《解析几何》
—Chapter 4

§7 单叶双曲面与双曲抛物面的直母线

Contents

一、直纹曲面的概念

定义 由一族直线所生成的曲面叫做直纹曲面(*ruled surface*)，生成曲面的那族直线叫做该曲面的一族直母线.

平面、柱面、
锥面有什么共

平面是直纹曲面；

柱面和锥面都是直纹曲面；

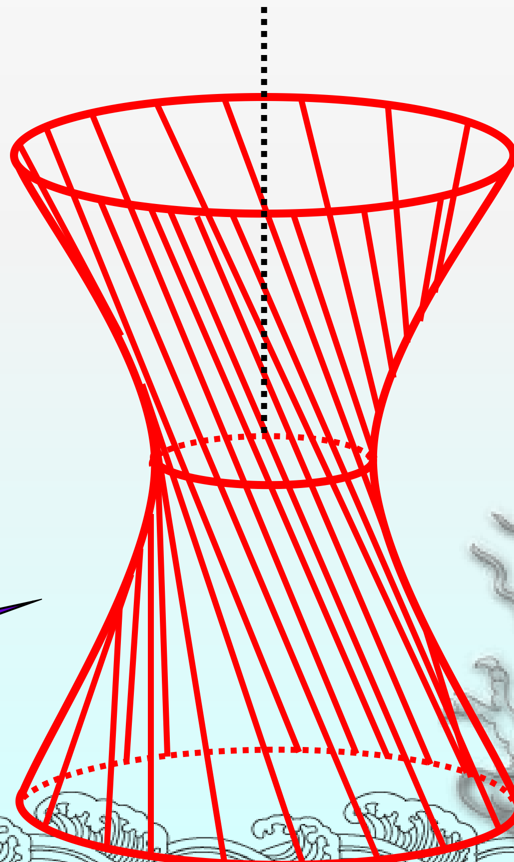
椭球面不是直纹曲面；

双叶双曲面不是直纹曲面；

椭圆抛物面不是直纹曲面.

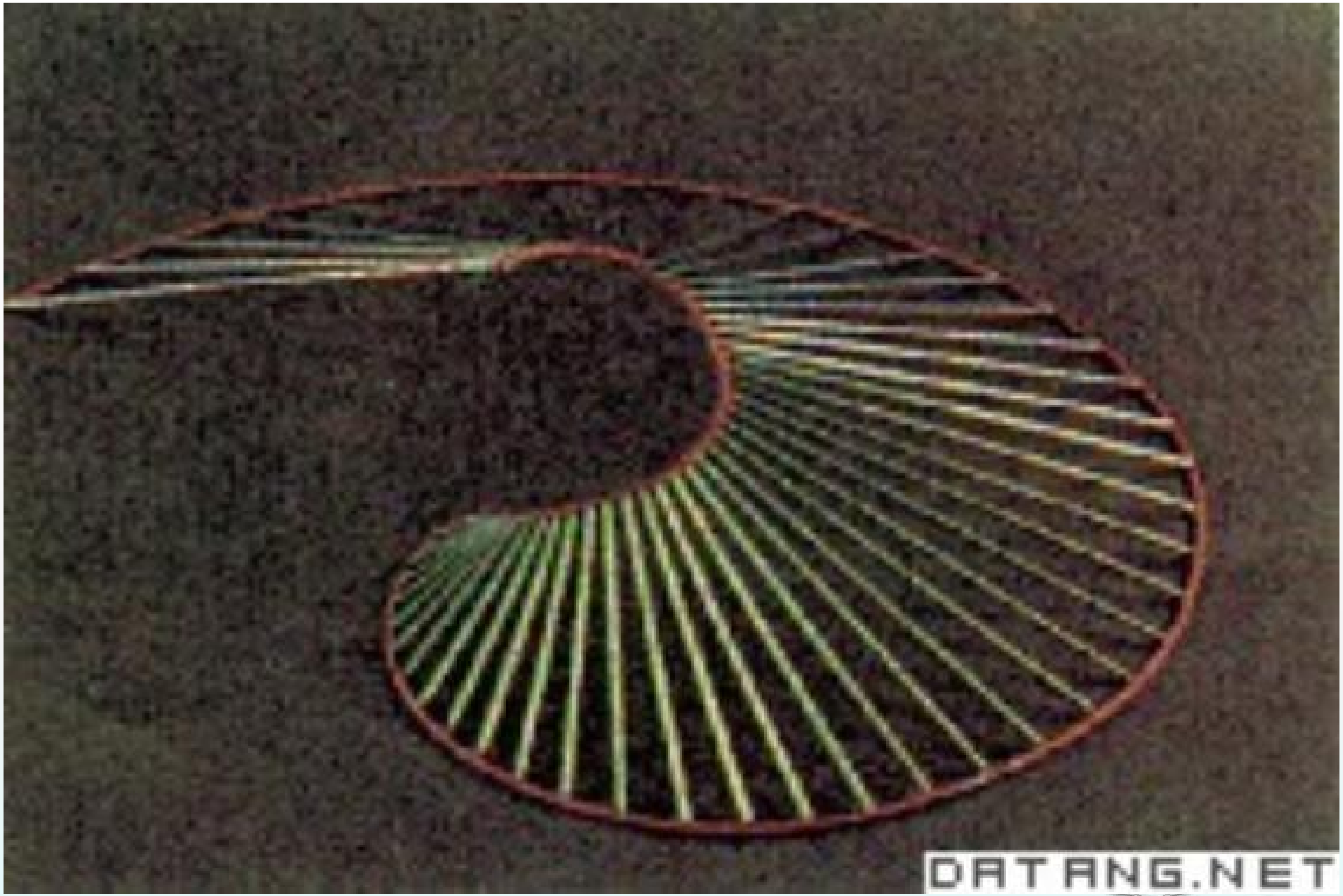
有没有更复杂的直纹曲面呢？有哪些二次曲面可能是直纹曲面呢?

