤r的充要条件?

（3）秩为r的矩阵中，不为零的r级子式所在的位置?

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

从定理6的证明可以看出，这个定理实际上包含两部分，一部分是，矩阵 A 的秩 $\geq r$ 的充要条件是 A 有一个 r 级子式不为零；

另一部分是，矩阵 A 的秩 $\leq r$ 的充要条件是 A 的所有 $r+1$ 级子式全为零.

在秩为 r 的矩阵中，不为零的 r 级子式所在的行正是它行向量组的一个极大线性无关组，

所在的列正是它列向量组的一个极大线性无关组.

例 3　求矩阵A的秩.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

三、矩阵秩的求法

1. 矩阵秩的计算方法

计算矩阵秩的一个较有效的方法是：用初等行变换把它变成阶梯形矩阵，这个阶梯形矩阵中非零行的个数就是原来矩阵的秩.

证明

用初等行变换把矩阵化成阶梯形矩阵，这个阶梯形矩阵中非零行的个数就是原来矩阵的秩.

证明 首先，矩阵的初等行变换是把行向量组变成一个与之等价的向量组. 等价的向量组有相同的秩，因此，初等行变换不改变矩阵的秩.

同理，初等列变换也不改变矩阵的秩.

其次，阶梯形矩阵的秩就等于其中非零行的数目.

为了证明这个结论，只要证明在阶梯形矩阵中那些非零的行线性无关就行了. 设 A 是一阶梯形矩阵，不为零的行数是 r.

因为初等列变换不改变矩阵的秩，所以适当变换列的顺序，

$$
\text{不妨设 } A=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix},
$$

其中 $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, r$.

显然，A 的左上角的 r 级子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{rr} \neq 0,$$

因此，A 的秩为 r.

证毕

2. 向量组秩的计算方法

向量组秩的计算方法是：把向量组中的每一个向量作为矩阵的一行(或列)构成矩阵，则这个矩阵的秩即为所给的向量组的秩.

思考：向量组的极大线性无关组的求法

例 4　求下列矩阵的秩

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(2)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

例 5 求下列向量组的秩、一个极大线性无关组并用极大线性无关组来表示其余向量.

$$(1)\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\\4\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-3\\7\\-1\\1\end{pmatrix};$$

$$(2)\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}-9\\-8\\-13\end{pmatrix}.$$

小结和作业

1. 请叙述矩阵的秩的定义、齐次线性方程组有非零解的充要条件、子式的定义.

2. n级方阵的行列式为0的充要条件?

3. 求矩阵的秩的方法有哪些?

4. 作业见学习通.