第七节 克拉默 (Cramer) 法则

主要内容

- 非齐次线性方程组克拉默法则
- 齐次线性方程组克拉默法则

一、非齐次线性方程组克拉默法则

定理 4 (克拉默法则)　如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

的行列式　$d = |A| \neq 0$,

那么线性方程组 (1) 有解，并且解是唯一的，解可以通过系数表为

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, \cdots, x_n = \frac{d_n}{d}, \quad (3)$$

其中 d_j 是把矩阵 A 中第 j 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 所成的矩阵的行列式，即

$$d_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$j=1,2,\cdots,n.$$

若把d_j按照第j列展开，则

$$d_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}\ ,\ j=1,2,\cdots,n.$$

证明 1. 把方程组(1) 简写为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \text{ }, i = 1,2,\cdots,n \text{ }.$$

首先来证明(3) 的确是 (1) 的解.

把 (3) 代入第 i 个方程，左端为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{d_j}{d} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j \text{ }.$$

因为

$$d_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} = \sum_{s=1}^{n} b_sA_{sj},$$

所以

$$\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj}$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{ij} A_{sj} b_s$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{sj} b_s$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{sj} \right) b_s .$$

根据2.6的**定理4（行列式按行按列展开定理）**，有

$$\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj}\right)b_s=\frac{1}{d}\cdot db_i=b_i\ .$$

这与第 i 个方程的右端一致．也就是说（3）确为方程组（1）的解.

2. 设 $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 是方程组(1)的一个解,

于是有 n 个恒等式 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j=b_i\ ,\ i=1,2,\cdots,n\ .$

为了证明 $c_k = \frac{d_k}{d}$，取系数矩阵中第 k 列元素的代数余子式 $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$，用它们分别乘以

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = b_i \ , i = 1, 2, \cdots, n$$

中 n 个恒等式，有

$$A_{ik}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j=b_iA_{ik}\ ,i=1,2,\cdots,n\ ,$$

这还是 n 个恒等式. 把它们加起来，即得

$$\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j=\sum_{i=1}^{n}b_iA_{ik}\ .$$

等式右端等于在行列式 d 按第 k 列的展开式中把 a_{ik} 分别换成 b_i $(i = 1, 2, \ldots , n)$，因此，它等于把行列式 d 中第 k 列换成 $b_1, b_2, \ldots , b_n$ 所得的行列式，也就是 d_k . 再来看左端

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ik} c_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} c_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} \right) c_j \ .$$

由第2.6节 定理 4 中的公式

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} d, & 当\ j = k, \\ 0, & 当\ j \neq k, \end{cases}$$

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

所以 $$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}\right)c_j = dc_k \ .$$

于是等式 $\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}$ 就变成

$$dc_k = d_k \ , k = 1, 2, \dots , n \ .$$

也就是 $$c_k = \frac{d_k}{d}, k = 1, 2, \cdots, n \ .$$

这就是说，如果($c_1, c_2, \dots , c_n$) 是方程组的一个解，

它必为 $\left(\frac{d_1}{d}, \frac{d_2}{d}, \cdots, \frac{d_n}{d}\right)$，即解唯一.

证毕

例 1　利用克拉默法则解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

常数项全为零的线性方程组称为**齐次线性方程组.**

问（1）齐次线性方程组总是有解吗？

(2)对于方程个数与未知量个数相同的齐次线性方程组，若满足其系数行列式不为零，则该方程组的解的情况？

因为(0, 0, … , 0) 就是一个解，称它为**零解**.

对于齐次线性方程组，它除去零解以外还有没有其它解，

或者说，它有没有**非零解**.

二、齐次线性方程组克拉默法则

定理 6 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵的行列式 $|A| \neq 0$，那么它只有零解.

换句话说，如果它有非零解，则必有$|A| = 0$.

例 2　(1) 讨论 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解，并求出其解.

(2) 讨论 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

解 （1）方程组的系数矩阵的行列式

$$d=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

由此可知, 当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq -2$ 时, $d\neq 0$, 这时方程组有唯一解.

$$d_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda & \lambda & 1\\ \lambda^2 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2.$$

所以 $x_1 = \dfrac{-(\lambda+1)}{\lambda+2}$， $x_2 = \dfrac{1}{\lambda+2}$， $x_3 = \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$.

（2） 当系数行列式D=0时，该线性方程组有非零解.

小结和作业

1. 请叙述克拉默法则的内容以及其意义.

2.使用克拉默法则的条件是哪些？

3.作业见学习通.