



卫星接收装置

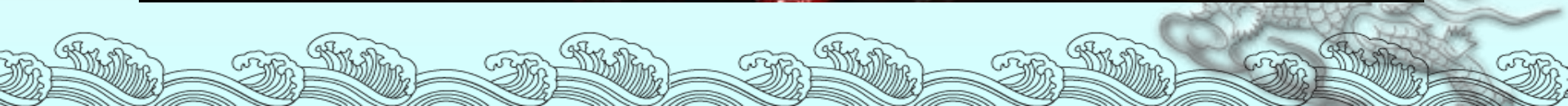


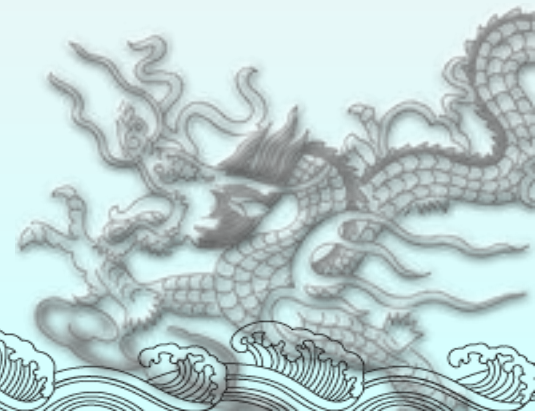
旋转门

§4.3 旋转曲面



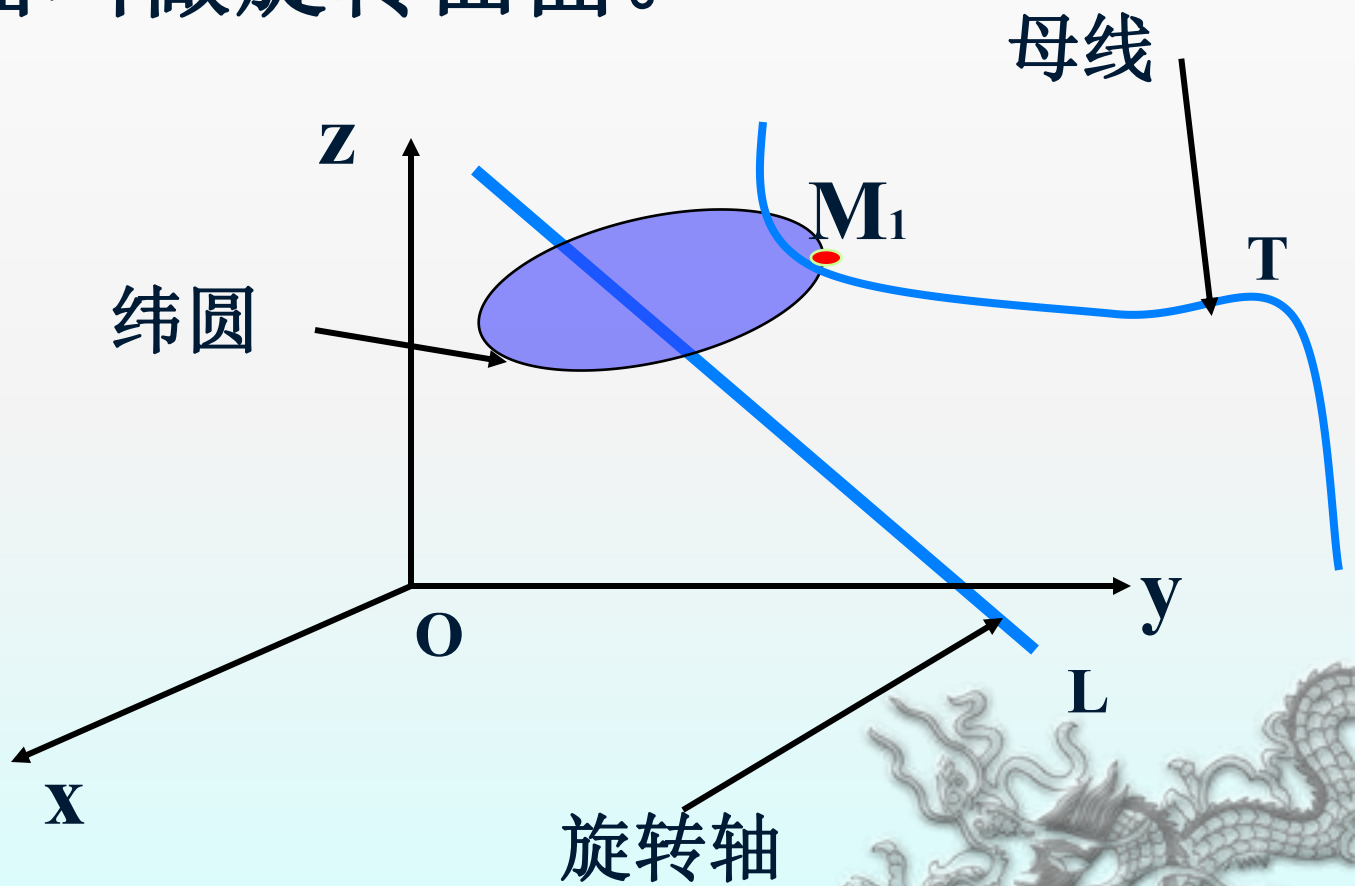
生活中还见过哪些旋转曲面吗？





一、定义

在空间,一条曲线 T 围绕着定直线 L 旋转一周,所产生的曲面叫做旋转曲面。



旋转曲面的有关概念

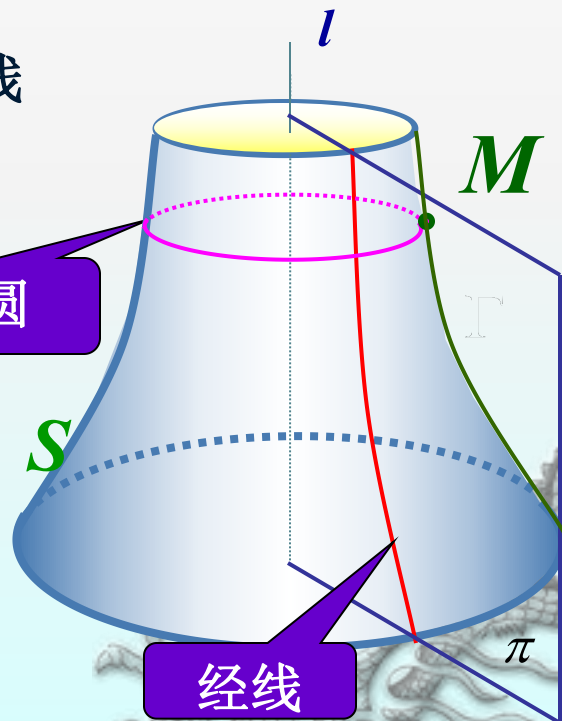
I 母线上任意一点绕旋转轴 l 旋转的轨迹是一个圆，称为旋转面的**纬圆**或**纬线**

