

第四节 最大公因式

主要内容

- 定义
- 最大公因式的求法
- 多项式互素
- 多个多项式的情形

一、定义

如果多项式 $\varphi(x)$ 既是 $f(x)$ 的因式，又是 $g(x)$ 的因式，那么 $\varphi(x)$ 就称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**公因式**。

定义 6 设 $f(x), g(x)$ 是 $P[x]$ 中两个多项式， $P[x]$ 中多项式 $d(x)$ 称为 $f(x), g(x)$ 的一个**最大公因式**，如果它满足下面两个条件：

1) $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的公因式；

2) $f(x), g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式。

- 问**
- 1.任意两个多项式的公因式是否存在？请举例说明。
 2. $f(x)$ 是零多项式与多项式 $f(x)$ 的最大公因式，对吗？
 - 3.若 $d_1(x)$ ， $d_2(x)$ 是多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，则它们之间的关系？

例

在 $P[x]$ 中，设 $f(x)$ 是首一多项式，写出

- ✓ $(2,4)$
- ✓ $(1, f(x))$
- ✓ $(0, f(x))$
- ✓ $(f(x), f(x))$
- ✓ $(f(x), f(x)g(x))$

首一最大公因式记为：
 $(f(x), g(x))$.

两个多项式的最大公因式在可以相差一个非零常数倍的意义下是唯一确定的。

二、最大公因式的求法 **引理** (带余除法与公因式)

如果有等式

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \quad (1)$$

成立, 那么 $f(x), g(x)$ 和 $g(x), r(x)$ 有相同的公因式.

若 $g(x), r(x)$ 有一个最大公因式 $d(x)$, 则 $d(x)$ 也就是 $f(x), g(x)$ 的一个最大公因式.

$$f(x) = q(x) * g(x) + 1 * r(x) \quad (1)$$

证明 如果 $\varphi(x) \mid g(x)$, $\varphi(x) \mid r(x)$, 那么由 (1)
 $\varphi(x) \mid f(x)$. 这就是说, $g(x), r(x)$ 的公因式全是
 $f(x), g(x)$ 的公因式. 反过来, 如果 $\varphi(x) \mid g(x)$,
 $\varphi(x) \mid f(x)$, 那么 $\varphi(x)$ 一定整除它们的组合

$$r(x) = f(x) - q(x) g(x).$$

这就是说, $\varphi(x)$ 是 $g(x), r(x)$ 的公因式.

问：若在 $P[x]z$ 中下列式子成立，

(1) 能否求出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式？

(2) $r_s(x)$ 能否表示成 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的组合？

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x),$$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x),$$

$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x),$$

.....

$$r_{i-1}(x) = q_{i+1}(x)r_i(x) + r_{i+1}(x),$$

.....

$$r_{s-3}(x) = q_{s-1}(x)r_{s-2}(x) + r_{s-1}(x),$$

$$r_{s-2}(x) = q_s(x)r_{s-1}(x) + r_s(x),$$

$$r_{s-1}(x) = q_{s+1}(x)r_s(x).$$



1. 是否任两个多项式都有最大公因式?
2. 如何求两多项式的最大公因式?

定理 2 对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x), g(x)$,
在 $P[x]$ 中**存在**一个**最大公因式** $d(x)$, 且 $d(x)$ 可以表成
 $f(x), g(x)$ 的一个组合, 即有 $P[x]$ 中多项式 $u(x), v(x)$ 使

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x) \quad (2)$$

如果 $f(x), g(x)$ 有一个为零, 譬如说,
 $g(x) = 0$, 那么 $f(x)$ 就是一个最大公因式, 且

$$f(x) = 1 \cdot f(x) + 1 \cdot 0.$$

下面来看一般情形. 不妨设 $g(x) \neq 0$.

按带余除法, 用 $g(x)$ 除 $f(x)$, 得到商 $q_1(x)$, 余式 $r_1(x)$;

若 $r_1(x) \neq 0$, 再用 $r_1(x)$ 除 $g(x)$, 得商 $q_2(x)$, 余式 $r_2(x)$;

若 $r_2(x) \neq 0$, 再用 $r_2(x)$ 除 $r_1(x)$, 得商 $q_3(x)$, 余式 $r_3(x)$;

如此辗转相除下去, 显然, 所得余式的次数不断降低,

$$\partial(g(x)) > \partial(r_1(x)) > \partial(r_2(x)) > \dots$$

因此在有限次之后，必然有余式为零.于是有一串等式：

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x),$$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x),$$

$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x),$$

.....

