《解析几何》
—Chapter 2

§2.1 平面曲线的方程

Contents

一、曲线的方程

定义1

当平面上取定了坐标系之后，如果一个方程与一条曲线之间有着关系：

①满足方程的(x,y) 必是曲线上某一点的坐标；

②曲线上任何一点的坐标 (x,y) 满足这个方程，

那么这个方程就叫做这条曲线的方程，这条曲线叫做这个方程的图形。

概括而言，曲线上的点与方程之间有着一一对应的关系

- **例1**　**求圆心在原点，半径为*R*的圆的方程**

- **例2**　**已知两点** $A(-2,-2)$**和** $B(2,2)$**，求满足条件** $\left|\overrightarrow{MA}\right|-\left|\overrightarrow{MB}\right|=4$ **的动点*M*的轨迹方程**

二、曲线参数的方程

定义2

若取 $t\left(a \le t \le b\right)$ 的一切可能取值

①由 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{e_1}+y(t)\vec{e_2}\left(a \le t \le b\right)$ 表示的向径 $\vec{r}(t)$ 的终点总在一条曲线上

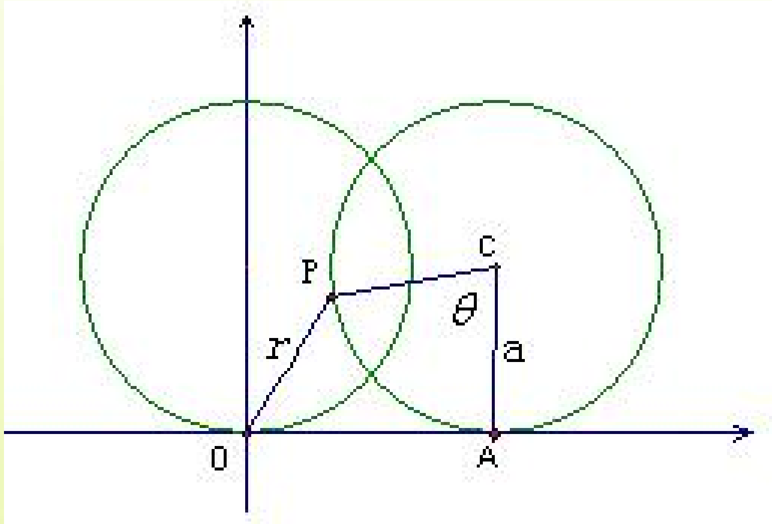
②在这条曲线上的任意点，总对应着以它为终点的向径，而这向径可由 t 的某一值 $t_0\left(a \le t_0 \le b\right)$ 通过 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{e_1}+y(t)\vec{e_2}\left(a \le t \le b\right)$ 完全决定

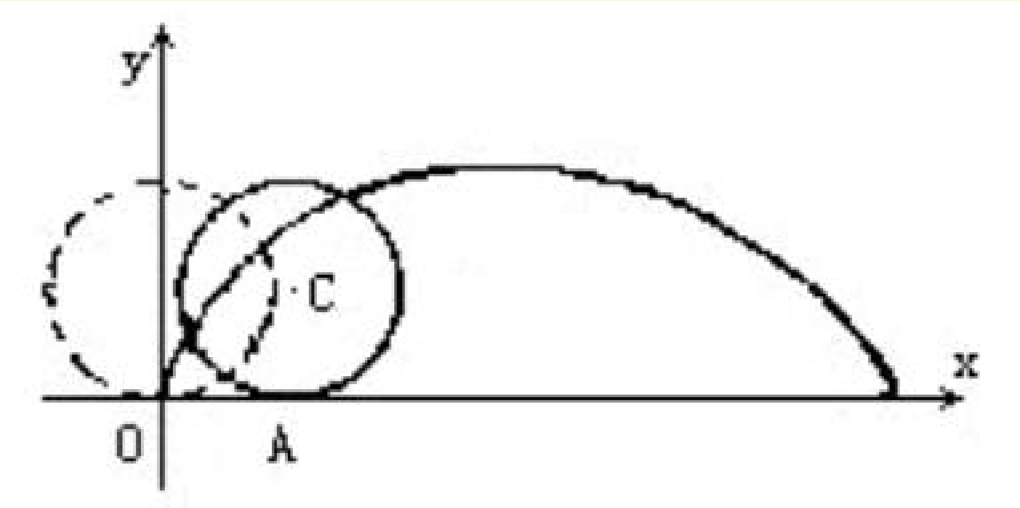
那么就把 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{e_1}+y(t)\vec{e_2}\left(a \le t \le b\right)$ 叫做曲线的向量式参数方程，其中 t 为参数。

