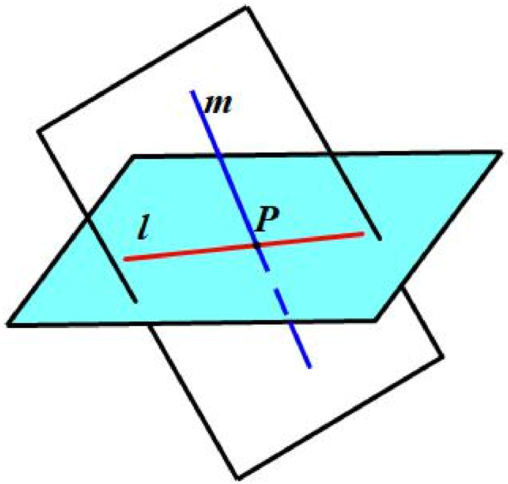
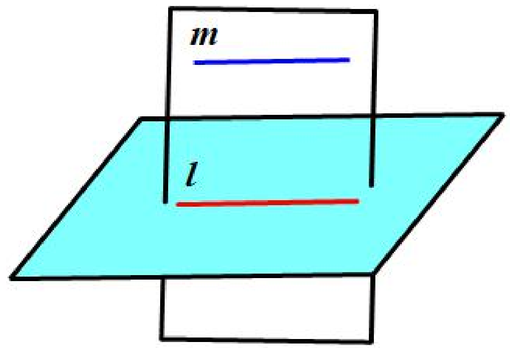
3.7空间两直线的相关位置

主讲人：周 平

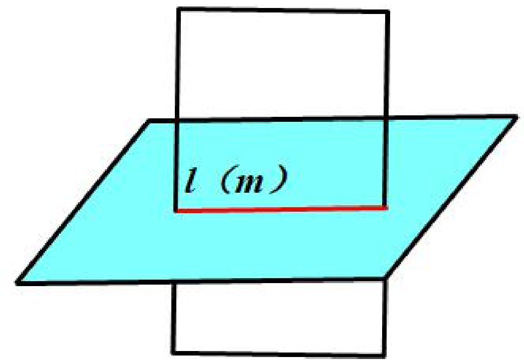
想一想：空间两直线的位置关系有哪些?



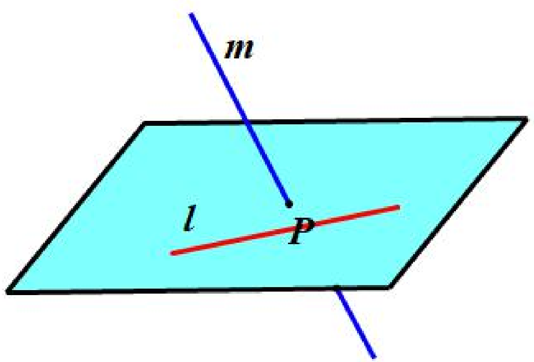
相 交



平 行



重 合



异 面

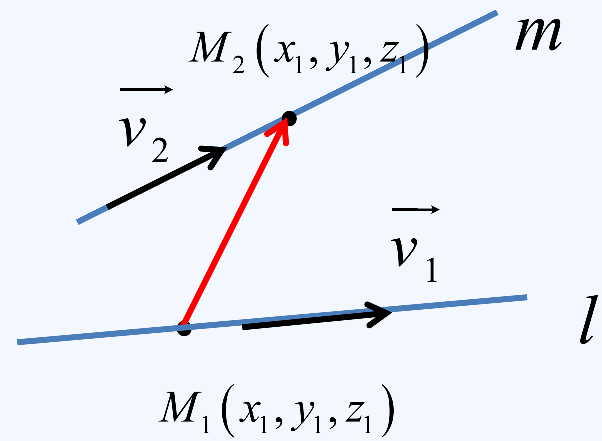
思考：如何判定以上四种相关位置呢?

1.两直线相关位置成立的条件

设直线l与m的方程分别为：

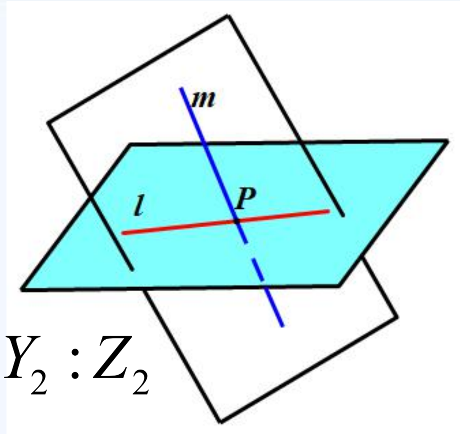
$$l: \frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1}$$

$$m: \frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}$$



这里直线l是由点$M_1(x_1，y_1，z_1)$与向量$\overrightarrow{v_1}=\{X_1，Y_1，Z_1\}$决定的，$m$是由点$M_2(x_2，y_2，z_2)$与向量$\overrightarrow{v_2}=\{X_2，Y_2，Z_2\}$决定的.两直线的相关位置决定于三向量$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$的相互关系.

