3.3两平面的相关位置

两平面的相关位置

空间两个平面的相关位置有三种情形：相交、平行和重合，而且当且仅当两平面有一部分公共点时它们相交，当且仅当两平面无公共点时它们相互平行，当且仅当一个平面上的所有点就是另一个平面的点时，这两个平面重合。

如果设两平面的方程为

π$_{1}$: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$　(1)

π2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$　(2)

那么两平面兀$_{1}$与兀$_{2}$是相交还是平行或是重合就决定于由方程（1）与（２）构成的方程组是有解还是无解，或是方程（1）与（２）仅相差一个不为零的数因子。

一、两平面的位置关系

1. 定理　两平面 π1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

π2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

相交的充要条件是　$A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$

平行的充要条件是　$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$

重合的充要条件是　$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$

2. 证明

在直角坐标系下, 平面兀$_1$与兀$_2$的法向量分别为

$\mathbf{n}_1=\{A_1,\ B_1,\ C_1\}$ $\mathbf{n}_2=\{A_2,\ B_2,\ C_2\}$

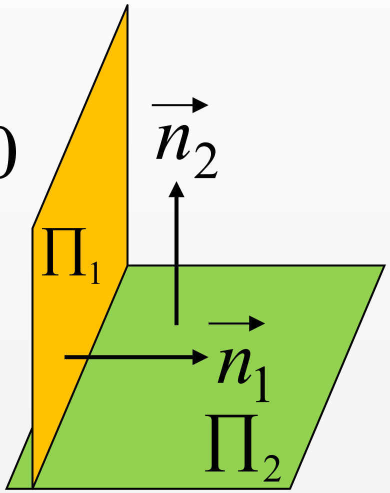
而当且仅当 n_1不平行于 n_2时，兀$_1$与兀$_2$相交；

当且仅当 $n_1 // n_2$时，兀$_1$与兀$_2$平行或是重合，

则有如下结论：

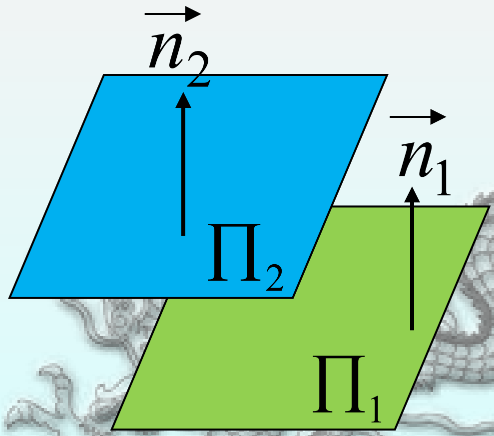
(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$\iff A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$



(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \iff \vec{n}_1 // \vec{n}_2$

$$\iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$



(3) $\Pi_1 = \Pi_2 \iff \vec{n}_1 // \vec{n}_2$

$$\iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

例1　确定以下各组里两平面的位置关系：

(1) $2x-y+z-1=0, \quad -4x+2y-2z-1=0$

(2) $2x-y-z+1=0, \quad -4x+2y+2z-2=0$

解

(1) $\vec{n}_1=\{2,-1,1\}$, $\vec{n}_2=\{-4,2,-2\}$

$$\Rightarrow \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2},$$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in\Pi_1 \quad M(1,1,0)\notin\Pi_2$

两平面平行但不重合.

