4.5双叶双曲面

一、双叶双曲面的概念

1. 定义 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

所表示的曲面叫做双叶双曲面

双叶双曲面的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

其中a,b,c为正常数。

特征：方程四项,两正两负

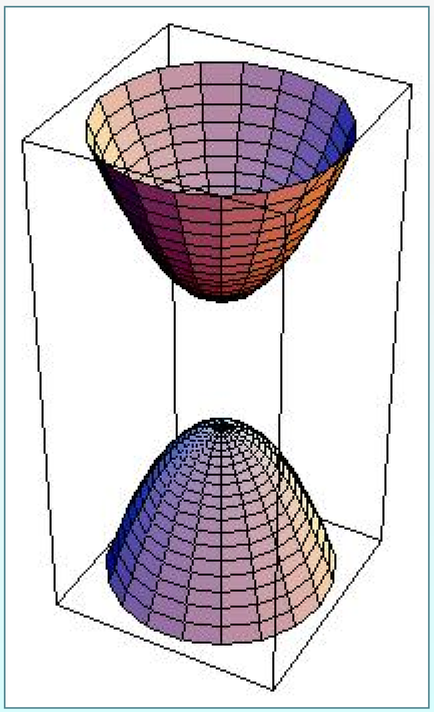
注： 在直角坐标系下，方程

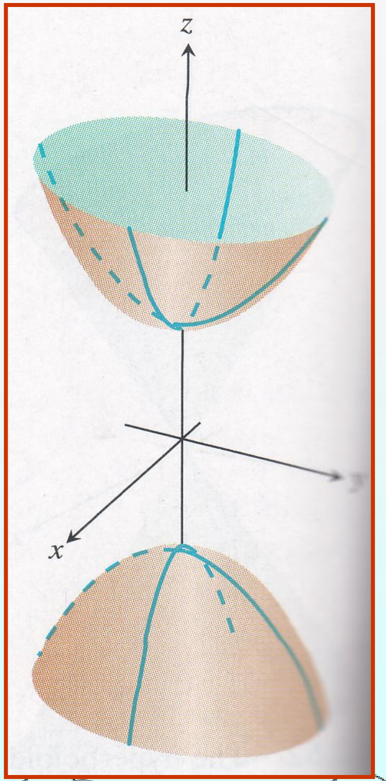
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ 与 } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

所表示的图形也是双叶双曲面.

椭球面与双曲面能
用一个方程表示吗？

双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ 的基本图形





二、双叶双曲面的性质

1. 对称性

双叶双曲面关于三坐标平面, 三坐标轴, 坐标原点都对称

事实上,如果(x,y,z)满足方程,则

(1) **(x,y,-z)**满足方程. 所以方程的图象关于**xoy**面对称.同理关于**yoz**面、**xoz**面也对称.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

二、双叶双曲面的性质

1. 对称性

双叶双曲面关于三坐标平面, 三坐标轴, 坐标原点都对称

(2) (x,-y,-z)满足方程. 所以方程的图象关于x轴对称.同理关于y轴、z轴也对称.

(3) (-x,-y,-z)满足方程. 所以方程的图象关于原点对称.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

二、双叶双曲面的性质

2. 交点

(令两个坐标为零,代入方程解第三个坐标)

与x轴，y轴无交点

与 z轴交点:(0,0,±C)

