

第二节 一元多项式

定义



多项式的
运算



多项式的
运算规律

一、定义

在对多项式的讨论中，总是先给定的数域 P 作为基础。
设 x 是一个符号(或称文字)

定义 2 设 n 是一非负整数. 形式表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ 全属于数域 P ，称为**系数**
在数域 P 中的一个一元多项式，或简称为**数域 P**
上的一元多项式。

在多项式**(1)**中， $a_i x^i$ 称为 **i 次项**， a_i 称为 **i 次项的系数**。
用 $f(x), g(x), \dots$ 或 f, g, \dots 等来代表多项式。

判断下列式子是不是某个数域上的一元多项式？

(1) 0

(2) πx^2

(3) $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$

(4) $x^{\frac{2}{3}}$

(5) $\frac{x^2 + 1}{x - 1}$

定义 3 若在多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中，除去系数为零的项外，同次项的系数全相等，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 就称为相等，记为 $f(x) = g(x)$.

系数全为零的多项式称为**零多项式**，记为 0 .

在(1)中，若 $a_n \neq 0$ ，则 $a_n x^n$ 称为多项式 (1) 的**首项**， a_n 称为**首项系数**， n 称为多项式 (1) 的**次数** .

零多项式是**唯一不定义次数**的多项式.

多项式 $f(x)$ 的次数记为

$$\partial(f(x)).$$

二、多项式的运算

1. 引例

$$(2x^2 - 1) + (x^3 - 2x^2 + x + 2) = ?$$

$$(2x^2 - 1) + (-2x^2 + 1) = ?$$

$$(2x^2 - 1)(x^2 - x + 1) = ?$$

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

是数域 P 上两个多项式. 那么它们可以写成

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j.$$

2. 加法

在表示多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和时, 如 $n \geq m$, 为了方便起见, 在 $g(x)$ 中令 $b_n = b_{n-1} = \dots = b_{m+1} = 0$.

那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和为

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots \\ &\quad + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i .$$

$$f(x) \cdot g(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} \\ + \dots + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0,$$

其中 s 次项的系数是

$$a_s b_0 + a_{s-1} b_1 + \dots + a_1 b_{s-1} + a_0 b_s = \sum_{i+j=s} a_i b_j.$$

所以 $f(x)g(x)$ 可表成

$$f(x)g(x) = \sum_{s=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=s} a_i b_j \right) x^s.$$

数域 P 上的两个多项式经过加、减、乘等运算后，
所得结果仍然是数域 P 上的多项式。

对于多项式的加减法，

$$\partial (f(x) \pm g(x)) \leq \max(\partial (f(x)), \partial (g(x)))$$

对于多项式的乘法，可以证明，**如果** $f(x) \neq 0$ ，
 $g(x) \neq 0$ ，**那么** $f(x)g(x) \neq 0$ ，**并且**

$$\partial (f(x)g(x)) = \partial (f(x)) + \partial (g(x))$$

证明

$$\text{设 } f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0,$$

其中 $a_n \neq 0, b_m \neq 0$, 于是 $f(x)g(x)$ 的首项是

$$a_n b_m x^{n+m}.$$

显然 $a_n b_m \neq 0$, 因之, $f(x)g(x) \neq 0$ 而且它的次数就是 $n + m$.

多项式乘积的首项系数就等于因子首项系数的乘积.

上面得出的结果都可以推广到多个多项式的情形.

三、多项式的运算规律

1. 加法交换律 $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$.

2. 加法结合律 $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$.

3. 乘法交换律 $f(x)g(x) = g(x)f(x)$.

4. 乘法结合律 $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$.

5. 乘法对加法的分配律

$$f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x)$$

6. 乘法消去律

如果 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$ 且 $f(x) \neq 0$, 那么 $g(x) = h(x)$.

4. 乘法结合律 $(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x))$ 的证明

证明

$$\text{设 } f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i; g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j; h(x) = \sum_{k=0}^l c_k x^k .$$

现在来证

$$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x)) .$$

等式左边, $f(x)g(x)$ 中 s 次项的系数为

$$\sum_{i+j=s} a_i b_j ,$$

因此左边 t 次项的系数为

$$\sum_{s+k=t} \left(\sum_{i+j=s} a_i b_j \right) c_k = \sum_{i+j+k=t} a_i b_j c_k .$$

在右边， $g(x)h(x)$ 中 r 次项的系数为

$$\sum_{j+k=r} b_j c_k ,$$

因此右边 t 次项的系数为

$$\sum_{i+r=t} a_i \left(\sum_{j+k=r} b_j c_k \right) = \sum_{i+j+k=t} a_i b_j c_k .$$

与左边 t 次项的系数一样，所以左右两边相等。

乘法消去律的证明

证明 因为 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$,

有 $f(x)(g(x) - h(x)) = 0$,

而 $f(x) \neq 0$, 所以 $g(x) - h(x) = 0$, 也就是

$$g(x) = h(x).$$

证毕

定义 4 所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体, 称为数域 P 上的一元多项式环, 记为 $P[x]$, P 称为 $P[x]$ 的系数域.

小结和作业

1. 学会了多项式的哪些运算？
2. 多项式的运算满足哪些规律？
3. 作业见学习通.