例(教材P153)　求直线 $\Gamma: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$ 绕直线 $l: x = y = z$ 旋转所得的旋转曲面的方程.

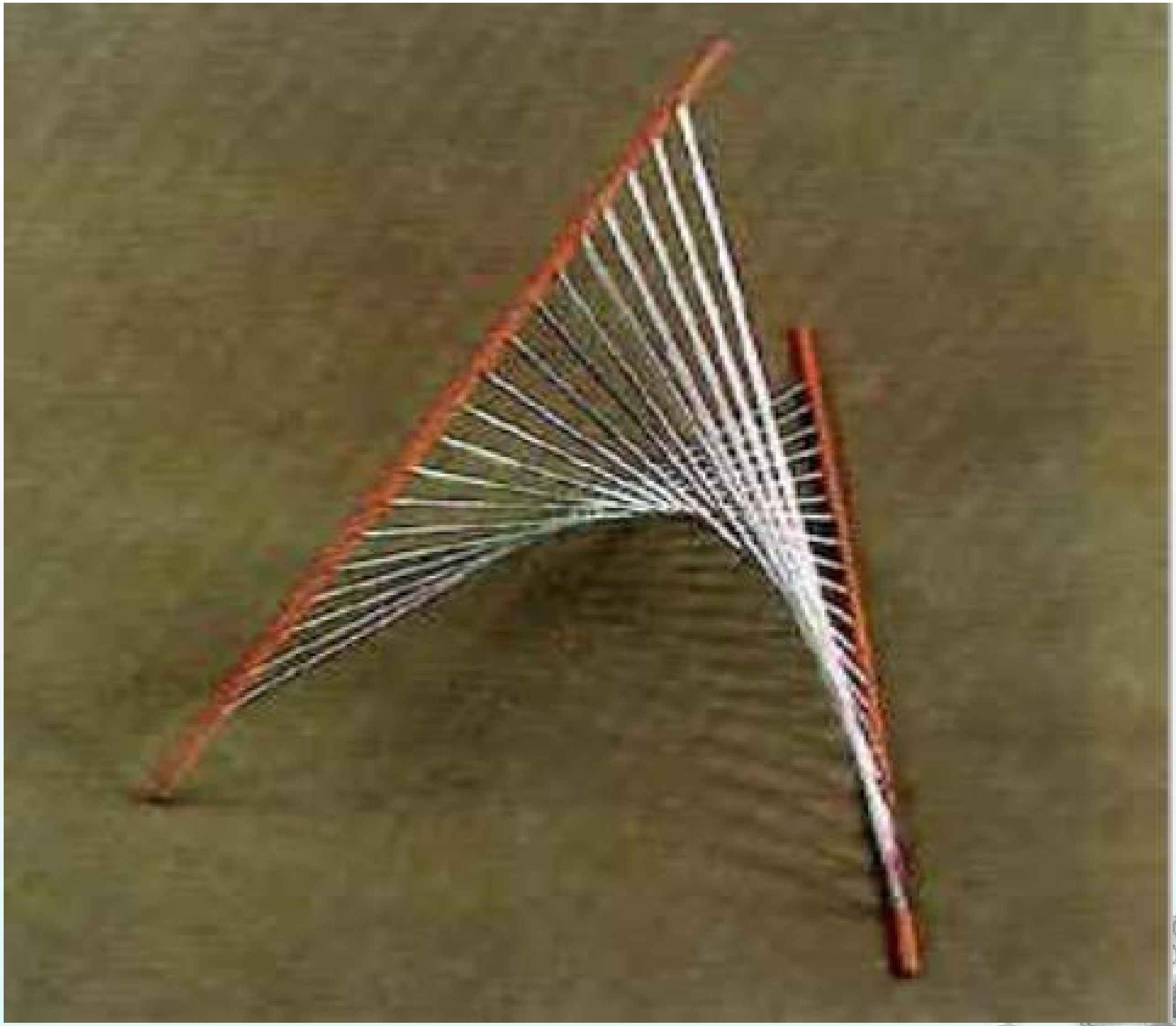


单叶旋转双曲面

Back



直纹曲面模型

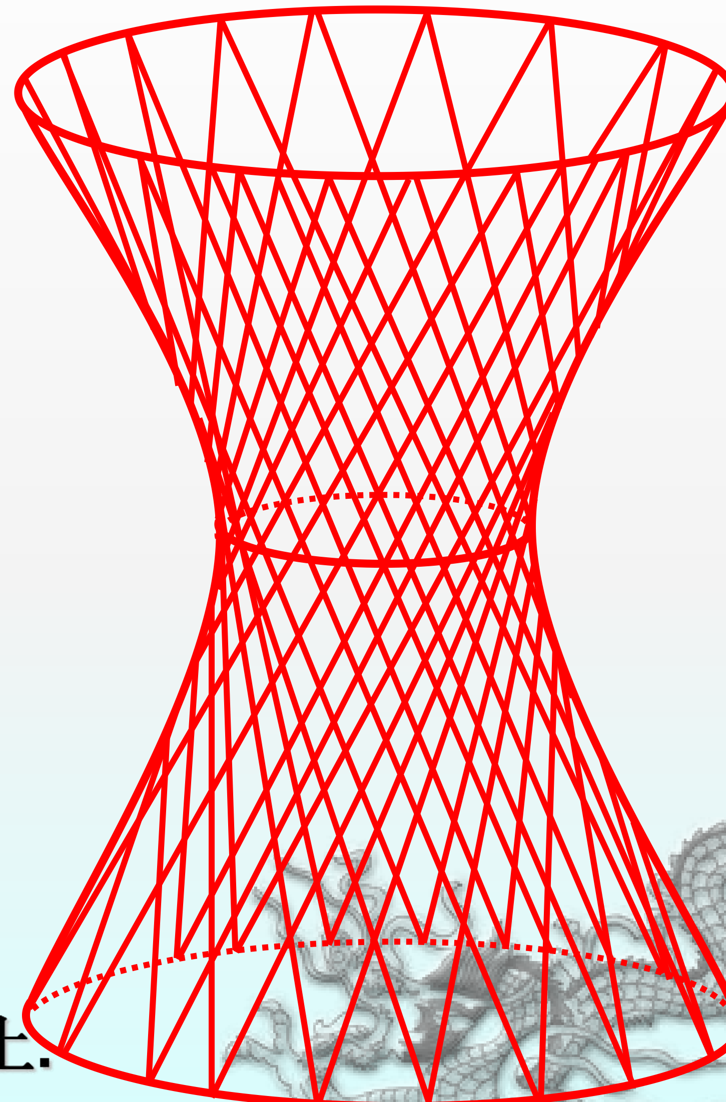


直纹曲面模型

二、单叶双曲面是直纹曲面

单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