以上二点称为双叶双曲面的顶点.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

3. 范围

移项

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1$$

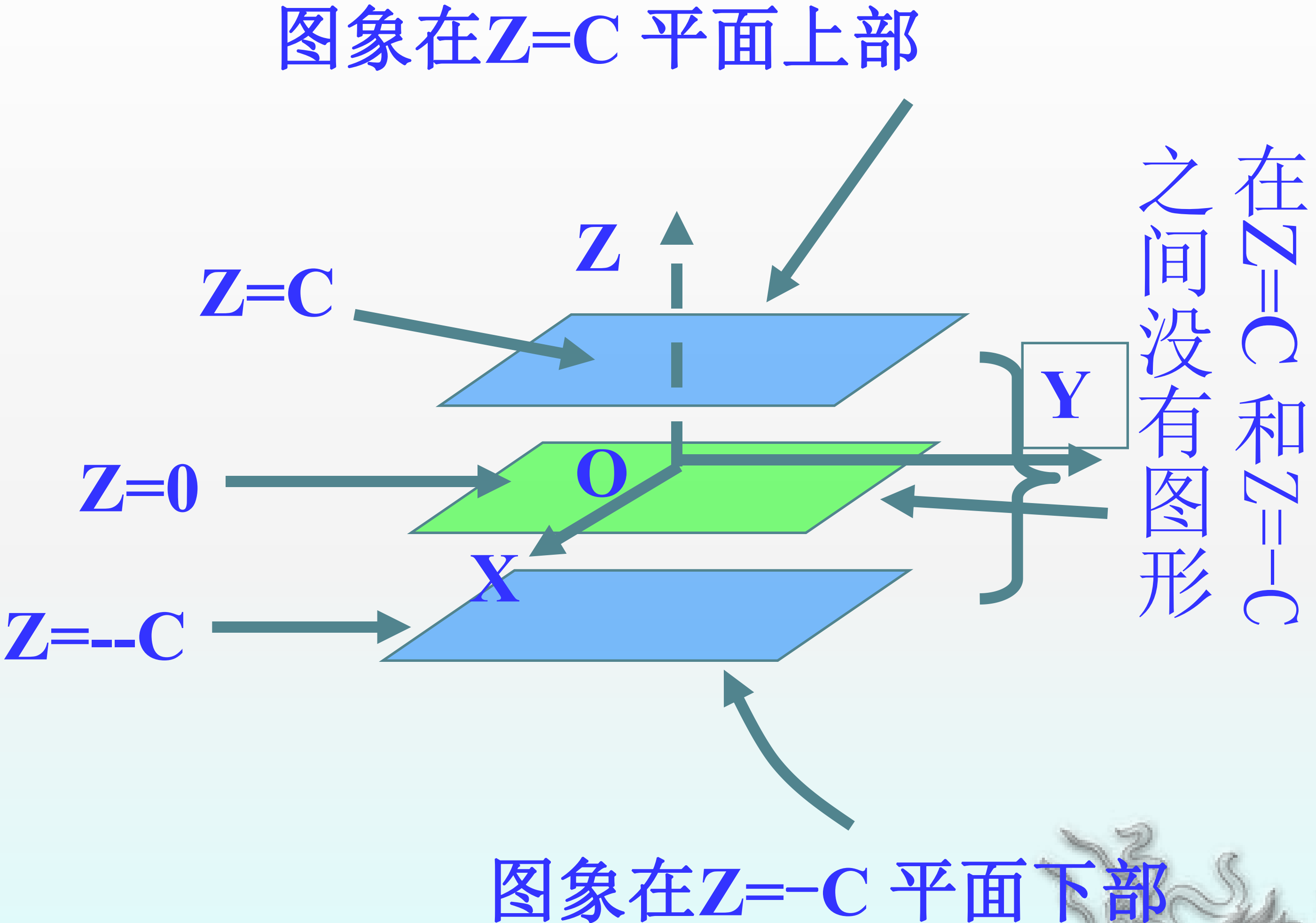
$$z^2 \geq c^2$$

$$z \geq c \text{或} z \leq -c$$

说明双叶双曲面被平面Z=C 和

Z= -C分成两叶,分别在Z=C 平面

上部和Z=-C 平面的下部.