II 以旋转轴 l 为边界的半平面与旋转面的交线称为旋转面的**经线**

说明:

i 纬圆也可看作垂直于旋转轴 l 的平面与旋转面的交线

ii 任一经线都可以作为**母线**，但**母线不一定是经线**。

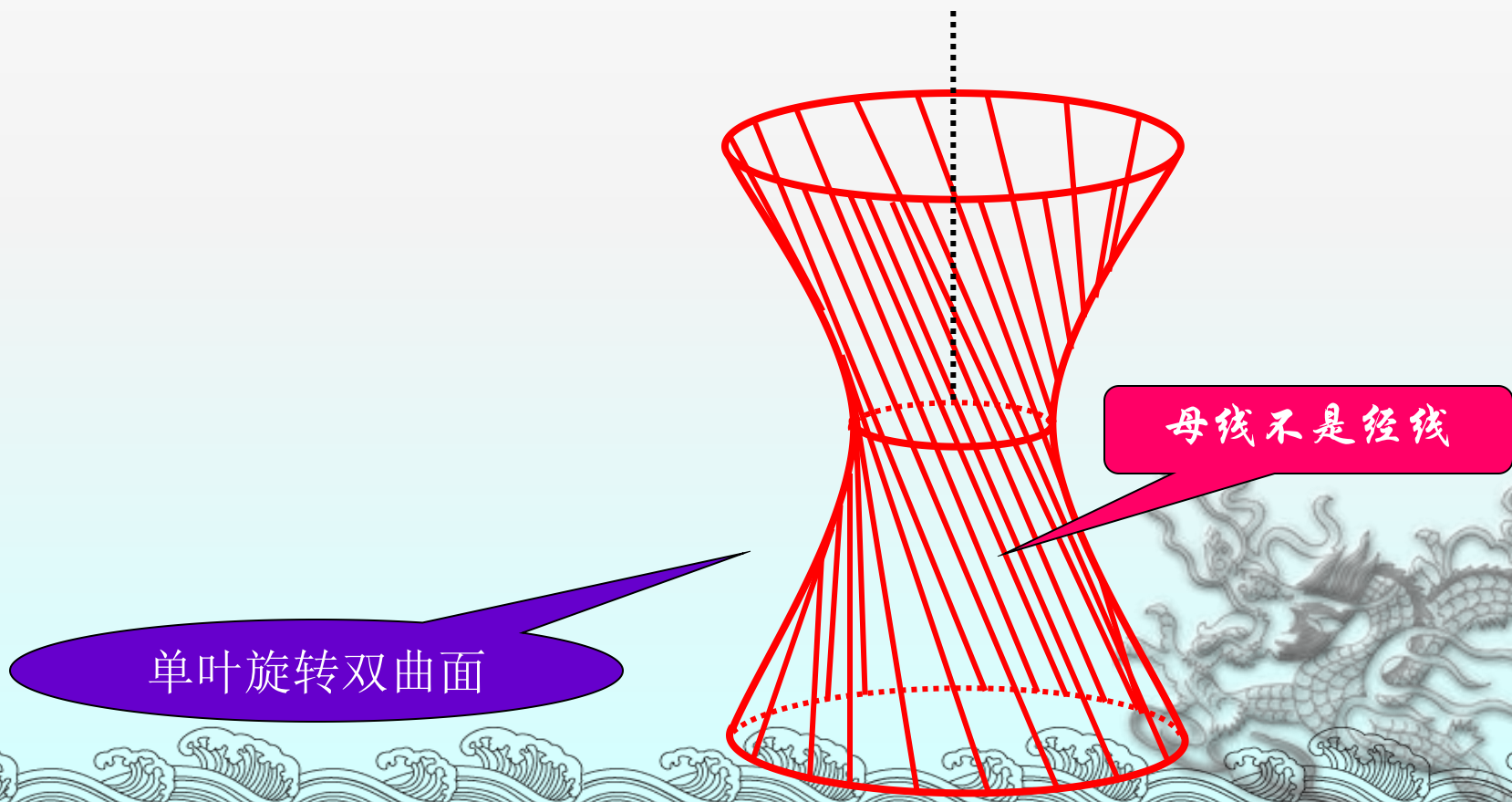


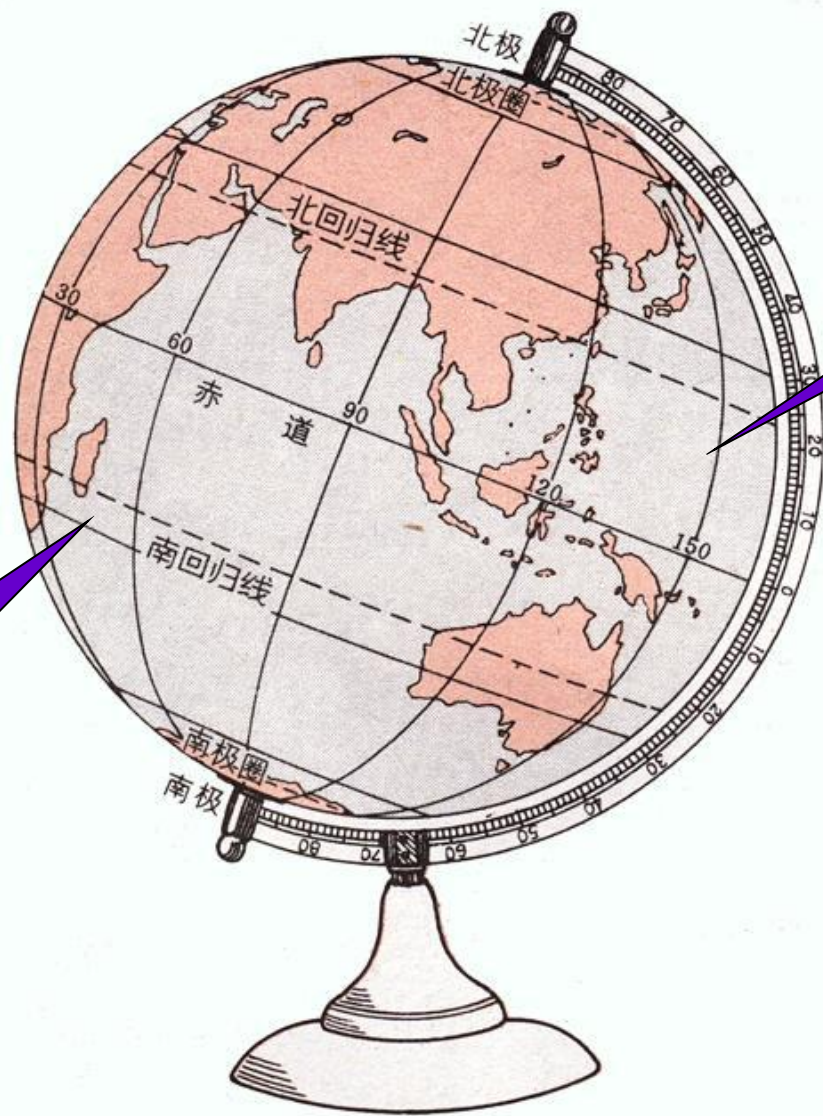
经线和母线
一样吗？

旋转曲面也可看作经
线绕轴旋转生成

满足什么条件
母线就是经线？

注：为方便，今后将取旋转曲面的某一条经线作为它的母线。





经线

纬圆 (纬线)

1.4 地球仪

二、旋转曲面的方程 (直角坐标系)

1 旋转曲面的一般方程

旋转曲面又可看作以轴 l 为连心线的一族纬圆生成的曲面

设旋转曲面的母线 $\Gamma: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 旋转轴为直线 $l: \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$