其坐标式参数方程为 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},\left(a \le t \le b\right)$

例3　一个圆在一直线上无滑动地滚动，求圆周上一定点的轨迹

该定点的轨迹为旋轮线或摆线（cycloid）

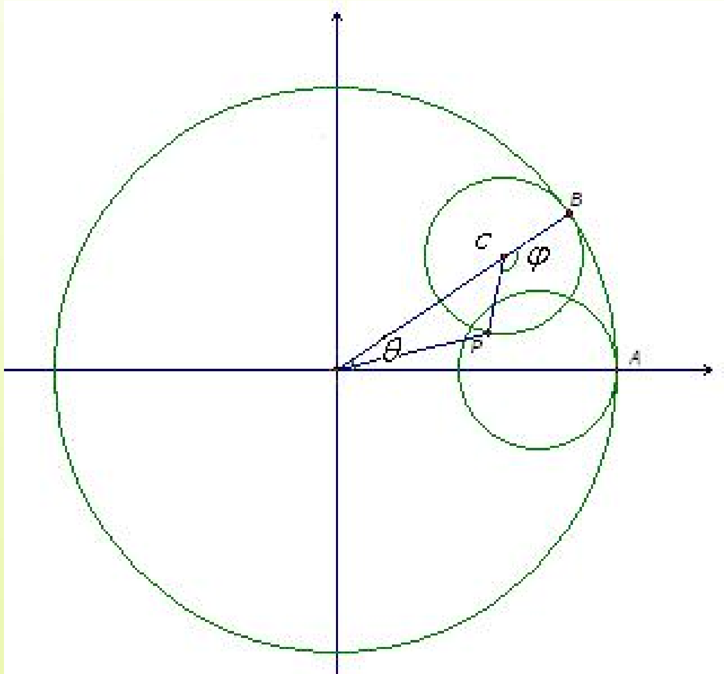


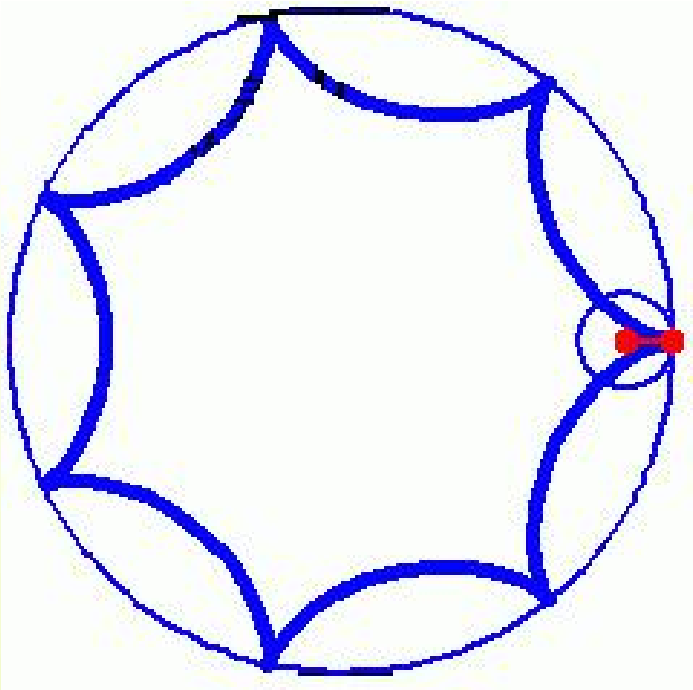


三、常见曲线的参数方程

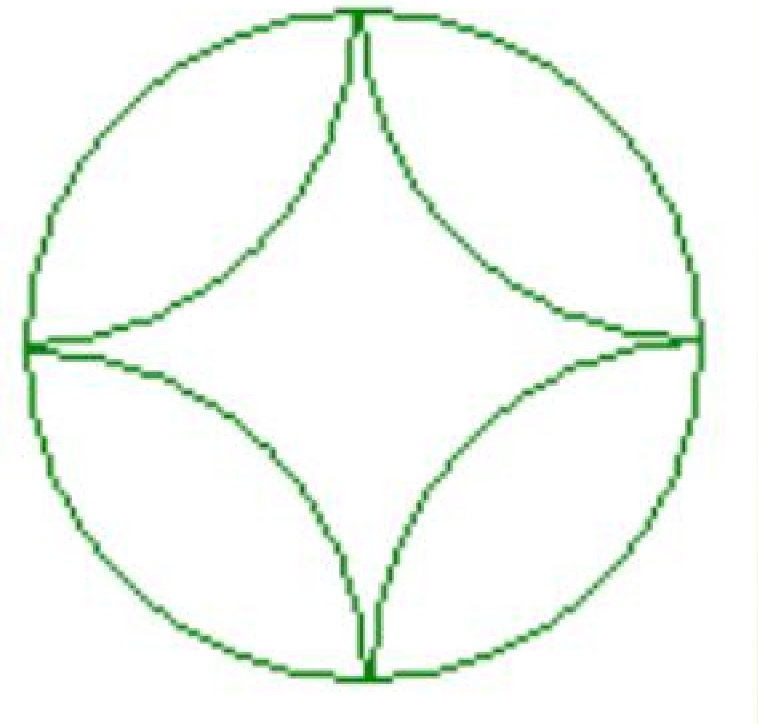
(1)　一个半径为r 的小圆在半径为R 的大圆内无滑动地滚动，小圆周上一定点P 的运动轨迹称为内摆线(*hypocycloid*）

