

## 第四章 柱面、锥面、旋转曲面与二次曲面

### 典型题解

#### 解答题

1. 已知柱面的准线为 
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25, \\ x+y-z+2=0, \end{cases}$$

且 (1) 母线平行于  $x$  轴; (2) 母线平行于直线  $x=y, z=c$ , 试求这些柱面的方程.

解 (1) 因为母线平行于  $x$  轴, 则母线的方向数为  $1, 0, 0$ , 设  $M_1(x_1, y_1, z_1)$

是准线上的点, 那么过  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  的母线为

$$\frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-z_1}{0},$$

且有 
$$(x_1-1)^2 + (y_1+3)^2 + (z_1-2)^2 = 25, \quad \textcircled{1}$$

$$x_1 + y_1 - z_1 + 2 = 0, \quad \textcircled{2}$$

再设 
$$\frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-z_1}{0} = t,$$

那么 
$$x_1 = x-t, y_1 = y, z_1 = z, \quad \textcircled{3}$$

将③代入①, ②得

$$(x-t-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25, \quad \textcircled{4}$$

$$x-t+y-z+2=0, \quad \textcircled{5}$$

由⑤得 
$$t = x+y-z+2,$$

代入④得 
$$(-y+z-3)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25,$$

所以所得柱面方程为

$$2y^2 - 2yz + 2z^2 + 12y - 10z - 3 = 0;$$

(2) 因为直线  $x=y, z=c$  的方向数为  $1, 1, 0$ , 故母线的方向数为  $1, 1, 0$ , 设  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  是准线上的点, 那么过  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  的母线方程为

$$\frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{1} = \frac{z-z_1}{0},$$

且有 
$$(x_1-1)^2 + (y_1+3)^2 + (z_1-2)^2 = 25, \quad \textcircled{1}$$

$$x_1 + y_1 - z_1 + 2 = 0, \quad (2)$$

再设 
$$\frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{1} = \frac{z-z_1}{0} = t,$$

那么 
$$x_1 = x-t, y_1 = y-t, z_1 = z, \quad (3)$$

将 ③代入①, ②得

$$(x-t-1)^2 + (y-t+3)^2 + (z-2)^2 = 25, \quad (4)$$

$$x+y-2t-z+2=0, \quad (5)$$

由⑤得 
$$t = \frac{x+y-z+2}{2},$$

代入④得 
$$\left(\frac{x-y+z-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-x+z+4}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = 25,$$

化简整理得柱面方程为

$$x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 8x + 8y - 26 = 0.$$

2. 设柱面的准线为  $\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z, \end{cases}$  母线垂直于准线所在的平面, 求这柱面的方程.

解 因为准线所在平面的方程为  $x-2z=0$ , 又因为母线垂直于准线所在的平面, 所以母线的方向数为  $\{1, 0, -2\}$

设  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  为准线上的一点, 故过  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  的母线方程为

$$\frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-z_1}{-2},$$

令上式都等于  $t$ , 即  $\frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-z_1}{-2} = t,$

则有 
$$x_1 = x-t, y_1 = y, z_1 = z+2t, \quad (1)$$

因为  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  在准线上, 所以有

$$x_1 = y_1^2 + z_1^2, \quad (2)$$

$$x_1 = 2z_1, \quad (3)$$

把①代入②, ③得

$$x-t = y^2 + (z+2t)^2, \quad \textcircled{4}$$

$$x-t = 2(z+2t), \quad \textcircled{5}$$

由⑤得 
$$t = \frac{x-2z}{5},$$

代入④得 
$$x - \frac{x-2z}{5} = y^2 + (z + 2 \cdot \frac{x-2z}{5})^2,$$

化简整理得柱面方程为

$$4x^2 + 25y^2 + z^2 + 4xz - 20x - 10z = 0.$$

3. 求过三条平行直线  $x=y=z, x+1=y=z-1$  与  $x-1=y+1=z-2$  的圆柱面方程.

解 过直线  $x=y=z$  上的点  $(0, 0, 0)$  且与该直线垂直的平面为  $x+y+z=0$ .

这平面与直线  $x+1=y=z-1, x-1=y+1=z-2$  分别交于点  $(-1, 0, 1), (\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3}),$

容易验证点  $(1, 1, 1)$  与这三点  $(0, 0, 0), (-1, 0, 1), (\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$

不共面, 所以过这四点存在一球面, 设过原点的球面为

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz = 0,$$

将点  $(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$  的坐标代入得

$$D+E+F+3=0,$$

$$-D+F+2=0,$$

$$\frac{1}{3}D - \frac{5}{3}E + \frac{4}{3}F + \frac{14}{3} = 0,$$

从而得 
$$D = \frac{11}{15}, E = \frac{7}{15}, F = -\frac{41}{15},$$

所以得球面得方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{11}{15}x + \frac{7}{15}y - \frac{41}{15}z = 0,$$

