数学与工程学院*级 20**—20**学年第 1 学期数学与应用数学专业必修课程

《高等代数(2)》期中考试　试卷

教师________班级_________姓名__________学号__________得分__________

一、选择题（每小题 4 分, 共 20 分）

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_1x_2-3x_2x_3$ 的秩 r 和符号差 s 是（　　）

A. $r=2,s=0$　B. $r=1,s=0$　C. $r=2,s=2$　D. $r=3,s=1$

2. 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间,且 $\dim(V_1)=s,\dim(V_2)=t,\dim(V_1+V_2)=r$,则(　　)

A. $r<s+t$　B. $r=s+t$　C. $r\le s+t$　D. $r=s\cdot t$

3. n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ $(3\le s\le n)$ 线性无关的充分必要条件是（　　）

A.存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s\ne 0$

B. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中任意两个向量组都线性无关

C. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表示

D. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 中任意一个向量都不能由其余向量线性表示

4. 设线性变换 σ 在基 α_1,α_2 下的矩阵是 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 σ 在 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2$ 下的矩阵是(　　)

A. $\begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix} c+d & c \\ a-c+b-d & a-c \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a & b \end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d-a-b & d-b \end{pmatrix}$

5. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a+b & 5 & 0 \\ -1 & 0 & c \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则满足条件的是　　(　　)

A. $a=1,b=2,c=1$　B. $a=1,b=1,c=-1$

C. $a=3,b=-1,c=2$　D. $a=-1,b=3,c=8$

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 二次型$q(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&0\\0&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$的矩阵是____________________.

2. 向量组 $\alpha_1=(1,2,3),\alpha_2=(-1,0,1),\alpha_3=(0,2,4)$ 所生成的空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的维数是____________.

3. 如果$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是向量空间 V 的一组基，则基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1$的过渡矩阵是____________.

4. $f(x)=2x^2+3x+1$在基 $f_1(x)=2$, $f_2(x)=x+3$, $f_3(x)=x^2+x+4$下的坐标是__________________________________.

5. 由实对称矩阵$\begin{pmatrix}0&0.5&-3\\0.5&0&2.5\\-3&2.5&0\end{pmatrix}$所确定的二次型是 $f(x_1,x_2,x_3)=$___________.

三、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

1. 用非退化线性替换将实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 化为规范形，并写出相应的非退化线性替换.

2. 在 P^4 中，求向量$\xi=(1,2,1,1)$关于基$\alpha_1=(1,1,1,1),\alpha_2=(1,1,-1,-1),\alpha_3=(1,-1,1,-1)$,

$\alpha_4=(1,-1,-1,1)$的坐标.

3. 设M是数域F上向量空间V的子空间，并且存在V的子空间N，使V=M+N，对任意$\alpha \in V$，有唯一分解式$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in M, \alpha_2 \in N$.定义V的变换$\sigma(\alpha) = \alpha_2$.证明：$\sigma$是V的一个线性变换 .

.

四、证明题（第 1 小题 6 分，第 2，3 小题各 7 分，第 4 小题 10 分，共 30 分）

1. 设v_1, v_2是n维线性空间v的两个子空间,而且v_1, v_2的维数之和大于n. 证明：v_1, v_2必含有公共的非零向量.

2. 如果A, B都是n级正定矩阵，那么$A+B$也是正定矩阵.

3. 证明：每一个 n 维线性空间都可以表示成 n 个一维子空间的直和.

4. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}$，求子空间 $A(R^3)=\left\{A\vec{a}\,\middle|\,\vec{a}\in R^3\right\}$ 的一组正交基.