$$r_{i-1}(x) = q_{i+1}(x)r_i(x) + r_{i+1}(x),$$

$$r_{s-3}(x) = q_{s-1}(x)r_{s-2}(x) + r_{s-1}(x),$$

辗转相除法

$$r_{s-2}(x) = q_s(x)r_{s-1}(x) + r_s(x),$$

$$r_{s-1}(x) = q_{s+1}(x)r_s(x).$$

因此， $r_s(x)$ 就是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，

$$\text{且 } r_s(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

例 设 $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1$, $g(x) = x^3 - 2x + 1$, 求 $(f(x), g(x))$ 和 $u(x), v(x)$, 使 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

解 辗转相除法可按下面的格式来作:

	$g(x)$	$f(x)$	
$q_2(x) = x + 1$	$x^3 + 0x^2 - 2x + 1$ $x^3 - x^2$	$x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1$ $x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x$	$q_1(x) = x - 1$
	$x^2 - 2x + 1$ $x^2 - x$	$-x^3 + x^2 + x - 1$ $-x^3 - 0x^2 + 2x - 1$	
$r_2(x) = -x + 1$		$r_1(x) = \begin{matrix} x^2 - x \\ x^2 - x \\ 0 \end{matrix}$	$q_3(x) = -x$

于是 $f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$

$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$

$r_1(x) = q_2(x)r_2(x)$

由此可得： $r_2(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

$$(f(x), g(x)) = -r_2(x)$$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \quad \rightarrow \quad r_2(x) = g(x) - q_2(x)r_1(x)$$

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) \quad \rightarrow \quad r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x)$$

$$r_2(x) = [-q_2(x)]f(x) + [1 + q_2(x)q_1(x)]g(x)$$

因此，取 $u(x) = q_2(x) = x+1$ $v(x) = -[1 + q_2(x)q_1(x)] = -x^2$

就有 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

已知

$$f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$$

$$g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$$

(1) 求 $(f(x), g(x))$; (2) 求 $u(x), v(x)$ 使 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$

三、多项式互素 1. 定义

定义 7 $P[x]$ 中两个多项式 $f(x), g(x)$ 称为**互素(质)的**,

如果 $(f(x), g(x)) = 1$.

问1. $f(x), g(x)$ **互素**条件?

2. 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 且 $f(x) \mid g(x)h(x)$, 则 $f(x) \mid$ 能否整除 $h(x)$?

3. 若 $f_1(x) \mid g(x)$, $f_2(x) \mid g(x)$ 且 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$, 则 $f_1(x)f_2(x)$ 能否整除 $g(x)$?

2. 互素的條件

定理 3 $P[x]$ 中兩個多項式 $f(x)$, $g(x)$ 互素的

充分必要條件是有 $P[x]$ 中的多項式 $u(x)$, $v(x)$ 使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

3. 互素的性质

定理 4 如果 $(f(x), g(x)) = 1$, 且 $f(x) | g(x)h(x)$,

那么 $f(x) | h(x)$.

推论 如果 $f_1(x) | g(x)$, $f_2(x) | g(x)$ 且 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$,

那么 $f_1(x)f_2(x) | g(x)$.

四、多个多项式的情形

1. 多个多项式的最大公因式

定义8 设 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 是任意 s ($s \geq 2$) 个多项式, $d(x)$ 称为 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 的一个**最大公因式**, 如果 $d(x)$ 具有下面的性质:

1) $d(x) \mid f_i(x), i = 1, 2, \dots, s$;

2) 如果 $\varphi(x) \mid f_i(x), i = 1, 2, \dots, s$, 那么

$\varphi(x) \mid d(x)$.

仍用符号 $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x))$ 来表示

首项系数为 1 的最大公因式. 不难证明, $f_1(x)$,
 $f_2(x), \dots, f_s(x)$ 的最大公因式存在, 而且当 $f_1(x)$,
 $f_2(x), \dots, f_s(x)$ 全不为零时,

$$((f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x)), f_s(x))$$

就是 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 的最大公因式, 即

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x))$$

$$= ((f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x)), f_s(x)).$$

同样, 利用以上这个关系可以证明, 存在多项式

$u_i(x), i = 1, 2, \dots, s$, 使

$$u_1(x)f_1(x) + u_2(x)f_2(x) + \dots + u_s(x)f_s(x)$$

$$= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)).$$

2. 多个多项式互素

定义9 如果 $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)) = 1$, 那么 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ 就称为**互素的**.

同样, 有类似于定理 3 的结论.

小结和作业

- 1.请叙述两个**公因式、最大公因式**的定义？
- 2.如何求两个**最大公因式的求法**？其原理是什么？
- 3.叙述两个多项式的互素的定义以及判断方法和性质.
- 4.作业见学习通.