图象在Z=C 平面上部
Z
Z=C
Y
Z=0
O
X
Z=--C
在Z=C 和Z=−C
之间没有图形
图象在Z=−C 平面下部

三、双叶双曲面与坐标平面的交线

i） 用坐标面截割

①用$z=0$截曲面

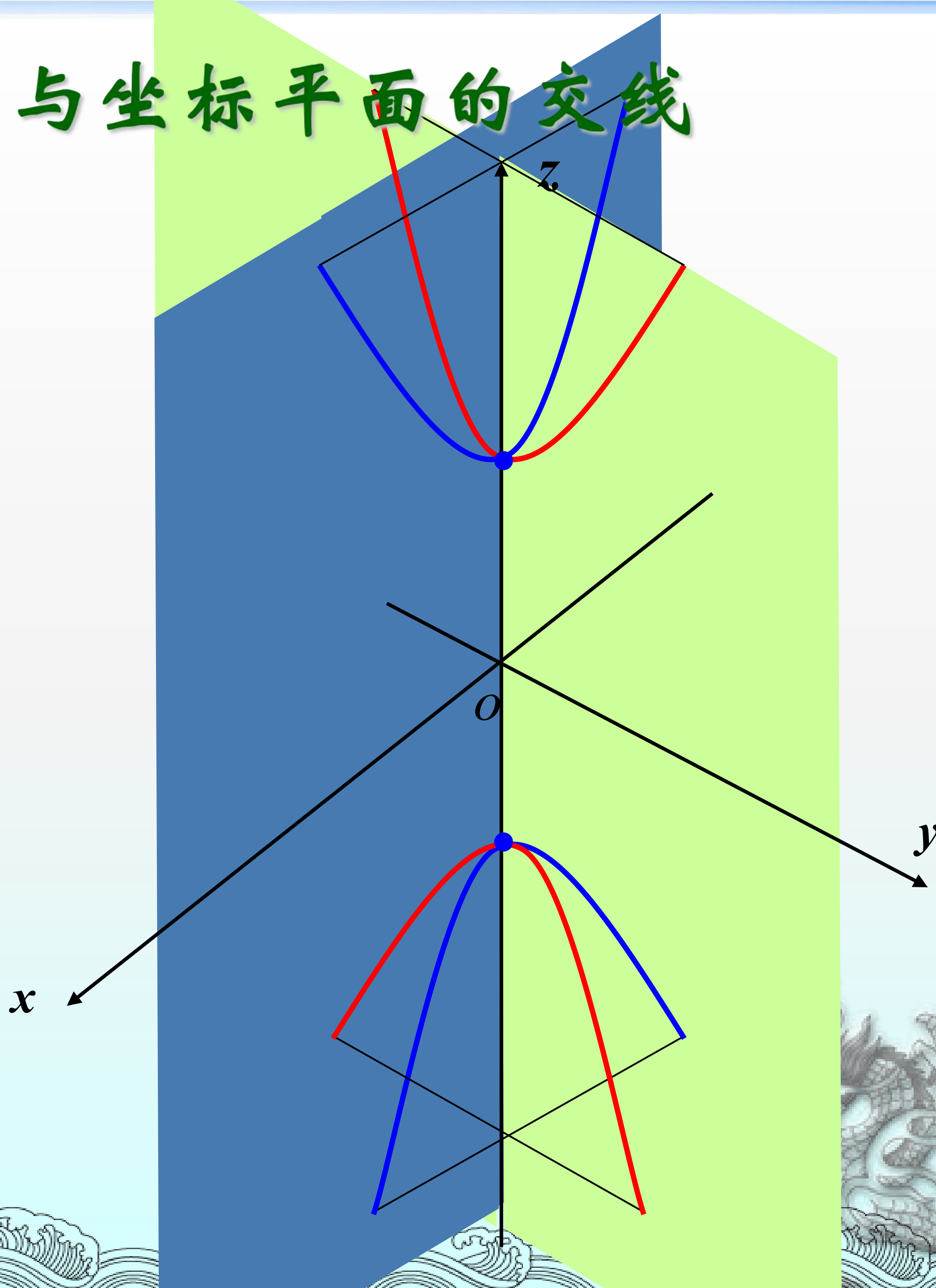
无交点

②用$y=0$截曲面

$$C_{y=0}:\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1,\\ y=0.\end{cases}\text{(双曲线)}$$

③用$x=0$截曲面

$$C_{x=0}:\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0.\end{cases}\text{(双曲线)}$$



四、用平行于坐标面的平面截割

1.用平行于XOY坐标面的平面z=h,去截双叶双曲面

由 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

得到 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1$$

由 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1$$

则截线方程为 $\xrightarrow{\text{令}Z=h}$ $$\left\{\begin{array}{l}\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1}\\ \boxed{Z=h}\end{array}\right.$$

需要对|h| >c, |h|=c

两种情况进行讨论

(1). 当|h|>c时, $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1 \\ Z=h \end{cases}$

上述方程变形为:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1 \\ Z=h \end{cases}$$

交线为平面Z=h上的椭圆

椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1 \\ Z=h \quad (|h|>c) \end{cases}$

半轴为 $\longrightarrow$ $a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1},\ b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$

顶点坐标为

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},0,h\right),\ \left(0,\pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},0\right)$$

椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1 \\ Z=h \quad (|h|>c) \end{cases}$$

顶点坐标:

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},0,h\right),\ \left(0,\pm b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},h\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$$

$$(\pm a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},0,h)$$

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{h^2}{c^2}-\dfrac{(\pm a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1})^2}{a^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-(\dfrac{h^2}{c^2}-1)=1\\ y=0\end{cases}$$

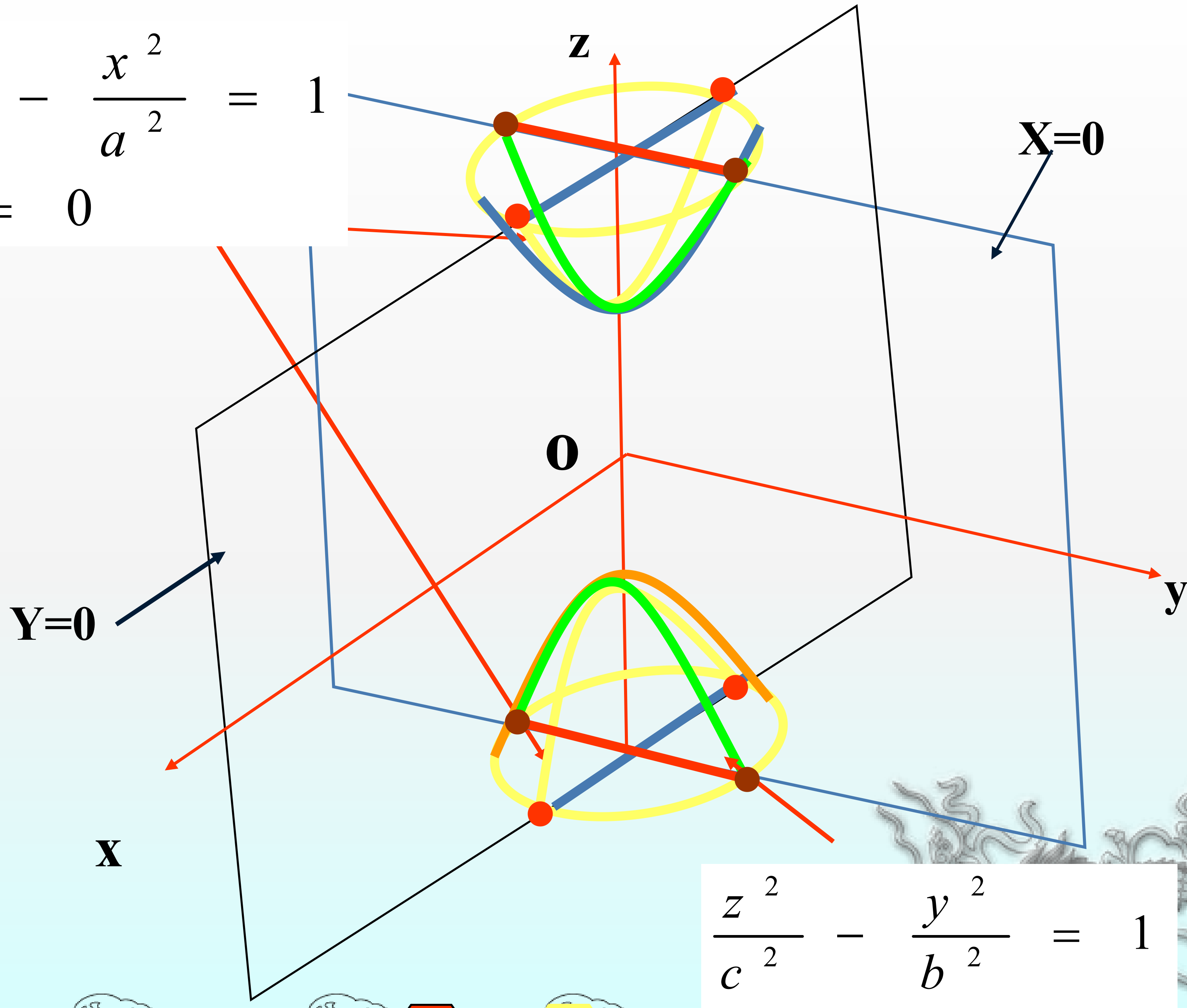
说明椭圆顶点在双曲线 $\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1\\ y=0\end{cases}$