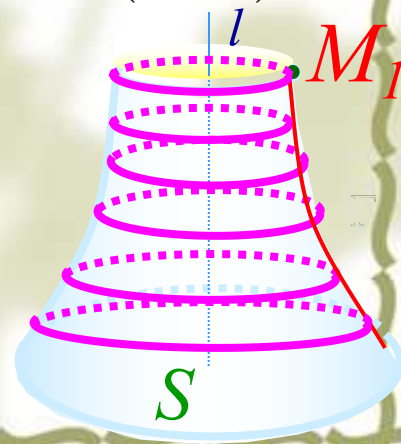
分析: $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \text{母线} \Rightarrow M_1 \in S \Leftrightarrow M_1 \in \text{纬圆} = \begin{cases} \text{平面} \\ \text{球} \end{cases}$

当 M_1 遍历整个母线 Γ 时, 得出旋转曲面的所有纬圆, 这些纬圆生成旋转曲面

$$\begin{cases} \text{纬圆:} \begin{cases} X(x-x_1) + Y(y-y_1) + Z(z-z_1) = 0 & (1) \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = (x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2 & (2) \end{cases} \Rightarrow F(x, y, z) = 0 \\ \text{母线:} \begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1) = 0 & (3) \\ F_2(x_1, y_1, z_1) = 0 & (4) \end{cases} \end{cases}$$

注:

- i 写出这母线上任意一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 的纬圆方程或母线族
- ii 写出参数 x_1, y_1, z_1 的约束条件
- iii 消去参数得到所求旋转曲面的方程



例1 求直线 $\Gamma: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$ 绕直线 $l: x=y=z$ 旋转所得的旋转曲面的方程.