(2) $$\because \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2},$$ 两平面平行

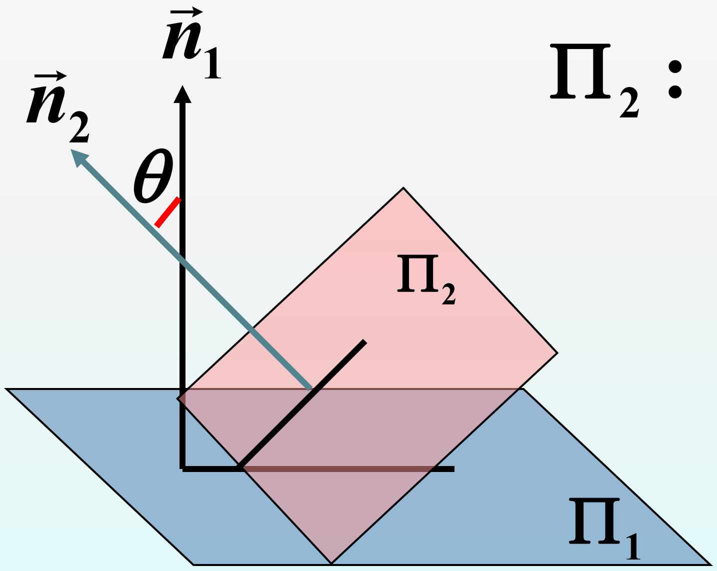
$\because M(1,1,0)\in\Pi_1 \quad M(1,1,0)\in\Pi_2$

$\therefore$ 两平面重合.

二、两平面的夹角

1.定义 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.

$$\Pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$



$$\Pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

$$\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\},$$

$$\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\},$$

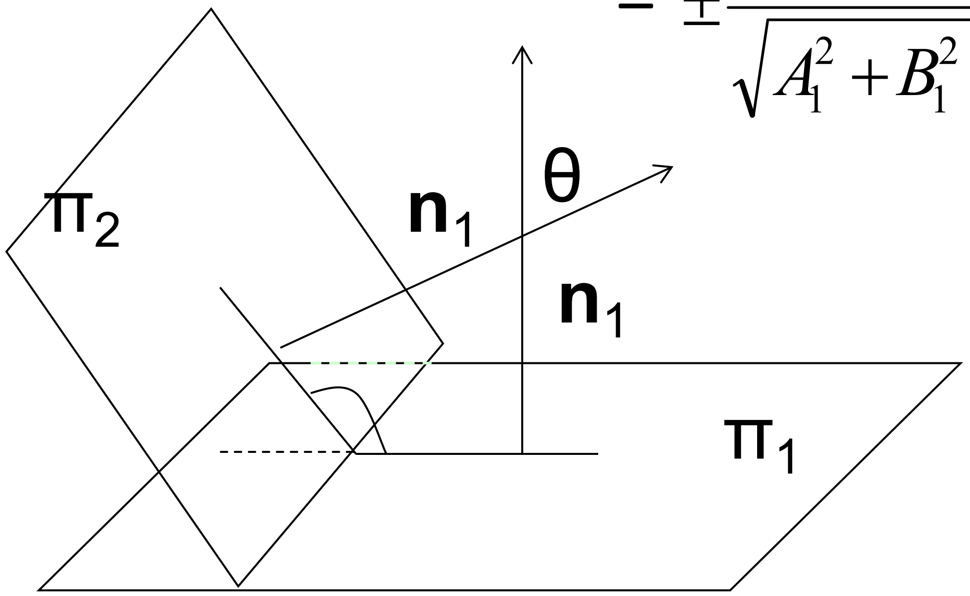
2.证明

设两平面π_1与π_2间的二面角用$\angle(\pi_1, \pi_2)$来表示，而两平面的法矢量n_1与n_2的夹角记为$\theta=\angle(n_1, n_2)$，那么显然（图3－10）

$\angle(\pi_1, \pi_2)=\theta$或$\pi-\theta$，因此得到：

$$\cos\angle(\pi_1,\pi_2) = \pm\frac{\vec{n_1}.\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}$$

$$= \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



例2　求以下两平面的夹角

$$\pi_1: -x+2y-z+1=0,\quad \pi_2: y+3z-1=0$$

解

$$\cos\theta=\pm\frac{-1\times 0+2\times 1-1\times 3}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$\cos\theta=\mp\frac{1}{\sqrt{60}}$$

两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{60}}$，或$\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{60}}$

五、课堂小结

1. 平面与平面平行时,要考虑可能重合的情况;

2. 两平面间的夹角要考虑互补的情况。

思考题：

两平行平面

$\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$ 间的距离

思考题：

结论 两平行平面

$\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$ 间的距离

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$