上

同理，顶点 $(0,\pm b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1},h)$

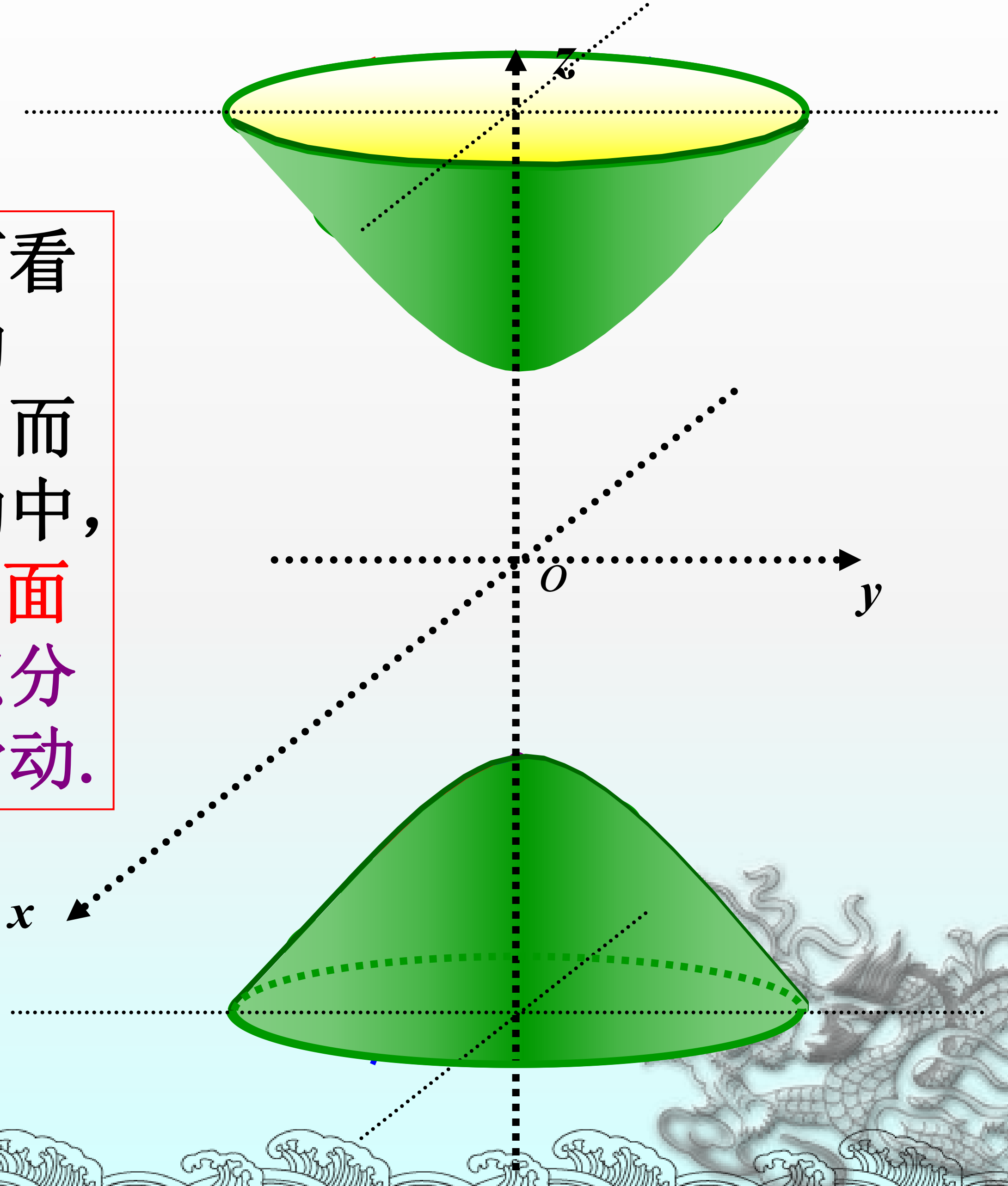
在 $\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases}$ 上

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

结论：双叶双曲面可看作由一个椭圆的变动（大小位置都改变）而产生，该椭圆在变动中，保持所在平面与xOy面平行，且两轴的端点分别在两定双曲线上滑动.