$(a,b,c>0)$



分析：

如果曲面 S 上存在一族直线，

（1）曲面 S 上的每个点必定在这个族中的某一条直线上；

（2）直线族中的每条直线都在曲面 S 上.

（1）

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

（2）

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

（3）

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\[2ex] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}$$

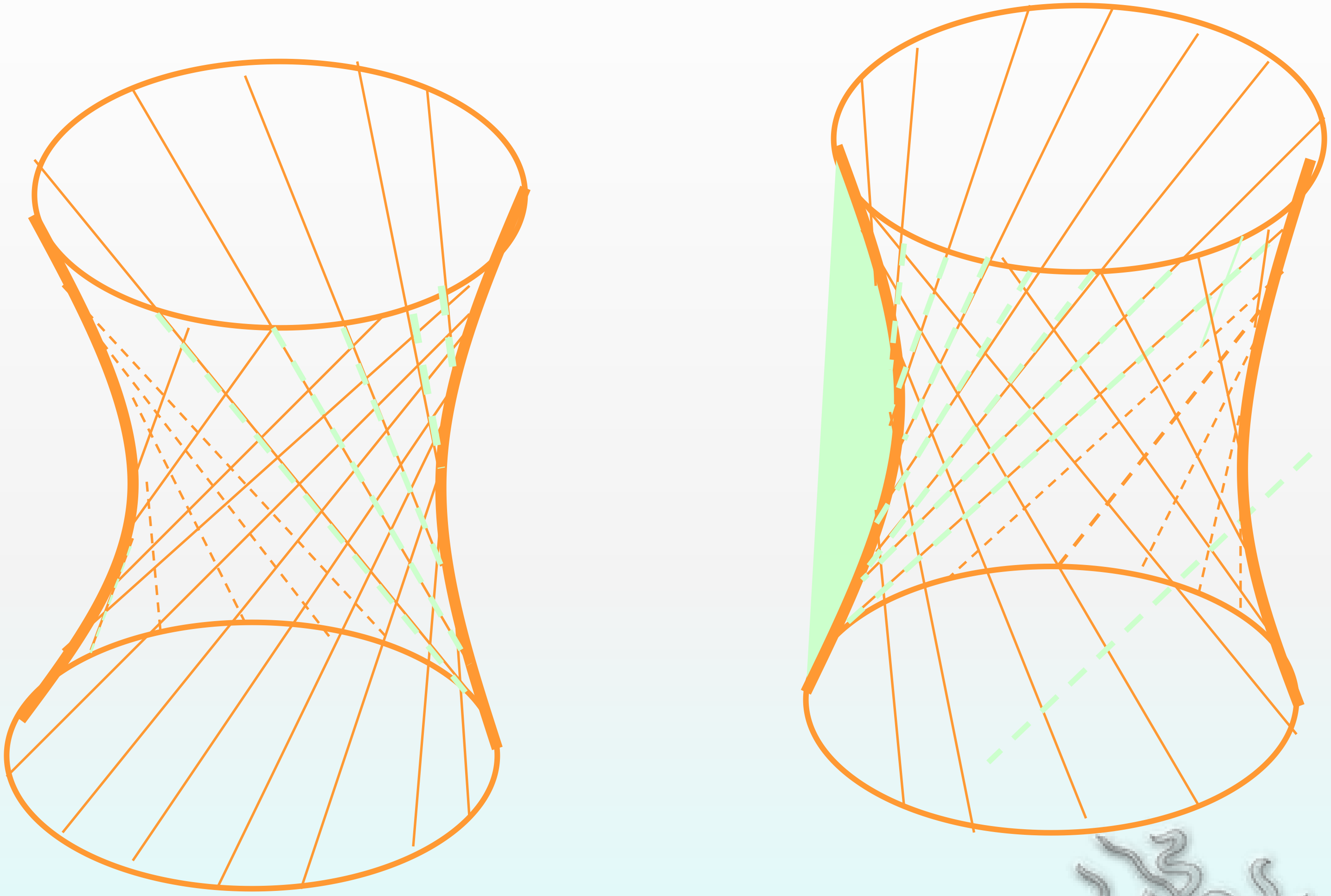
及 （4）$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0\\[2ex] 1-\dfrac{y}{b}=0\end{cases}$ 和（4`）$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0\\[2ex] 1+\dfrac{y}{b}=0\end{cases}$