例4　已知大圆半径为a ，小圆半径为b，设大圆不动，而小圆在大圆内无滑动地滚动，求动圆周上某一定点P 的轨迹方程





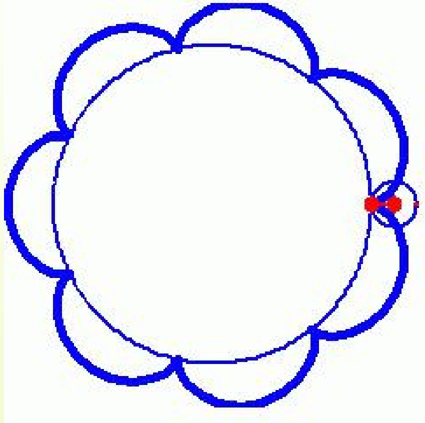
圆的内摆线



（$a=4b$）四尖点星形线（*astroid*）

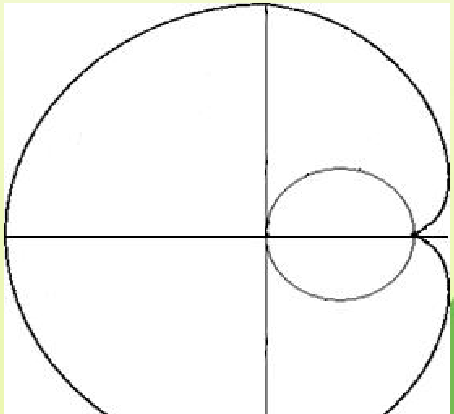
（2）一个半径为r的小圆在半径为R的大圆外无滑动地滚动，小圆周上一个定点P的运动轨迹称为外摆线（*epicycloid*）

其参数方程为
$$\begin{cases} x=(R+r)\cos\theta-r\cos\dfrac{R+r}{r}\theta \\ y=(R+r)\sin\theta-r\sin\dfrac{R+r}{r}\theta \end{cases},(-\infty<\theta<+\infty)$$