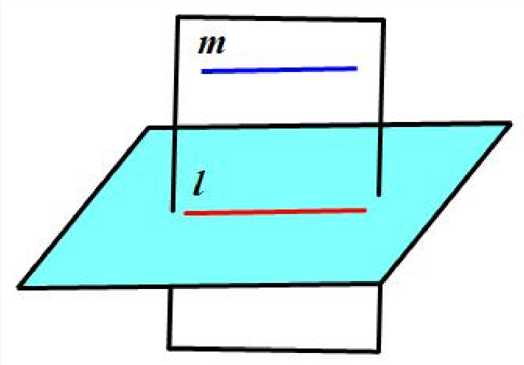
（1）l与m的相交条件：



$$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}=0,\ X_1:Y_1:Z_1\neq X_2:Y_2:Z_2$$

即$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$共面，且$\overrightarrow{v_1}\nparallel\overrightarrow{v_2}$

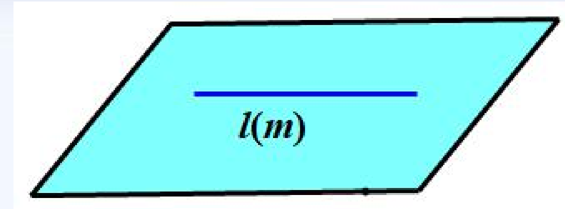
（2）l与m的平行条件：



$$X_1:Y_1:Z_1=X_2:Y_2:Z_2\neq(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$$

即$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$共面，且$\overrightarrow{v_1}\parallel\overrightarrow{v_2}$但不平行于$\overrightarrow{M_1M_2}$

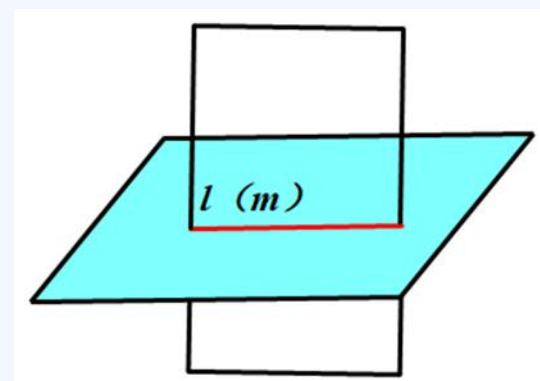
（3）l与m的重合条件：



$$X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$$

即$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$共面，且$\overrightarrow{v_1} \parallel \overrightarrow{v_2} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$

（4）l与m的异面条件：



$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

即$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$异面

定理3.7.1 判定空间两直线 $l:\dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1}$，

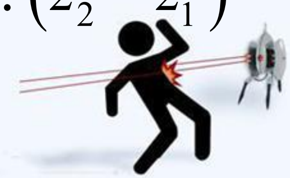
$m:\dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}$ 的相关位置的充要条件为：

i 异面 $\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\neq 0$

ii 相交 $\Delta=0, X_1:Y_1:Z_1\neq X_2:Y_2:Z_2$

iii 平行 $X_1:Y_1:Z_1=X_2:Y_2:Z_2\neq(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$

iv 重合 $X_1:Y_1:Z_1=X_2:Y_2:Z_2=(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$



2.空间两直线的夹角

定义3.7.1　平行于空间两直线的两向量间的角，叫做空间两直线的夹角. 两直线l与m的夹角记做$\angle(l,m)$

定理3.7.2　在直角坐标系里空间两直线 $l:\dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1}$, $m:\dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}$ 夹角的余弦为：

$$\cos\angle(l,m)=\pm\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$$

思考：如何确定空间两直线的夹角

想一想： 若 $X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$ 说明什么？

若两直线垂直，它们的余弦值又有什么结果？

推论

两直线 $l:\dfrac{x-x_1}{X_1}=\dfrac{y-y_1}{Y_1}=\dfrac{z-z_1}{Z_1}, m:\dfrac{x-x_2}{X_2}=\dfrac{y-y_2}{Y_2}=\dfrac{z-z_2}{Z_2}$

垂直的充要条件是：$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$

3.应用举例

例1 判别$l_1:\begin{cases} x=t \\ y=2t+1 \\ z=-t-2 \end{cases}$和$l_2:\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-4}{7}=\dfrac{z+2}{-5}$的位置关系.

解： 因为直线l_1过点$M_1(0,1,-2)$，方向向量为$\vec{v_1}=\{1,2,-1\}$

直线l_2过点$M_2(1,4,-2)$，方向向量为$\vec{v_2}=\{4,7,-5\}$

从而有$\Delta=(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{v_1},\vec{v_2})=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -5 \end{vmatrix}=0$

又因为$1:2:-1 \neq 4:7:-5$

所以直线l_1与l_2相交

例2 **求** $L_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ **和** $L_2: \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$ **的夹角.**

解: 直线L_1的方向向量为 $\overrightarrow{v_1}=\{1,-4,1\}$

直线L_2的方向向量为 $\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\{2,-2,-1\}$

两直线夹角φ的余弦为 $\cos\varphi=\pm\dfrac{1\times2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

故 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$

4.课堂小结

（1）空间两直线分别相交、平行、重合和异面的代数判断依据；

（2）空间两直线夹角的计算.

思考题

当空间中两直线异面时，如何求它们之间的距离？

5.布置作业

P_{131} 2； 3(2).

谢　谢!