二、旋转曲面的方程

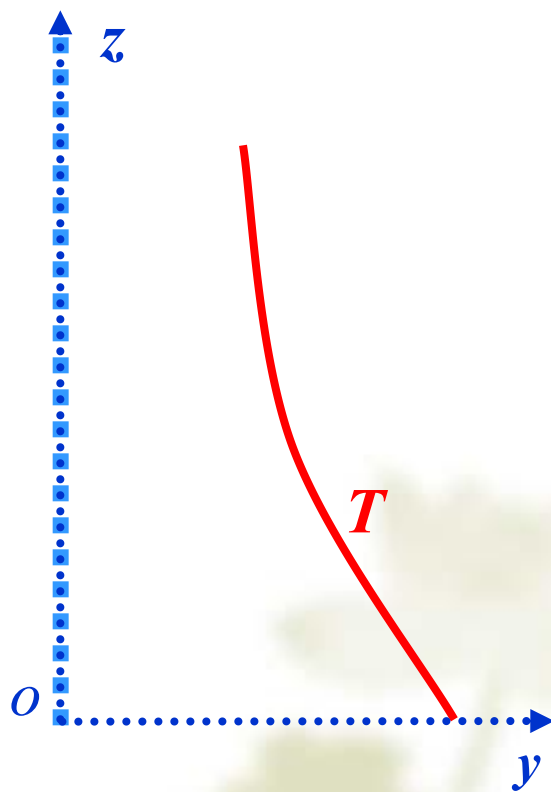
2. 前提:在直角坐标系下

旋转曲面 { 母线在坐标平面上
 旋转轴为坐标轴

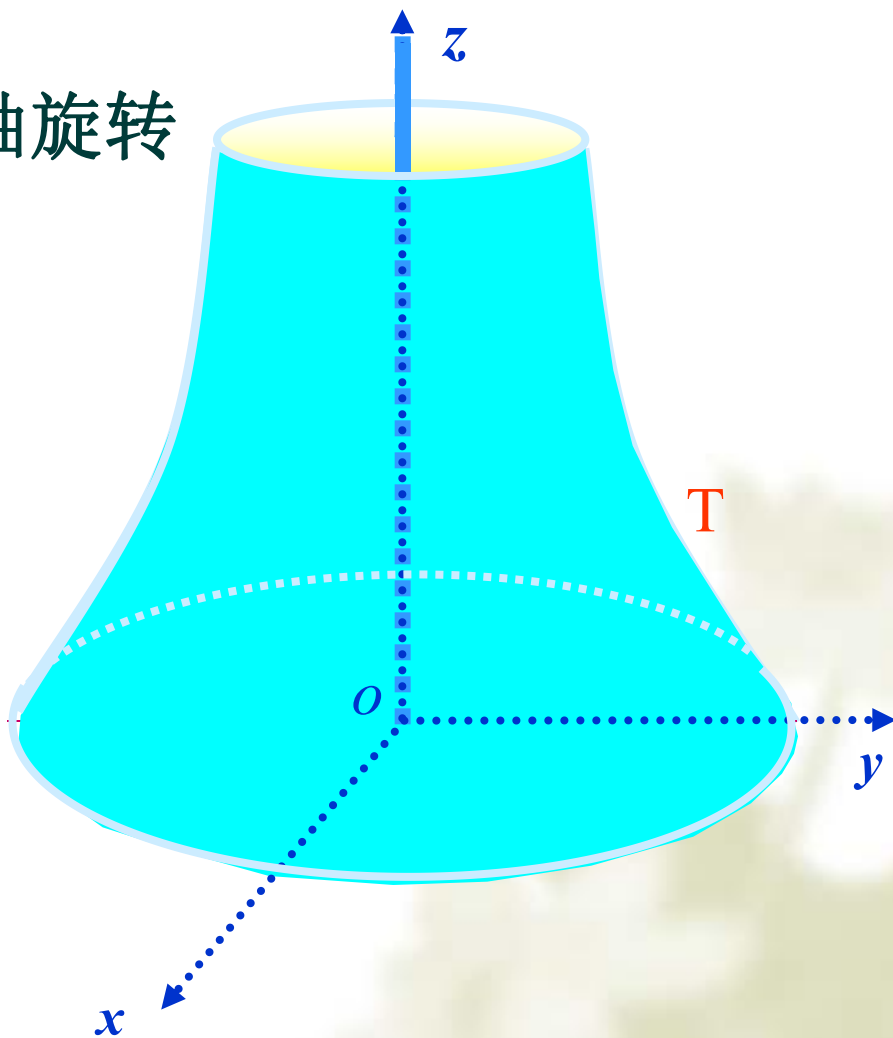


2. 推导

母线 T $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转



母线 **T** $\begin{cases} f(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转

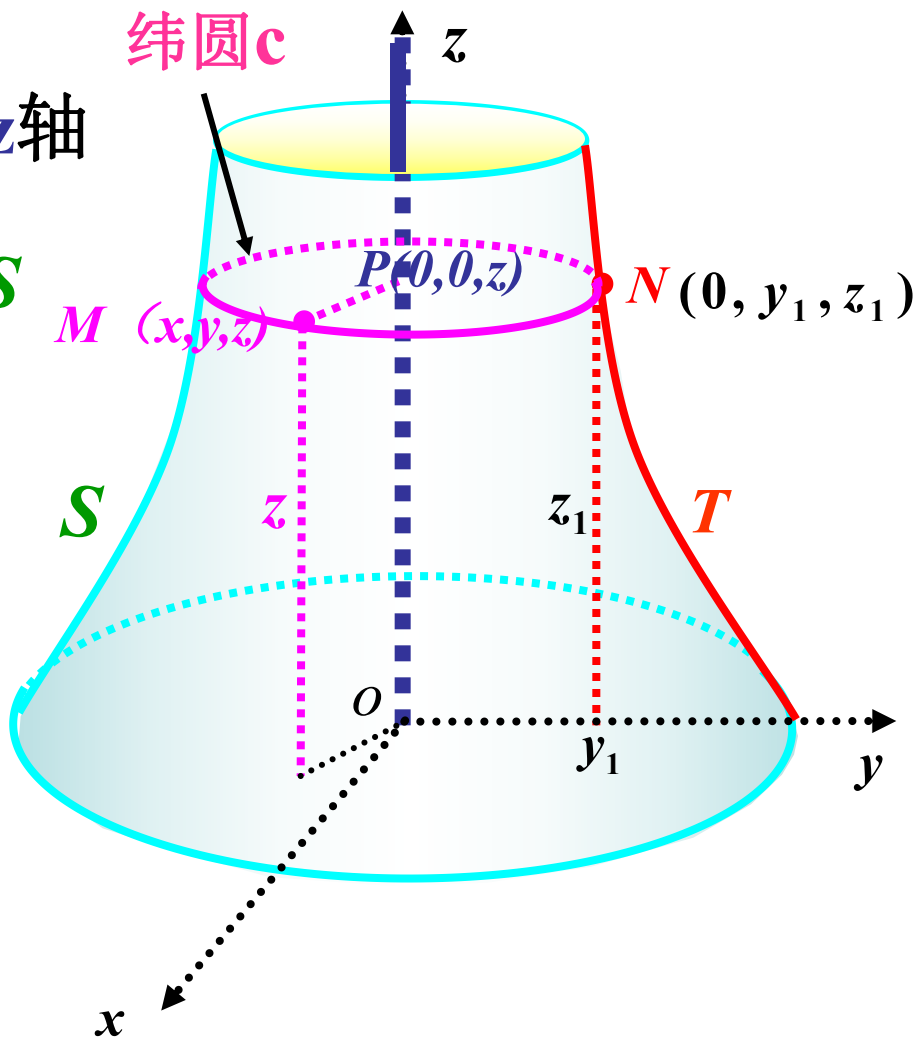


母线 T $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴

旋转一周得旋转曲面 S

分析: $\forall M(x, y, z) \in S$

当母线 T 绕着 z 轴旋转，点 M 跑遍整个母线时，就得出的一组平行的纬圆，它们构成了所求的旋转曲面。



关键：找出动点 M 的坐标所满足的等量关系

结果比较

母线 Γ
$$\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

旋转曲面

$$S: f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

三、求旋转曲面方程的规律

1. 文字叙述

当坐标平面上的曲线 T 绕此坐标平面里的某一坐标轴旋转时, 只要将 T 在坐标平面里的方程保留和旋转轴同名的坐标, 而以其他两个坐标的平方和的平方根来代替方程中的另一坐标, 就得到了此旋转曲面的方程。

2. 数学符号表示

母线 $\begin{cases} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转的旋转曲面方程为

$$F(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$$

思考：那么绕 z 轴旋转呢？

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

四、实例应用

1. yOz 平面上的椭圆

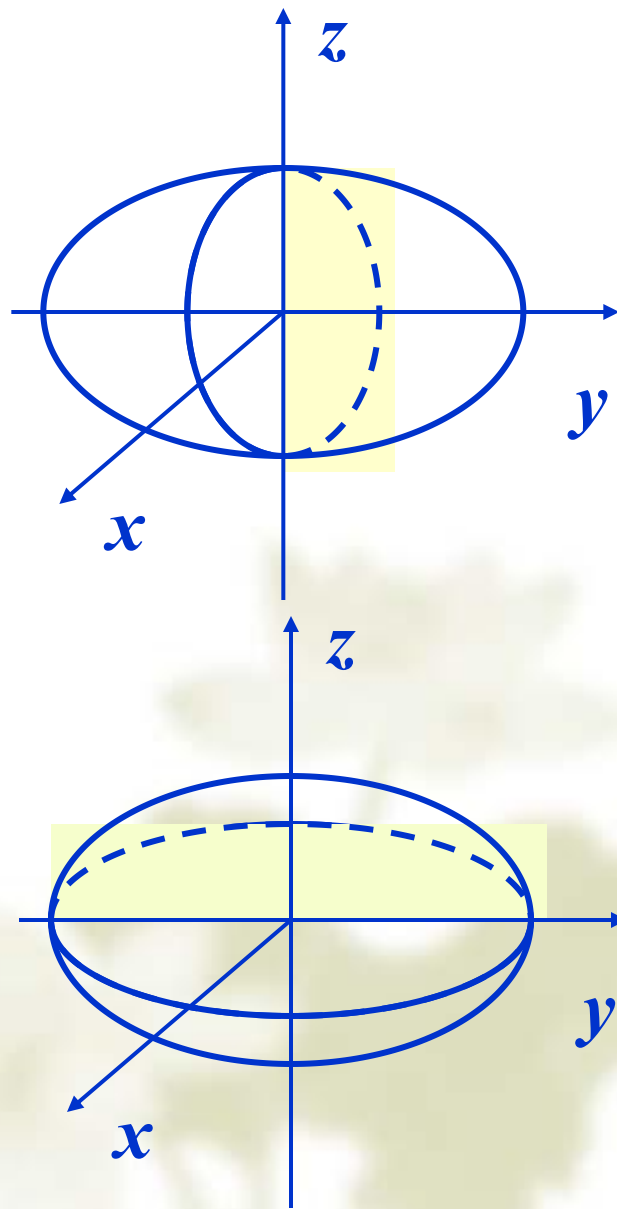
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

绕 y 轴旋转

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$$

绕 z 轴旋转

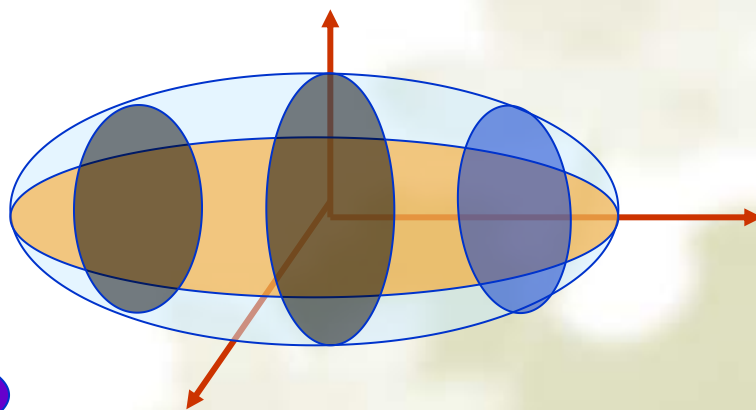
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