可以证明，（4）和（4\`）是（3）中u $\longrightarrow$ 0和u $\to \infty$ 的两种极限情况并且不论u取什么数，（3）、（4）、（4\`）都表示直线，，它们统称为u族直线。

可以证明，由这u族直线可以构成单叶双曲面（1），从而它是单叶双曲面的一族直母线。同理，

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=v(1-\dfrac{y}{b}) \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{v}(1+\dfrac{y}{b}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0 \\ 1+\dfrac{y}{b}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0 \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{cases}$$

也是（1）的另一族直母线。称为（1）的v族直母线。



定理　单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1，\quad a,b,c>0$$

是直纹曲面. 它有两族直母线:

$$\begin{cases} w\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}\left(w^2+u^2\neq 0\right) \qquad (4.7\text{-}1)$$

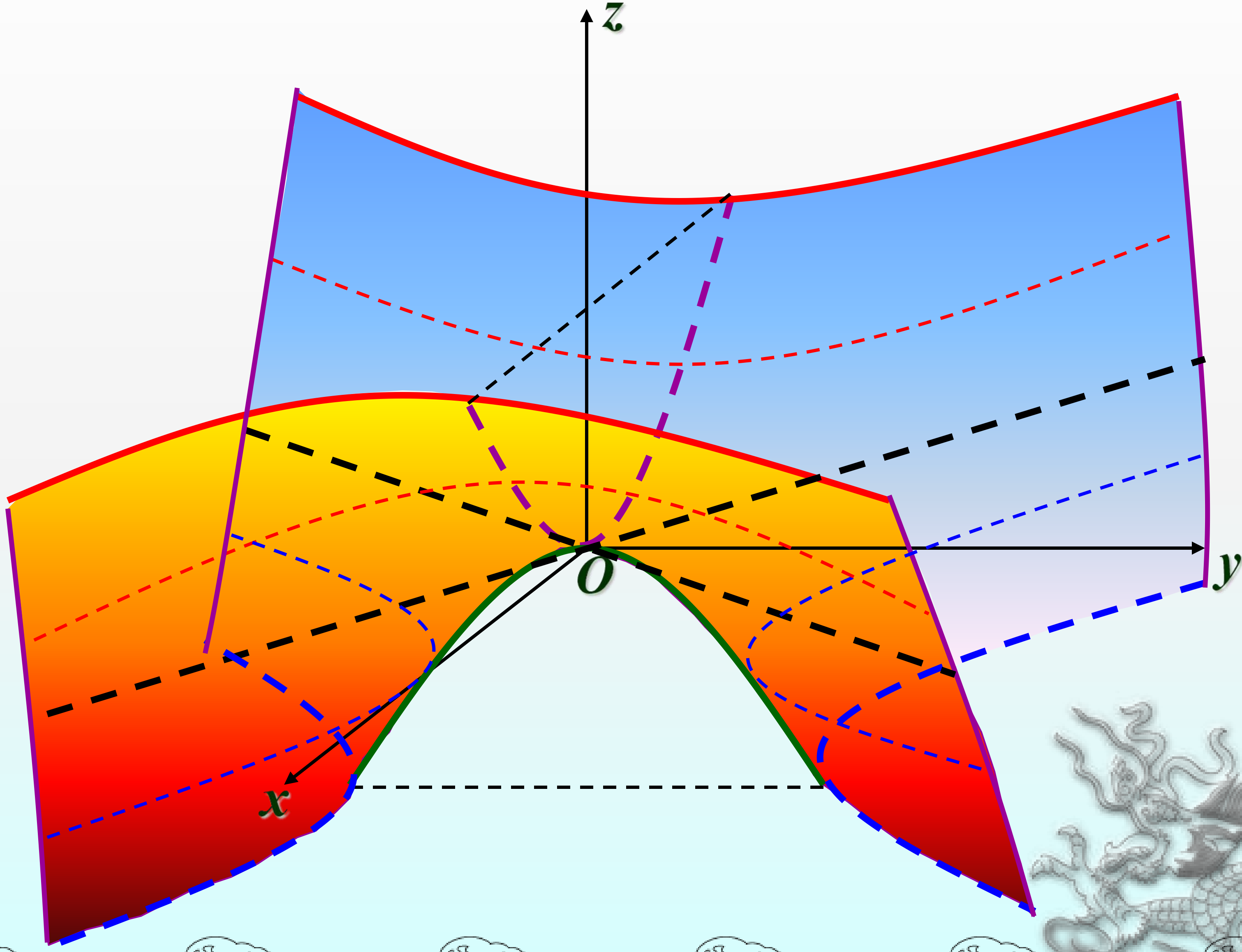
与

$$\begin{cases} t\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=v\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ v\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}\left(t^2+v^2\neq 0\right) \qquad (4.7\text{-}2)$$

推论1　对于单叶双曲面上的点，两族直母线中各有一条直母线通过这点.

