《解析几何》
—Chapter 2

§2.2 曲面的方程

Contents

一、曲面的方程

定义 2.2.1　如果一个方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 与一个曲面 Σ 有着关系：

①满足方程 + $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 的 (x,y,z) 是曲面 Σ 上的点的坐标；

②曲面 Σ 上的任何一点的坐标 (x,y,z) 满足方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$，

那么方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 就叫做曲面 Σ 的方程，而曲面 Σ 叫做方程 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 的图形.

一、曲面的方程

例1　求联结两点$A(1,2,3)$和$B(2,-1,4)$的线段的垂直平分面的方程.

例2　求两坐标面xOz和yOz所成二面角的平分面方程.

例3　求坐标平面yOz的方程.

例4　一平面平行于坐标平面xOz，且在y轴的正向一侧与平面xOz相隔距离为k，求它的方程.

例5　设球面的中心是点$C(a,b,c)$，而且半径等于r，求它的方程.

一、曲面的方程

求曲线方程一般需要下面的5个步骤：

1）选取适当的坐标系（如题中已给定，这一步可省）；

2）在曲线上任取一点，也就是轨迹上的流动点；

3）根据曲线上的点所满足的几何条件写出等式；

4）用点的坐标x,y,z的关系来表示这个等式，并化简得方程；

5）证明所得的方程就是曲线的方程，也就是证明它符合定义.

二、曲面的参数方程

定义 2.2.2　如果取 $u,v\left(a\le u\le b,c\le v\le d\right)$ 的一切可能取的值，由

$$\vec{r}\left(u,v\right)=x\left(u,v\right)\vec{e_1}+y\left(u,v\right)\vec{e_2}+z\left(u,v\right)\vec{e_3},$$

表示的向径 $\vec{r}\left(u,v\right)$ 的终点 M 总在一个曲面上；

反过来，在这个曲面上的任意点 M 总对应着以它为终点的向径，而这向径可由 u,v 的值 $\left(a\le u\le b,c\le v\le d\right)$ 通过

$$\vec{r}\left(u,v\right)=x\left(u,v\right)\vec{e_1}+y\left(u,v\right)\vec{e_2}+z\left(u,v\right)\vec{e_3}$$ 完全决定，

那么我们就把表达式 $\vec{r}\left(u,v\right)=x\left(u,v\right)\vec{e_1}+y\left(u,v\right)\vec{e_2}+z\left(u,v\right)\vec{e_3}$ 叫做曲面的向量式参数方程，其中 u,v 为参数.

二、曲面的参数方程

向径$\vec{r}(u,v)$的坐标为$\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$，所以曲面的参数方程也可写成

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v). \end{cases} \qquad (2.2-6)$$

表达式（2.2—6）叫做曲面的坐标式参数方程.

例6　求球心在原点，半径为r 的球面的参数方程.

例7　求以z 轴为对称轴，半径为R 的圆柱面的参数方程.

结论　　求空间曲面或曲线的参数方程时，经常是作向径 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标折线，将分解 $\overrightarrow{OP}$ 为平行于坐标轴的三个向量之和，这样便于找出 x,y,z 与参数之间的函数关系.

注意　　空间曲面的参数方程的表达式不是惟一的.

二、曲面的参数方程

化普通方程 $F(x,y,z)=0$ 为参数方程 $\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v), \end{cases}$

一般按下列三个步骤进行：

1）根据普通方程 $F(x,y,z)=0$ 或它所表示的图形特征选取适当的参数 u,v；

2）找出中 x,y,z 的两个与参数 u,v 的关系式，如 $x=x(u,v)$，

$y=y(u,v)$ [或 $z=z(u,v)$]；

3）把关系式 $x=x(u,v)$， $y=y(u,v)$ [或 $z=z(u,v)$]代入 $F(x,y,z)=0$，然后

解出 $z=z(u,v)$.

三、球坐标系与柱坐标系

1. 球坐标系

空间的点除去 z 轴上的点，其余的点与有序三数组 ρ,φ,θ 建立了一一对应的关系，这种一一对应的关系叫做空间点的球坐标系，或称空间极坐标系，并把有序三数组 ρ,φ,θ 叫做空间点 M 的球坐标或称空间极坐标，记做 $M(\rho,\varphi,\theta)$，

这里的 $\rho \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi, -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

三、球坐标系与柱坐标系

2. 柱坐标系

空间的点除去 z 轴上的点，其余的点与有序三数组 ρ,φ,u 建立了一一对应的关系，这里 $\rho \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi, -\infty < u < +\infty$ ，这种一一对应的关系叫做柱坐标系，或称空间半极坐标系，并把有序三数组 ρ,φ,u 叫做空间点 M 的柱坐标或称半极坐标，记做

$M(\rho,\varphi,u)$.

作业

$P_{87\sim88}$

2（4），3（3），4（3）