旋转
椭球
面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

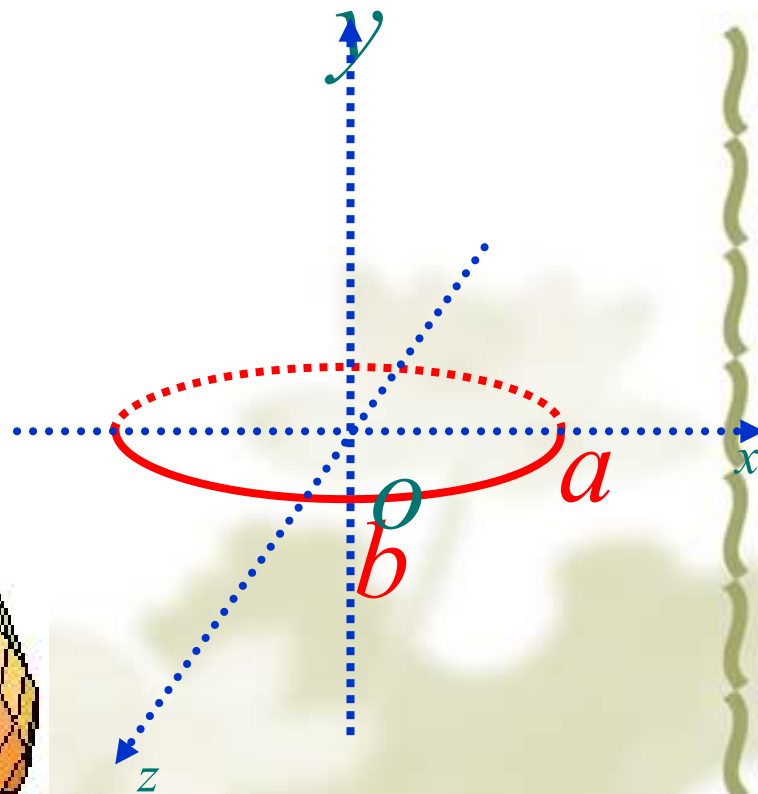
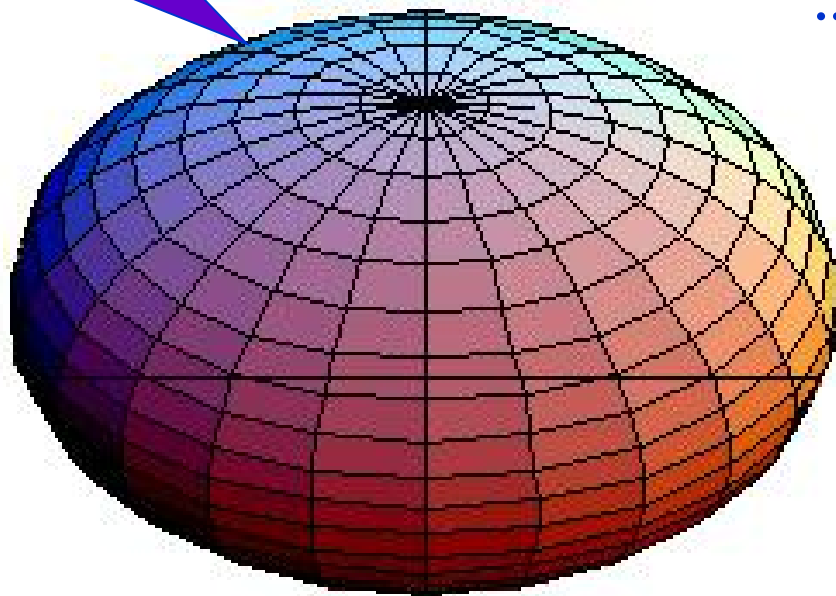
长形旋转椭球面



(2) 将椭圆 $\Gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} (a > b)$ 绕短轴 (即 y 轴) 旋转

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

扁形旋转椭球面

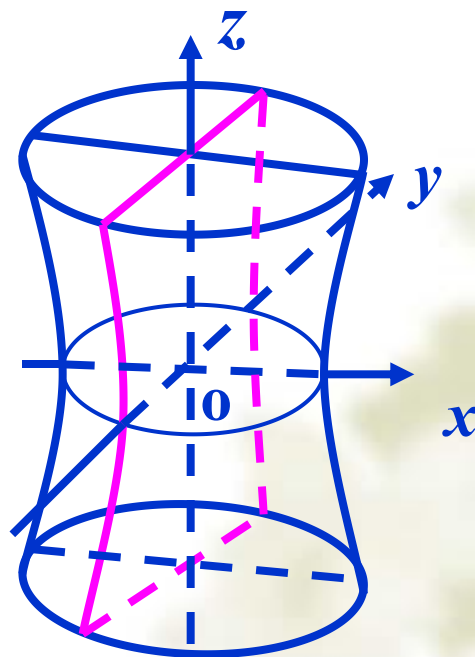
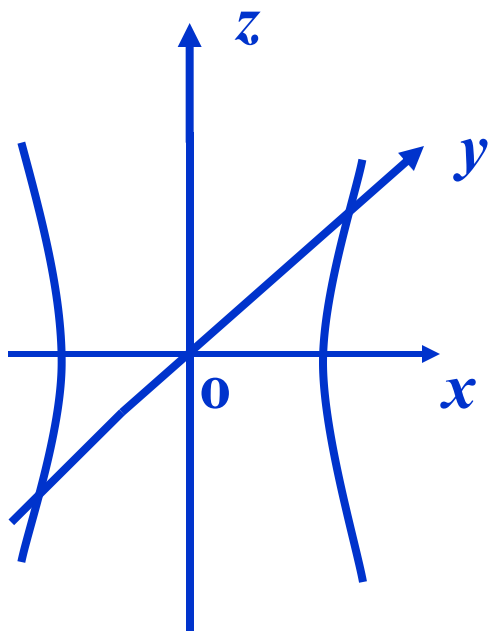


2. xOz 平面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

绕 z 轴旋转

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

旋转单叶双曲面

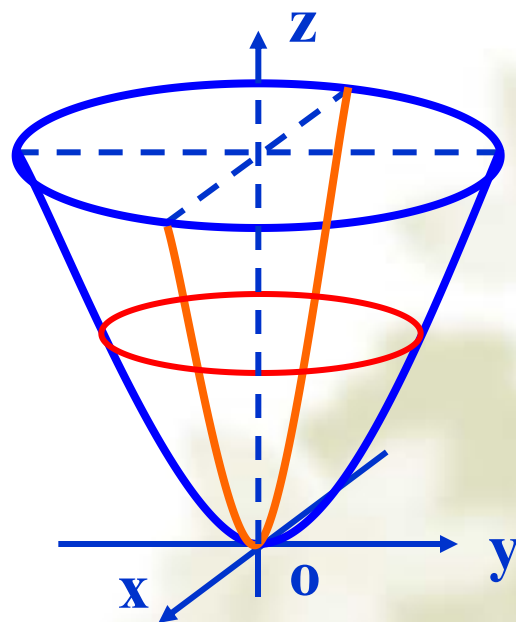
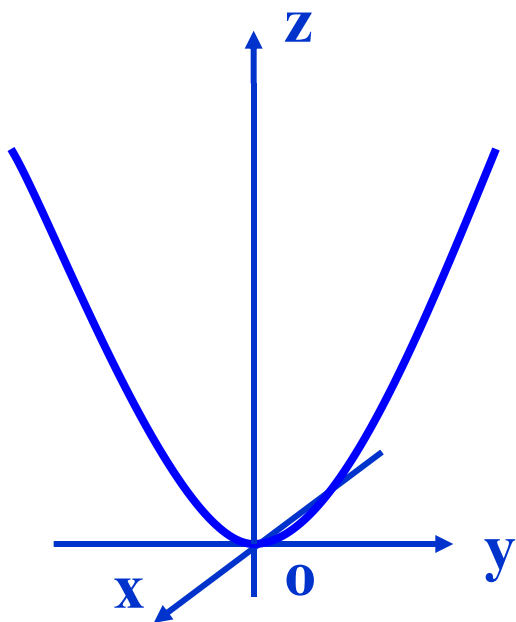