(2). 当$|h|=c$时,截得的图象为一点,其坐标

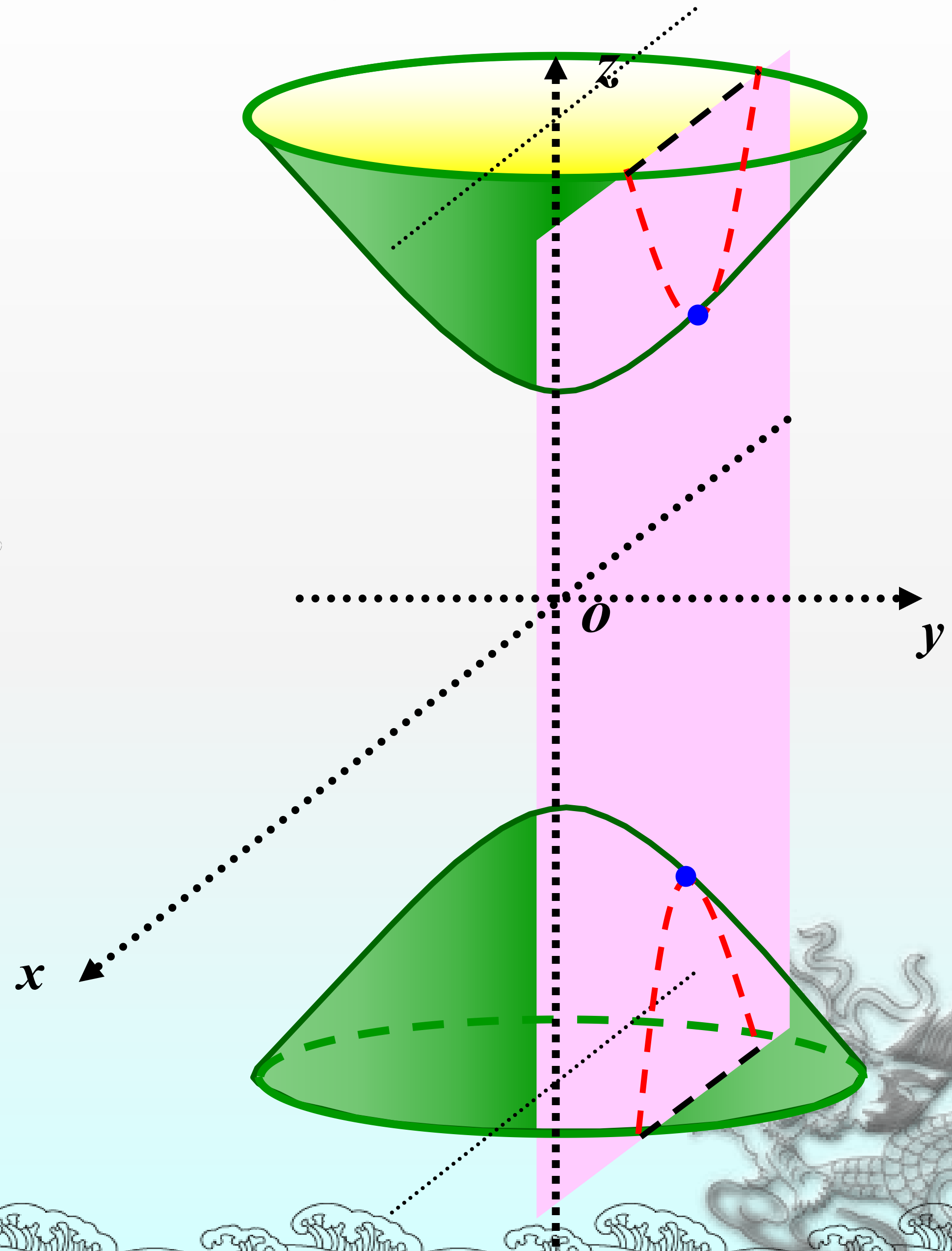
为$(0,0,C)$或$(0,0,-C)$

四、用平行于坐标面的平面截割

2. 用 $y=t$ 截曲面

截线为双曲线

$$C_{y=t}:\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1+\dfrac{t^2}{b^2},\\ y=t.\end{cases}$$