Back

三、双曲抛物面是直纹曲面

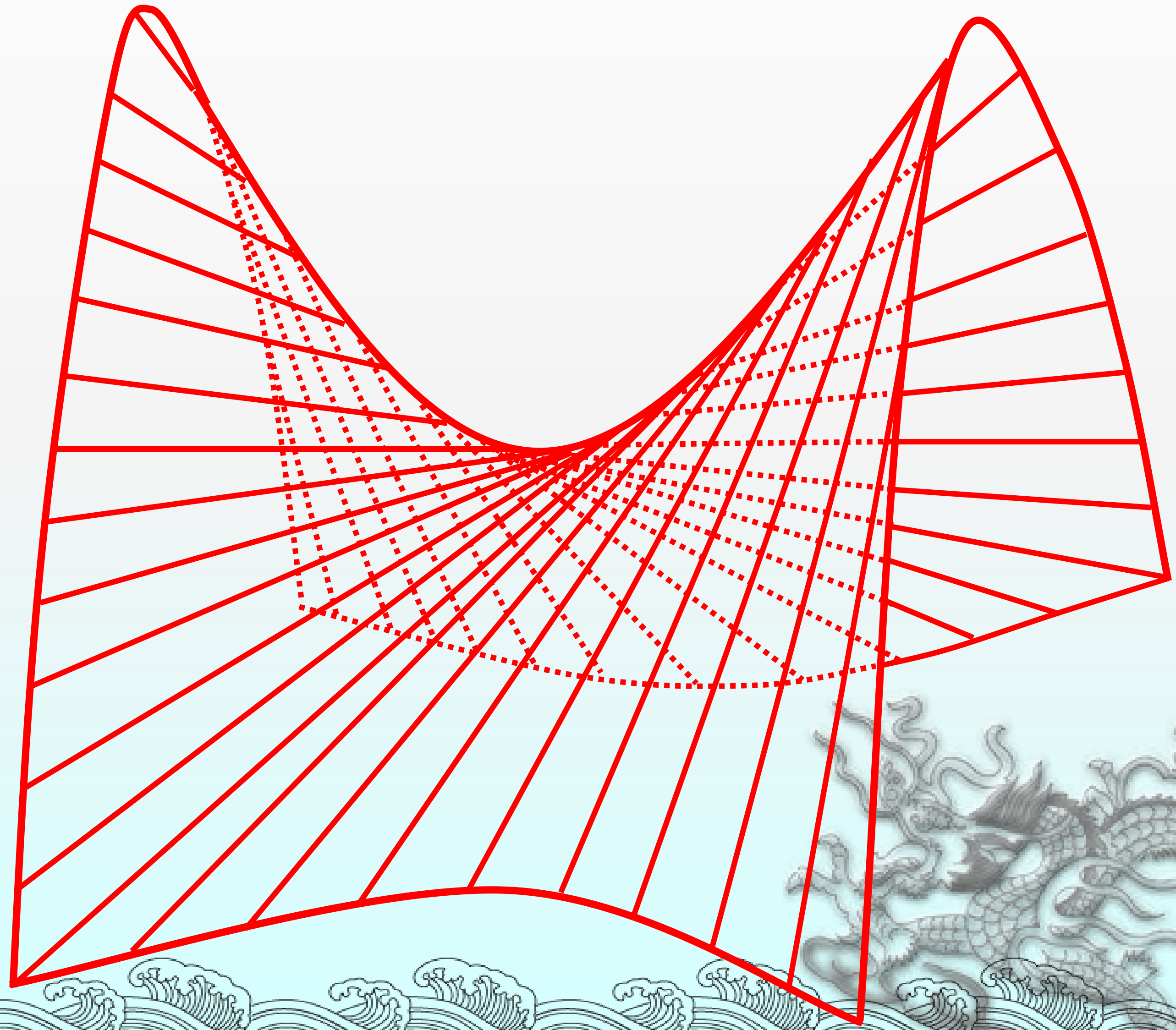


三、双曲抛物面是直纹曲面