3. yOz 平面上的抛物线 $y^2 = 2pz$

绕Z轴

$$x^2 + y^2 = 2pz$$

旋转抛物面



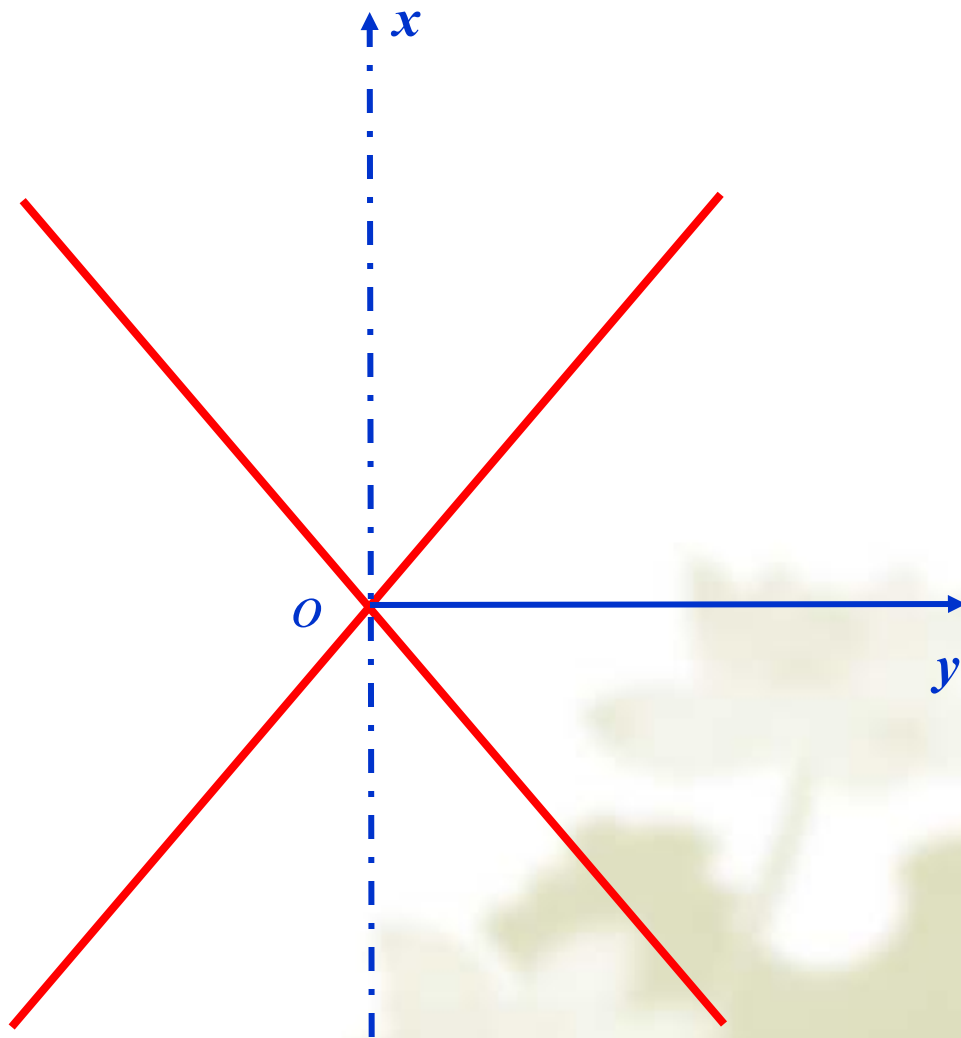
$$p > 0$$

五、两种特殊的旋转曲面

1. xoy平面上 两条相交直线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

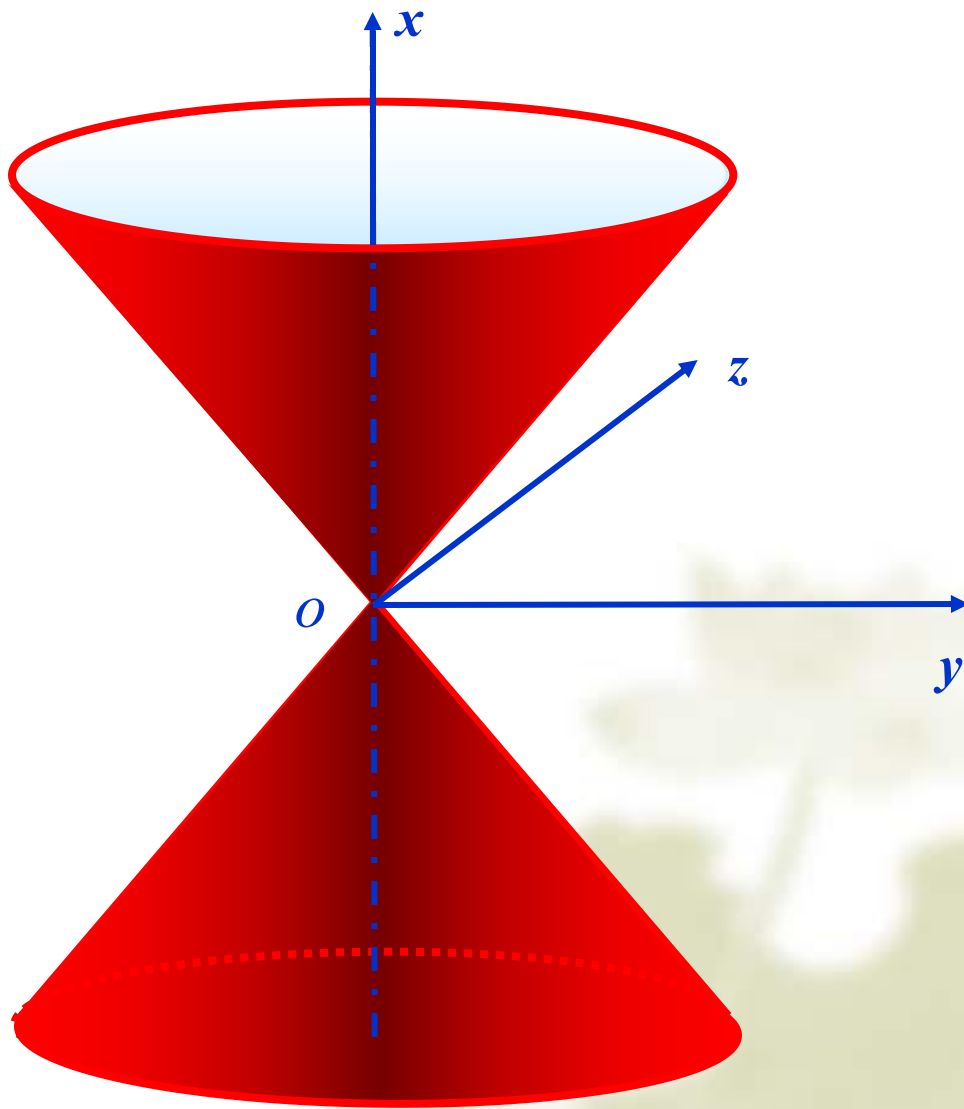
绕 x 轴旋转



两条相交直线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转