所以圆柱面得准线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \frac{11}{15}x + \frac{7}{15}y - \frac{41}{15}z = 0, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

又圆柱面的母线方向为  $1:1:1$ , 在准线上任取一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 那么过  $M_0$  的母线为

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{1},$$

且有

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \frac{11}{15}x_0 + \frac{7}{15}y_0 - \frac{41}{15}z_0 = 0, \quad \textcircled{1}$$

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0, \quad \textcircled{2}$$

令  $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = t$ ,

$$\text{则有 } x_0 = x - t, y_0 = y - t, z_0 = z - t, \quad \textcircled{3}$$

③代入①, ②得

$$(x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 - \frac{11}{15}(x-t) + \frac{7}{15}(y-t) - \frac{41}{15}(z-t) = 0, \quad \textcircled{4}$$

$$(x-t) + (z-t) + (y-t) = 0, \quad \textcircled{5}$$

由⑤得 
$$t = \frac{x+y+z}{3},$$

代入④得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2x-y-z}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y-x-z}{3}\right)^2 + \left(\frac{2z-x-y}{3}\right)^2 - \frac{11}{15} \cdot \frac{2x-y-z}{3} \\ & + \frac{7}{15} \cdot \frac{2y-x-z}{3} - \frac{41}{15} \cdot \frac{2z-x-y}{3} = 0 \end{aligned}$$

化简整理得柱面方程为

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 5xy - 5xz - 5yz + 2x + 11y - 13z = 0.$$

4. 画出下列方程所表示的曲面的图形:

(1)  $4x^2 + 9y^2 = 36$ ;                      (2)  $y^2 - z^2 = 4$ ;

(3)  $x^2 = 4z$ ;                              (4)  $x^2 - 2x + y = 0$ .

解 (1)方程的标准形式为

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

这是以  $xOy$  坐标面里的椭圆为准线, 与  $z$  轴平行的直线作为母线的椭圆柱面

而在  $xOy$  坐标面上的椭圆长轴为 3, 短轴为 2, 所以图形如图 4.4 所示;

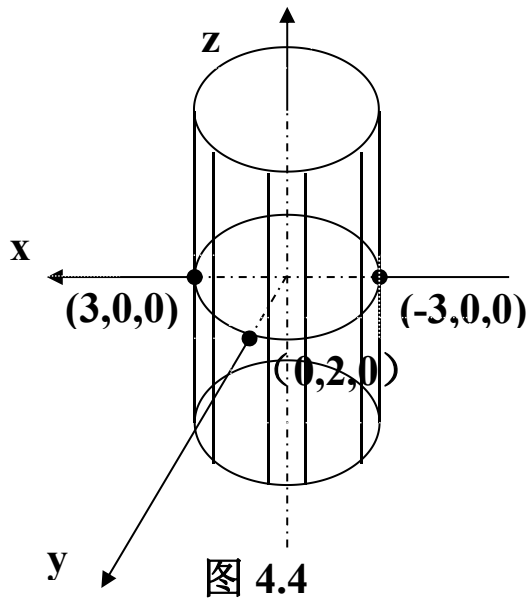


图 4.4

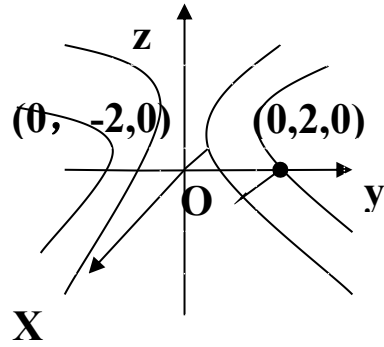


图 4.5

(2) 方程的标准形式为

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$$

所以这是以  $yOz$  里的半轴长都为 2 的双曲线为准线，与  $x$  轴平行的方向作为母线方向的双曲柱面。

图形如图 4.5 所示；

(3) 曲面是以  $xOz$  里的抛物线为准线，与  $y$  轴平行的直线为母线的抛物柱面。图形如图 4.6 所示；

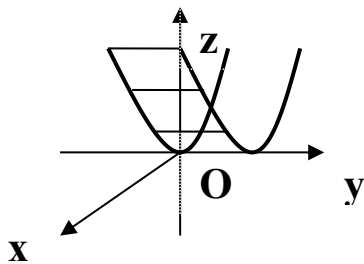


图 4.6

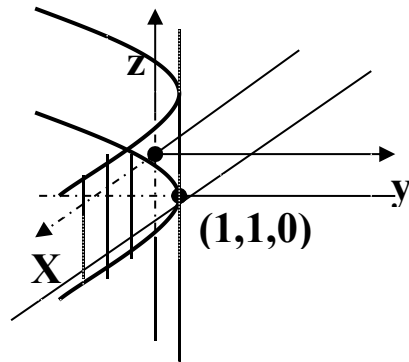


图 4.7

(4) 方程化为  $(x-1)^2 = 1-y$ ,

这是以  $xOy$  平面内顶点为  $(1, 1, 0)$  的抛物线作为准线，以平行于  $z$  轴的直线作为母线的抛物柱面。

$z$  轴在曲面上，图形如图 4.7 所示。

5. 一个半径为  $a$  的球面与一个直径等于球的半径的圆柱面，如果圆柱面通过球心，那么这时球面与圆柱面的交线叫做**维维安尼 (viviani) 曲线**，这条曲线的