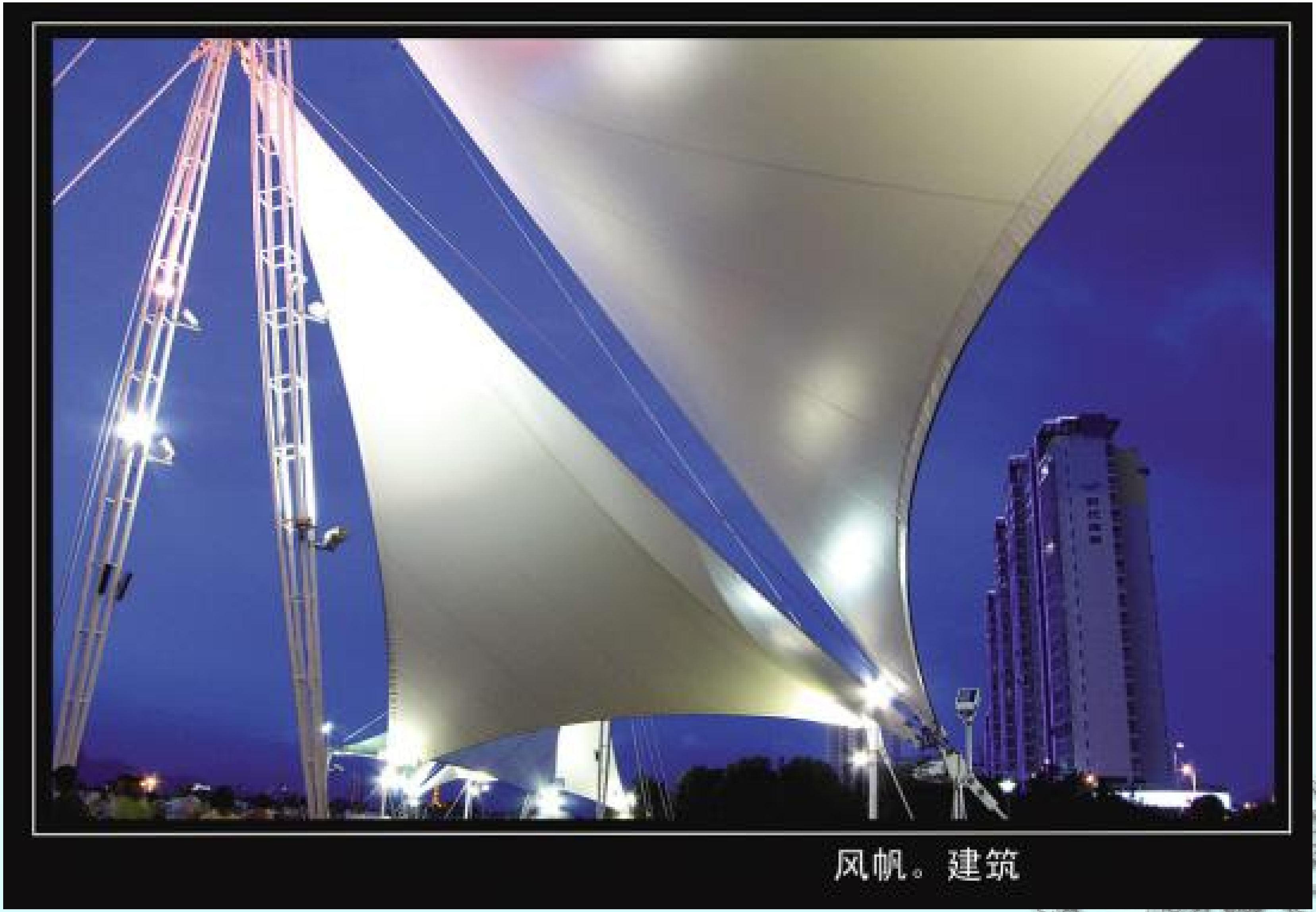
双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