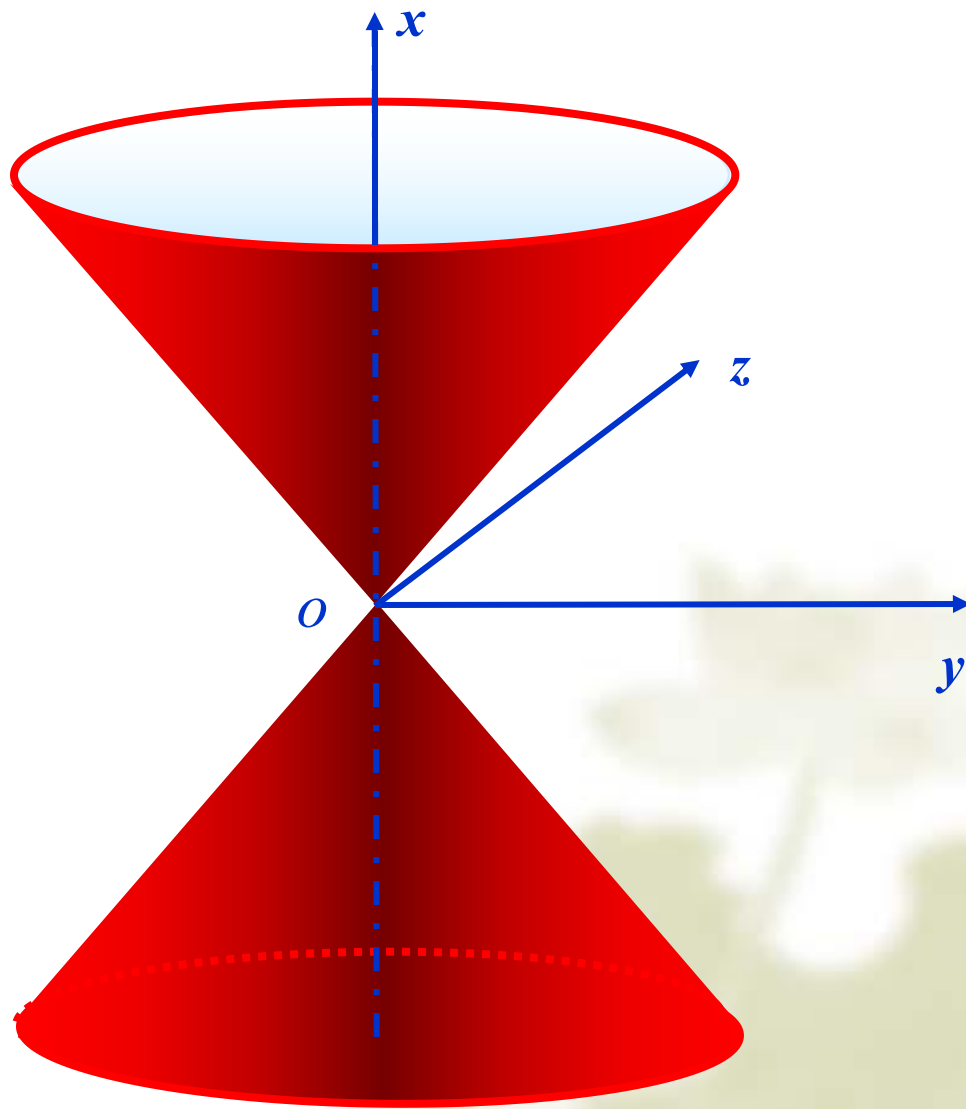
两条相交直线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

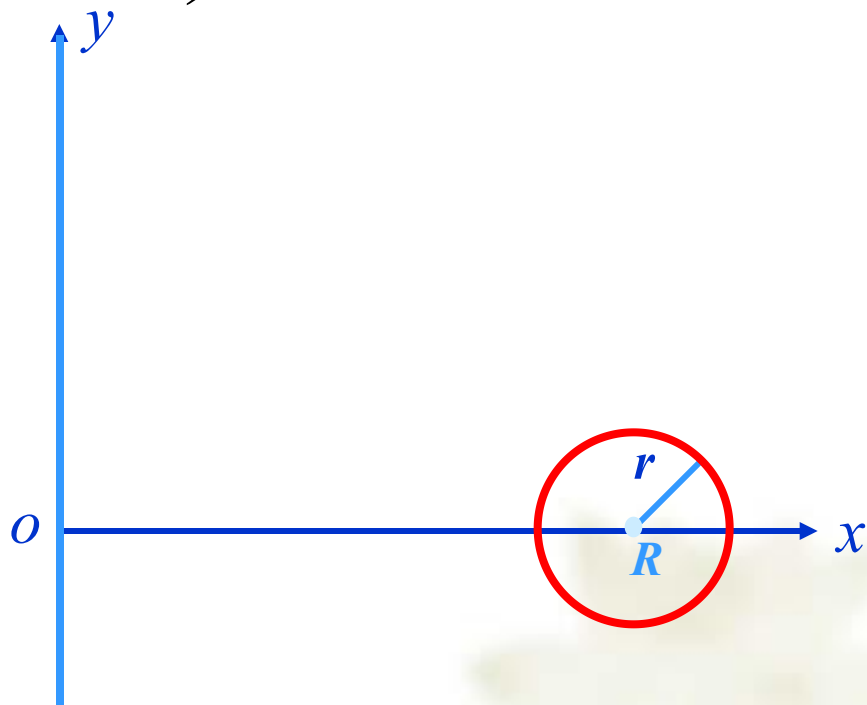
绕 x 轴旋转

得旋转锥面

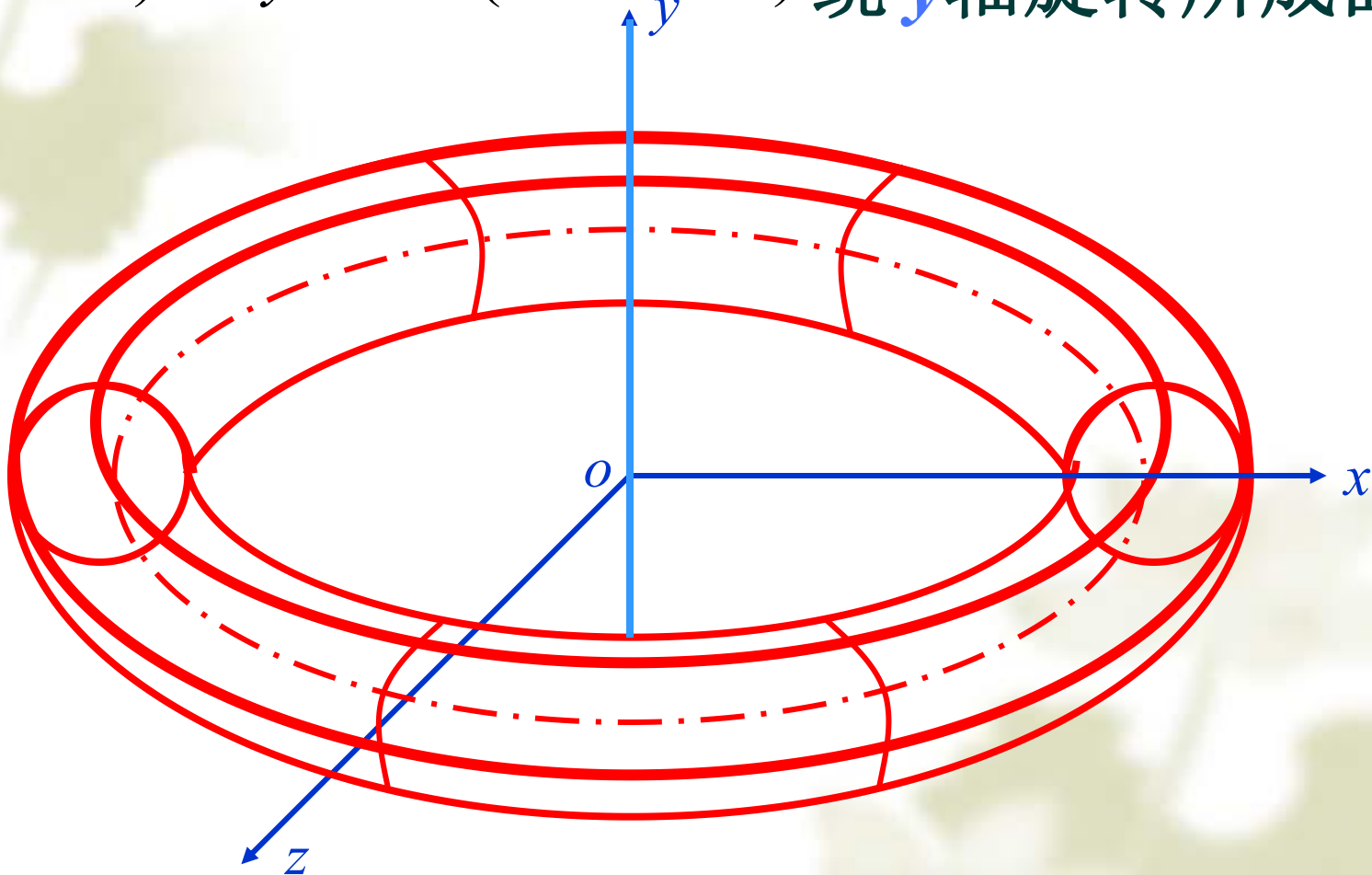
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 0$$