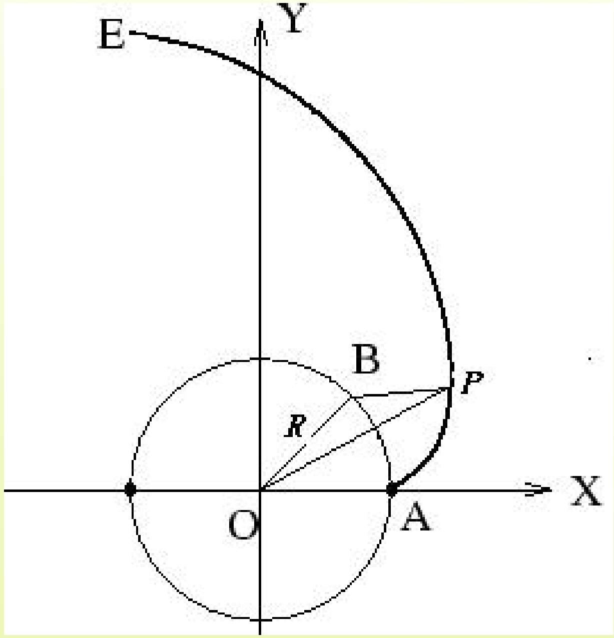


特别当R＝r时可以得到心脏线（*cardioid*）

其参数方程为
$$\begin{cases} x=2R\cos\theta(1-\cos\theta) \\ y=2R\sin\theta(1-\cos\theta) \end{cases}$$



（3）把线绕在一个固定的圆周上，将线头拉紧后向反方向旋转，以把线从圆周上解放出来，使放出来的部分成为圆的切线，则线头的轨迹所形成的曲线叫做圆的渐伸线或切展线（*involute*）



其坐标式参数方程为

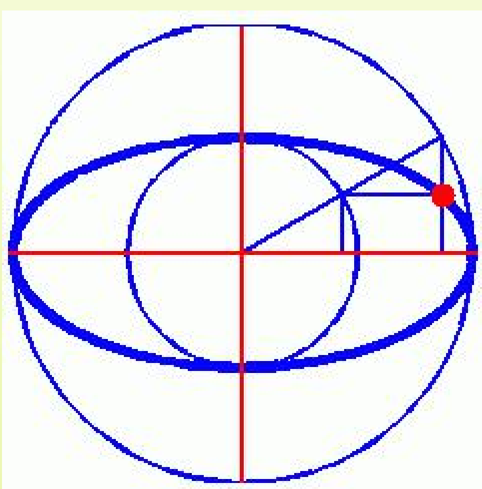
$$\begin{cases} x = R(\cos\theta + \theta\sin\theta) \\ y = R(\sin\theta - \theta\cos\theta) \end{cases}$$

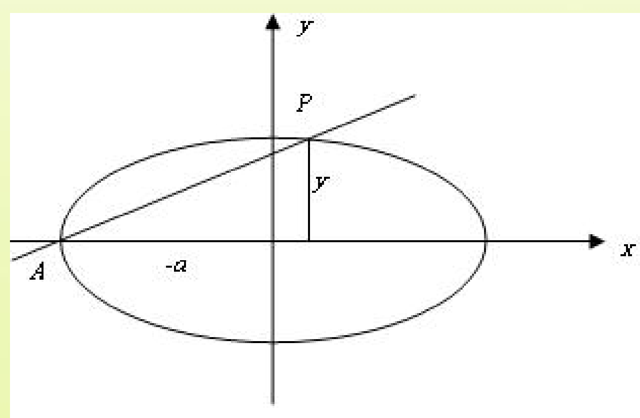
（4）椭圆的参数方程

设椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

第一种参数方程以角度 θ 为参数：$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases},\left(-\pi\le\theta<\pi\right)$

第二种参数方程以斜率 t 为参数：$\begin{cases} x=\dfrac{a\left(b^2-a^2t^2\right)}{b^2+a^2t^2} \\ y=\dfrac{2ab^2t}{b^2+a^2t^2} \end{cases},\left(-\infty<t<+\infty\right)$





- 作业

P_{77} 2 , 3