

第9章 欧几里得空间

第2节 标准正交基 (二)

主要内容

- 问题的提出
- 如何求标准正交基
- 例题巩固
- 小结、提出进一步的思考

一、问题的提出

1. 欧氏空间中, 任意一组正交向量组能否扩充为它的一组正交基?

2. 能否从欧氏空间的一组基得到一组标准正交基?

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 n 维欧氏空间的一正交向量组.

1. 当 $n - m = 0$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 就是一组正交基.

2. 假设 $n - m = k$ 时, 可以找到向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 成为一组正交基.

下证 $n - m = k + 1$ 的情形.

因为 $m < n$, 所以一定有向量 β 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出.

所以一定有向量 β 不能被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出,

作向量 $\alpha_{m+1} = \beta - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \dots - k_m\alpha_m \neq 0$.

这里 k_1, k_2, \dots, k_m 是待定的系数.

用 α_{m+1} 与 α_i 作内积, 得

$$(\alpha_{m+1}, \alpha_i) = (\beta, \alpha_i) - k_i(\alpha_i, \alpha_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

$$\text{于是 } k_i = \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

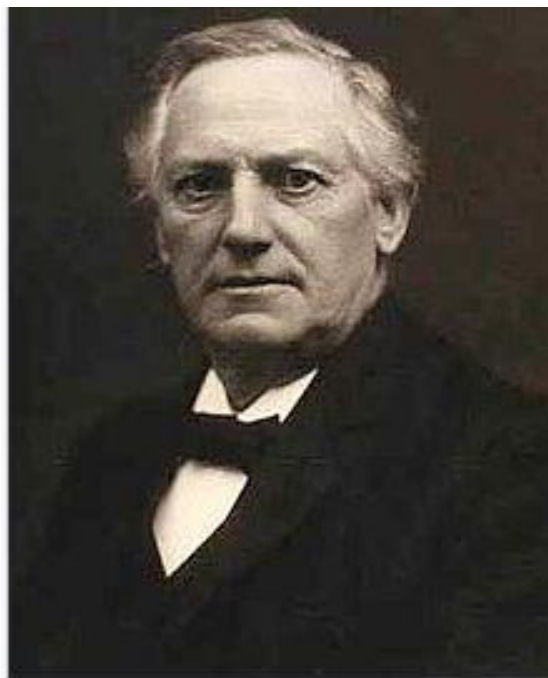
因此 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 是一正交向量组.

正交组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 还需增加 $n - (m+1) = (n-m) - 1 = (k+1) - 1 = k$ 扩充为一正交基.

定理 1 n 维欧氏空间中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基.

1. n 维欧氏空间中, 任意一组正交向量组能否扩充为它的一组正交基?

2. 能否从 n 维欧氏空间的一组基得到一组标准正交基?



约尔根·佩德森·格拉姆



艾哈德·施密特

定理 2 对于 n 维欧氏空间中任意一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$,

都可以找到一组标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, 使

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

证明 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 是一组基, 逐一地求出向量

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$.

首先, 可取 $\eta_1 = \frac{1}{|\varepsilon_1|} \varepsilon_1$. 假定已经求出 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$,

它们是单位正交的, 具有性质

$$L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i), i = 1, 2, \dots, m.$$

下一步求 η_{m+1} .

因为 $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$,

所以 ε_{m+1} 不能被 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 线性表出.

作向量 $\xi_{m+1} = \varepsilon_{m+1} - \sum_{i=1}^m k_i \eta_i$.

这里 k_1, k_2, \dots, k_m 是待定的系数.

由 $(\xi_{m+1}, \eta_i) = 0$, 得 $k_i, i = 1, 2, \dots, m$, 且 $\xi_{m+1} \neq 0$

令 $\eta_{m+1} = \frac{\xi_{m+1}}{|\xi_{m+1}|}$. 则 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \eta_{m+1}$
就是一单位正交向量组.

同时 $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m+1}) = L(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+1})$.

由归纳法原理, 定理 2 得证.

证毕

定理 2 中把一组线性无关的向量变成一单位正交向量组的方法称为**施密特(Schmidt)正变化过程**.

例 1 设

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

试用施密特正变化过程把这组向量变成单位正交的向量组.

解 取 $b_1 = a_1$; $b_2 = a_2 - kb_1$ 取 b_2 使得 b_1 与 b_2 正交

$$\text{则 } k = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ 于是 } b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

取 $b_3 = a_3 - k_1 b_1 - k_2 b_2$ b_3 使得 b_3 与 b_1, b_2 正交

$$k_1 = \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{1}{3} \quad k_2 = \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{5}{3}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再把它们单位化, 取

$$e_1 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{b_2}{|b_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则 e_1, e_2, e_3 即为所求.

小 结

1. n 维欧氏空间中, 任意一组正交向量组扩充为它的一组正交基.
2. 给定 n 维欧氏空间中, 任意一组基, 能把它们化为标准正交基。

思考

1. 满足定理2的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的

过渡矩阵是哪种类型的矩阵?

2. 由欧式空间的一个标准正交基到另一个标准正交基的

过渡矩阵有什么性质特征?