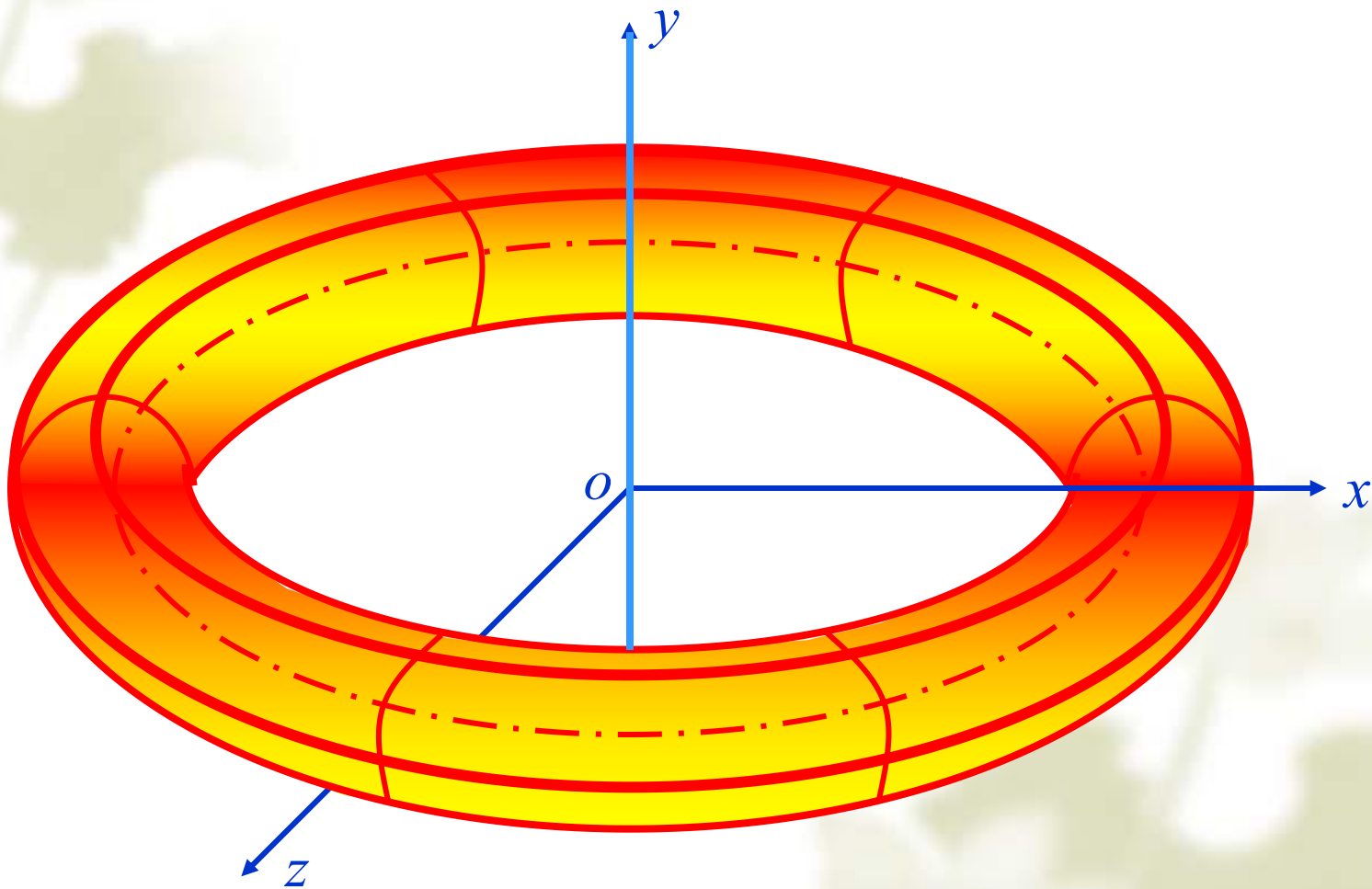
2.圆 $(x-R)^2 + y^2 = r^2$ ($R > r > 0$) 绕 y 轴旋转所成曲面



圆 $(x - R)^2 + y^2 = r^2$ ($R > r > 0$) 绕 y 轴旋转所成曲面



圆 $(x-R)^2 + y^2 = r^2 (R > r > 0)$ 绕 y 轴 旋转所成曲面



环面: $(\pm\sqrt{x^2 + z^2} - R)^2 + y^2 = r^2$

备用题 求曲线 $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转的曲面与平面

$x + y + z = 1$ 的交线在 xoy 平面的投影曲线方程.

解: \because 旋转曲面方程为 $z = x^2 + y^2$, 它与所给平面的

交线为
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

此曲线向 xoy 面的投影柱面方程为

$$x + y + x^2 + y^2 = 1$$

此曲线在 xoy 面上的投影曲线方程为

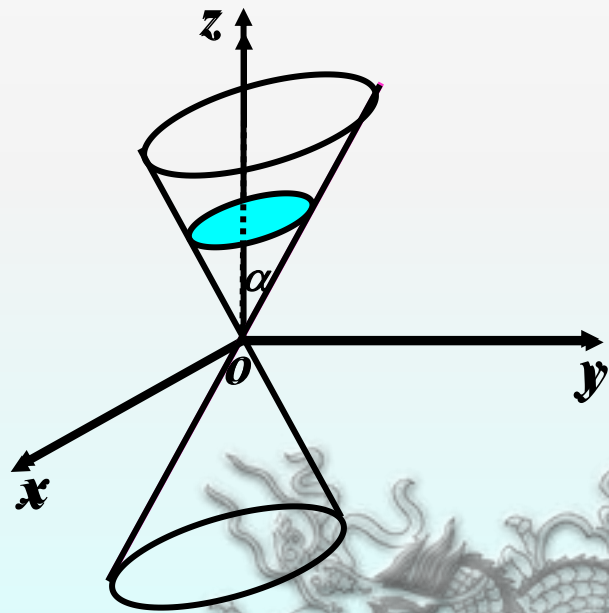
$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

例 2 直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫**圆锥面**。两直线的交点叫圆锥面的**顶点**，两直线的夹角 α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ 叫圆锥面的**半顶角**。试建立顶点在坐标原点，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面方程。

解 $yo z$ 面上直线方程为

$$z = y \cot \alpha$$

圆锥面方程 $z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha$



令 $a = \cot \alpha$ 得 $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$

思考题：

如果母线不在坐标平面上，旋转轴不是坐标轴时，又该如何求旋转曲面的方程？

六、课堂小结

1. 母线在坐标平面上，旋转轴为坐标轴的旋转曲面；
2. 求解旋转曲面方程的规律。