$$(a,b>0)$$



悉尼歌剧院


风帆。建筑

定理 双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\text{，}\qquad a,b>0$$

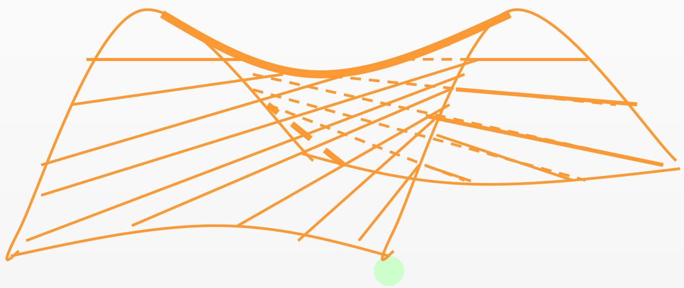
是直纹曲面. 它有两族直母线:

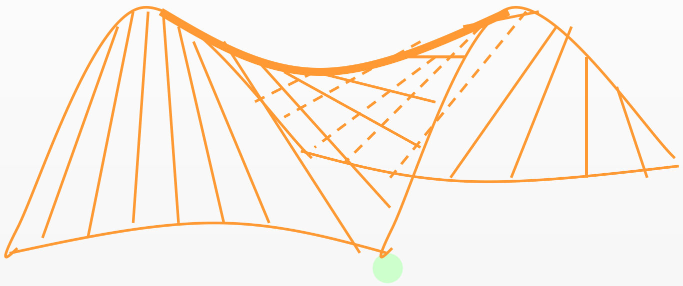
$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2u,\\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z,\end{cases}\left(u\in R\right)\qquad (4.7\text{-}3)$$

与

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2v,\\ v\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z,\end{cases}\left(v\in R\right).\qquad (4.7\text{-}4)$$

对于双曲抛物面上的点，两族直母线中各有一条直母线通过该点.





四、单叶双曲面与双曲抛物面的性质

定理4.7.1　单叶双曲面上异族的任意两直母线必共面，而双曲抛物面上异族的任意两直母线必相交.

定理4.7.2　单叶双曲面或双曲抛物面上同族的任意两直母线总是异面直线，而且双曲抛物面同族的全体直母线平行于同一平面.

例题

例1 求过单叶双曲面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ 上的点 $(6,2,8)$ 的直母线的方程.

分析： 单叶双曲面 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ 的两族直母线方程为：

$$\begin{cases} w\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{2}\right), \\ u\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{2}\right) \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} t\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}\right)=v\left(1-\dfrac{y}{2}\right), \\ v\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{2}\right). \end{cases}$$

将（6，2，8）代入上述直母线族方程，求得 w，u，t，v.

例题

例2　试证明双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\left(a\neq b\right)$上的两直母线直交时，其交点必在一双曲线上.

例3　已知空间两异面直线间的距离为 $2a$，夹角为 2θ，过这两直线分别作平面，并使这两平面相互垂直，求这样的两平面交线的轨迹.