# 第五节 子 空 间

## 主要内容

- 正交子空间
- 正交补

文山学院 WENSHAN UNIVERSITY

# 一、正交子空间

## 1. 定义

**定义 10** 设 $V_1, V_2$ 是欧氏空间 $V$ 中两个子空间，如果对于任意的 $\alpha \in V_1$，$\beta \in V_2$，恒有

$$(\alpha, \beta) = 0.$$

则称 $V_1, V_2$ 为**正交的**，记为 $V_1 \perp V_2$． 一个向量 $\alpha$，如果对于任意的 $\beta \in V_1$，恒有 $(\alpha, \beta) = 0$. 则称 **$\alpha$ 与子空间 $V_1$ 正交**，记为 $\alpha \perp V_1$ .

因为只有零向量与它自身正交，所以由$V_1 \perp V_2$可知$V_1 \cap V_2 = \{0\}$；由$\alpha \perp V_1$，$\alpha \in V_1$可知$\alpha = 0$.

## 2. 正交子空间的性质

关于正交的子空间，我们有：

**定理 5** 如果$V_1, V_2, \ldots, V_s$两两正交，那么$V_1 + V_2 + \ldots + V_s$是直和.

**证明** 设$\alpha_i \in V_i$，$i = 1, 2, \ldots, s$，且

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s=0.$$

下面来证明 $\alpha_i=0$． 用 $\alpha_i$ 与等式两边作内积，利用正交性，得

$$(\alpha_i,\alpha_i)=0.$$

从而 $\alpha_i=0\ (i=1,2,\ldots,s)$． 这就是说，和

$$V_1+V_2+\ldots+V_s$$

是直和.

证毕

## 二、正交补

### 1. 定义

**定义 11**　子空间 $V_2$ 称为子空间 $V_1$ 的一个**正交补**，如果 $V_1 \perp V_2$，并且 $V_1 + V_2 = V$.

显然，若 $V_2$ 是 $V_1$ 的正交补，则 $V_1$ 也是 $V_2$ 的正交补.

## 2. 正交补的性质

**定理 6**　$n$ 维欧氏空间 $V$ 的每一个子空间 $V_1$ 都有唯一的正交补.

**证明**　如果 $V_1=\{0\}$，那么它的正交补就是 $V$，唯一性是显然的. 设 $V_1\neq\{0\}$. 欧氏空间的子空间在所定义的内积下也是一个欧氏空间. 在 $V_1$ 中取一组正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m$，由定理 1 它可以扩充成 $V$ 的一组正交基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1},\ldots,\varepsilon_n\,.$$

显然，子空间 $L(\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_n)$ 就是 $V_1$ 的正交补.

再来证唯一性. 设 $V_2$，$V_3$ 都是 $V_1$ 的正交补，于是

$$V = V_1 \oplus V_2 ,$$

$$V = V_1 \oplus V_3 .$$

令 $\alpha \in V_2$，由第二式即有

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_3 ,$$

其中 $\alpha_1 \in V_1$，$\alpha_3 \in V_3$. 因为 $\alpha \perp \alpha_1$ 所以

$$(\alpha, \alpha_1) = (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_3, \alpha_1)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_1) = 0 .$$

即 $\alpha_1 = 0$． 由此即得 $\alpha \in V_3$， 即 $V_2 \subset V_3$．

同理可证 $V_3 \subset V_2$． 因此 $V_2 = V_3$， 唯一性得证.

证毕

$V_1$ 的正交补记为 $V_1^{\perp}$． 由定义可知

$$维(V_1) + 维(V_1^{\perp}) = n .$$

由定理的证明还不难得到

**推论** $V_1^{\perp}$ 恰由所有与 $V_1$ 正交的向量组成.

证明略

由分解式

$$V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$$

可知，$V$ 中任一向量 $\alpha$ 都可以唯一地分解成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 ,$$

其中 $\alpha_1 \in V_1$， $\alpha_2 \in V_1^{\perp}$. 称 $\alpha_1$ 为向量 $\alpha$ 在子空间 $V_1$ 上的**内射影**.