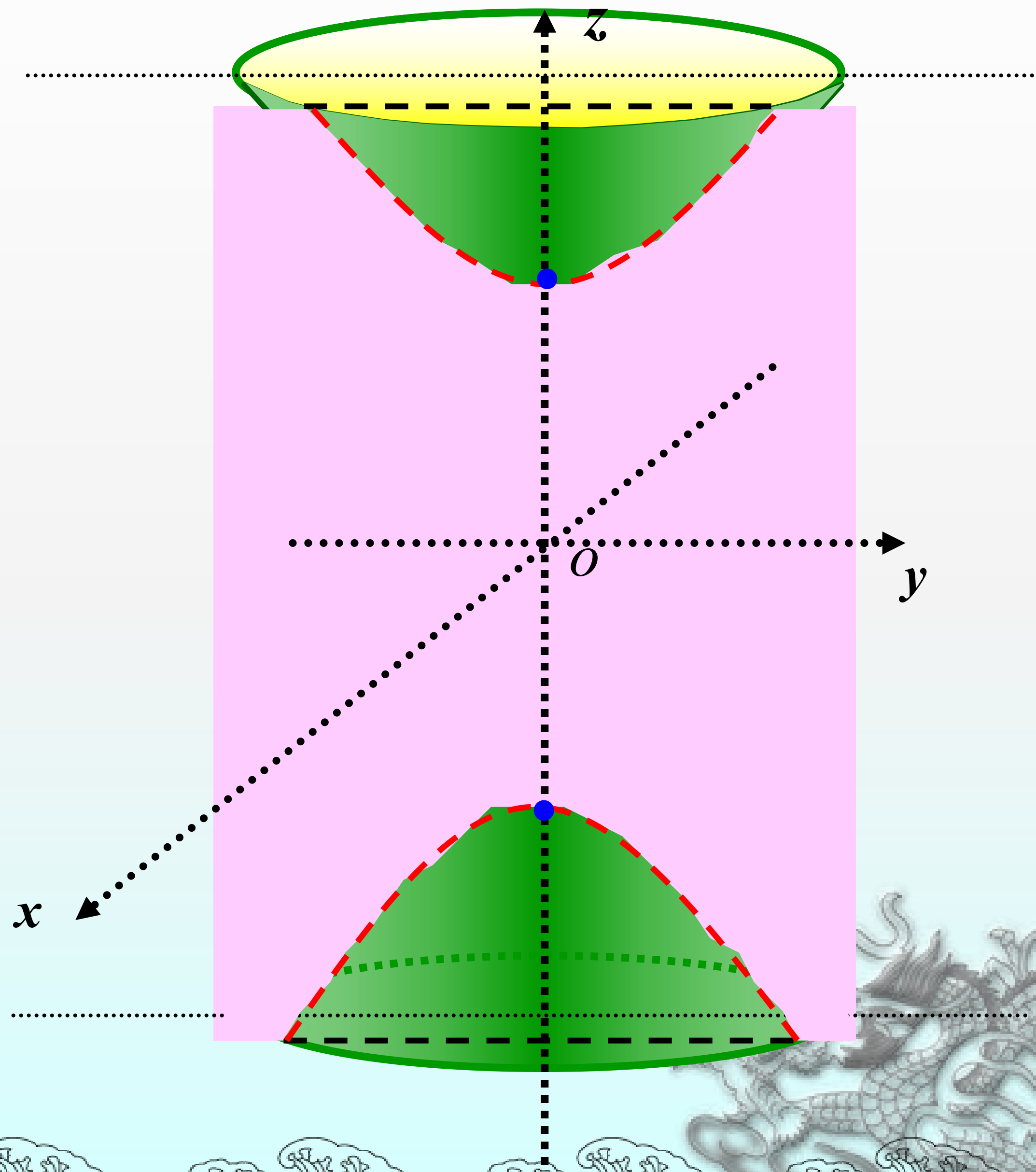


四、用平行于坐标面的平面截割

3. 用 $x=t$ 截曲面

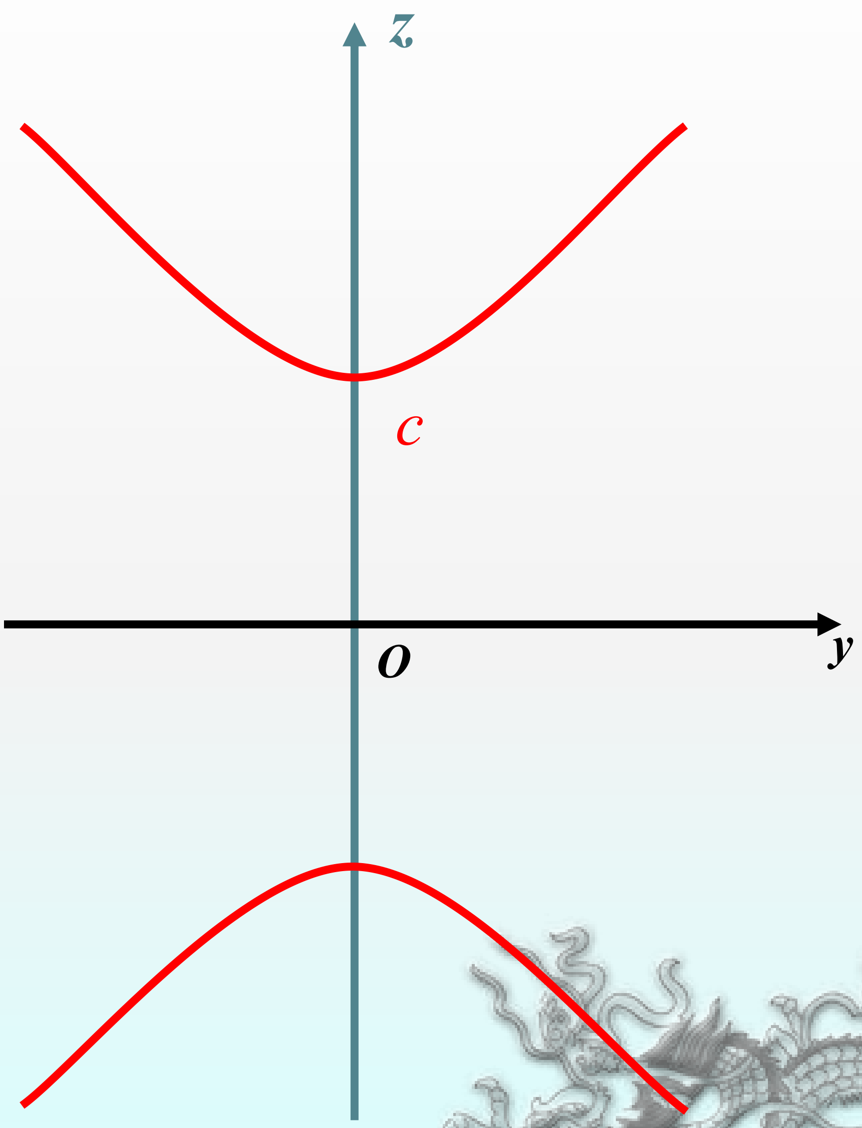
截线为双曲线

$$C_{x=t}:\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{t^2}{a^2},\\ x=t.\end{cases}$$



例3 （2）

将双曲线 $\Gamma:\begin{cases}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$ 绕实轴（即 z 轴）旋转



双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

当取 $a=b$时,

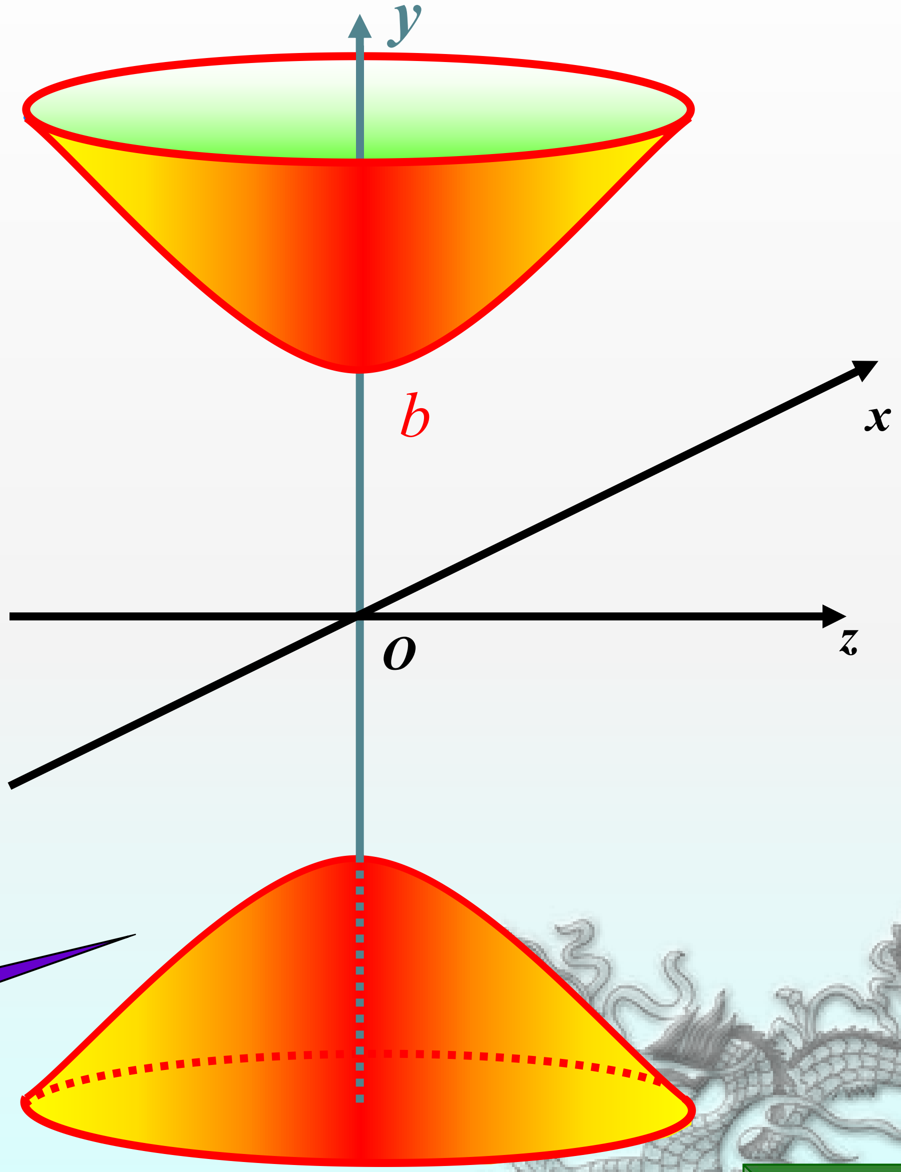
$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

例3 （2）

将双曲线 $\Gamma:\begin{cases}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$ 绕实轴（即 z 轴）旋转

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

双叶旋转双曲面



Back

椭球面与双曲面都是中心二次曲面，它们的方程可以写成统一的形式：

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \left(ABC \neq 0\right). \qquad (1)$$

当三平方项系数 A, B, C 均为正时，（1）表示椭球面；

当三平方项系数 A, B, C 中有两项为正，另一项为负，（1）表示单叶双曲面；

当三平方项系数 A, B, C 中只有一项为正，另两项为负，（1）表示双叶双曲面；

而当 A, B, C 均为负时，方程（1）不表示任何图形，或者称它为虚曲面.

例如当 $A > 0, B < 0, C > 0$ 时，方程（1）可改写为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

其中 $\frac{1}{a^2} = A, \frac{1}{b^2} = -B, \frac{1}{c^2} = C$，这是单叶双曲面的标准方程.

例 给定方程

$$\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}=1\left(A>B>C>0\right),$$

试问当 λ 取异于 A,B,C 的各种数值时，它表示怎样的曲面？

分析：

i）当 $A-\lambda,B-\lambda,C-\lambda$ 都取正，即 $\lambda<C$ 时，表示椭球面；

ii）当 $A-\lambda,B-\lambda,C-\lambda$ 中有一项为负，即 $C<\lambda<B$ 时，表示单叶双曲面；

iii）当 $A-\lambda,B-\lambda,C-\lambda$ 中有两项为负，即 $B<\lambda<A$ 时，表示双叶双曲面；

iv）当 $A-\lambda,B-\lambda,C-\lambda$ 都取负，即 $A<\lambda$ 时，不表示任何图形.

双曲面及其渐近锥面

双叶：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

渐进锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$

单叶：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

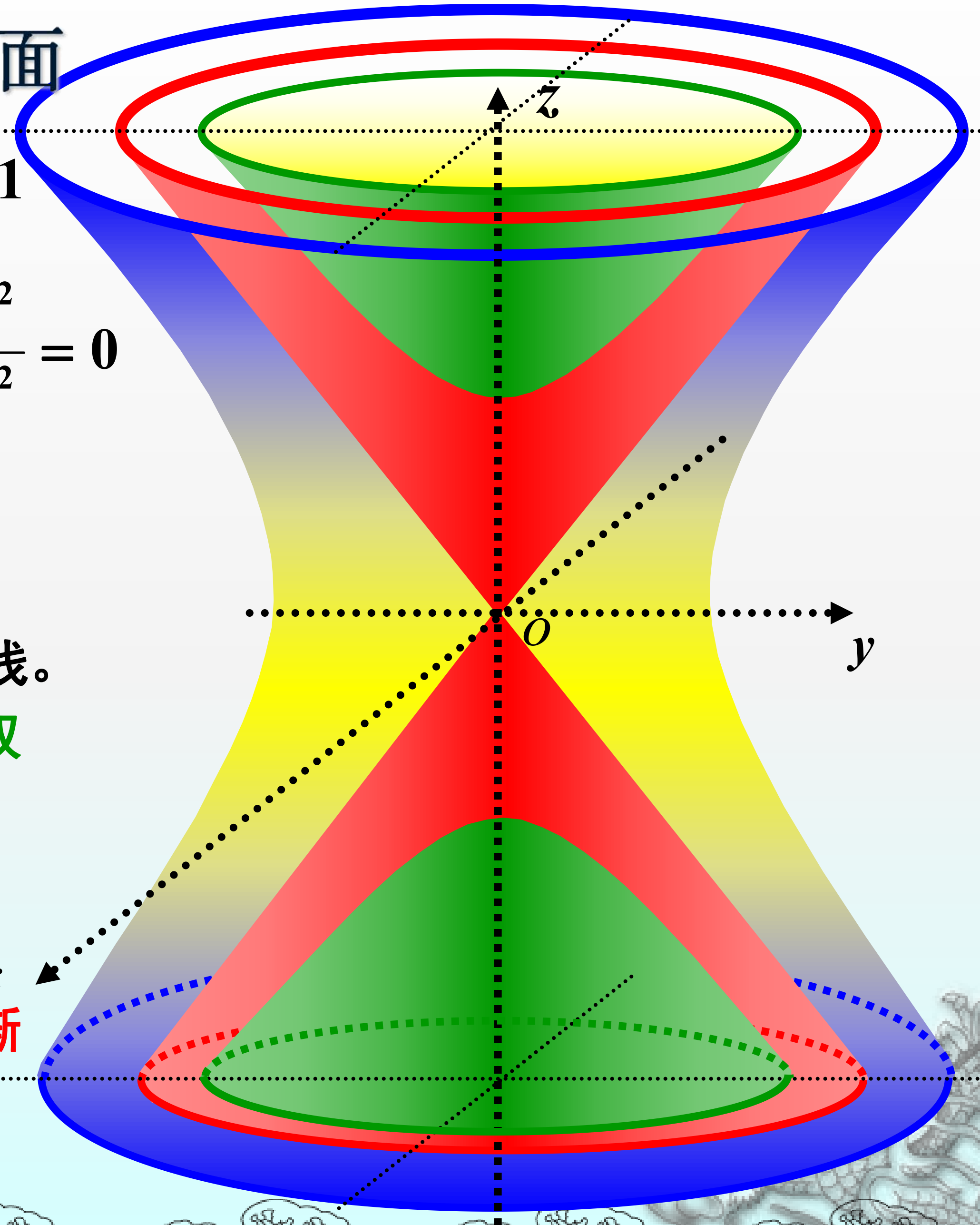
在平面上，双曲线有渐近线。

相仿，单叶双曲面和双叶双曲面有渐近锥面。

用$z=h$去截它们，当$|h|$无限增大时，

双曲面的截口椭圆与它的渐进锥面 的截口椭圆任意接近，

即：双曲面和锥面任意接近。



五、课堂小结

1. 双叶双曲面标准方程中X、Y、Z的取值范围。

2. 用平行截割法对双叶曲面进行截割时，要注意表示平面常数的取值范围。