方程可以写为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 - ax = 0. \end{cases}$$

试求这曲线对三个坐标面的射影柱面方程和在三坐标面上的射影曲线的方程.

**解** 第一式-第二式得,

$$z^2 + ax = a^2,$$

即

$$z^2 + ax - a^2 = 0.$$

且

$$ax = a^2 - z^2,$$

由第一式得

$$x^2 = a^2 - (y^2 + z^2),$$

所以

$$(ax)^2 = a^2 x^2 = a^2 (a^2 - y^2 - z^2),$$

即

$$(a^2 - z^2)^2 = a^2 (a^2 - y^2 - z^2),$$

整理并化简得

$$z^4 - a^4 z^2 + a^2 y^2 = 0.$$

所以曲线对  $xOy, yOz, xOz$  坐标面的射影柱面方程分别是

$$x^2 + y^2 - ax = 0,$$

$$z^4 - a^4 z^2 + a^2 y^2 = 0,$$

$$z^2 + ax - a^2 = 0.$$

射影曲线分别为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ax = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^4 - a^4 z^2 + a^2 y^2 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 + ax - a^2 = 0. \\ y = 0. \end{cases}$$

6. 已知锥面的顶点为  $(3, -1, -2)$ , 准线为  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ,  $x - y + z = 0$ , 试求它的方程.

**解** 设  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  为准线上的任意点, 那么过  $M_1$  点的母线为

$$\frac{x-3}{x_1-3} = \frac{y+1}{y_1+1} = \frac{z+2}{z_1+2},$$

且有

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 &= 1, & \text{①} \\ x_1 - y_1 + z_1 &= 0, & \text{②} \end{aligned} \right\}$$

令

$$\frac{x-3}{x_1-3} = \frac{y+1}{y_1+1} = \frac{z+2}{z_1+2} = t,$$

则有

$$x_1 = \frac{x-3}{t} + 3, \quad y_1 = \frac{y+1}{t} - 1, \quad z_1 = \frac{z+2}{t} - 2,$$

代入①, ②得

$$\left(\frac{x-3}{t} + 2\right)^2 + \left(\frac{y+1}{t} - 1\right)^2 - \left(\frac{z+2}{t} - 2\right)^2 - 1 = 0,$$

$$\frac{x-3}{t} + 3 - \left(\frac{y+1}{t} - 1\right) + \frac{z+2}{t} - 2 = 0,$$

由④得

$$t = -\frac{x-y+z-2}{2},$$

代入③得

$$\begin{aligned} &\left(x-3-3\frac{x-y+z-2}{2}\right)^2 + \left(y+1+\frac{x-y+z-2}{2}\right)^2 - \\ &(z+2+x-y+z-2)^2 - \left(\frac{x-y+z-2}{2}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

整理并化简得锥面方程为

$$3(x-3)^2 - 5(y+1)^2 + 7(z+2)^2 - 6(x-3)(y+1) + 10(x-3)(z+2) - 2(y+1)(z+2) = 0.$$

7. 求以三坐标轴为母线的圆锥面的方程

解 作单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 交三坐标轴于  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$ ,

$(0, 0, \pm 1)$ , 那么过三点  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  的平面

$$x + y + z = 1$$

与球面的交线圆

$$\Gamma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

可以看作是所求圆锥的准线; 同理过  $(-1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,

$(0, 0, 1)$  的平面  $x - y - z = -1$ , 过  $(-1, 0, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  的平面  $x + y - z = -1$

与过  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  的平面  $x - y + z = 1$  和球面的交线

$$\Gamma_2: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

$$\Gamma_3: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

$$\text{与 } \Gamma_4: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

都可以看作另外三个圆锥面的准线。

现在来求以原点为顶点，准线为  $\Gamma_1$  的圆锥面，在准线上任取一点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ，那么过  $M_1$  的母线方程为

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0},$$

且有

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 0,$$

①

$$x_0 + y_0 + z_0 = 1,$$

②

令

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0} = t,$$

则有

$$x_0 = \frac{x}{t}, \quad y_0 = \frac{y}{t}, \quad z_0 = \frac{z}{t},$$

代入①，②得

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2,$$

③

$$x + y + z = t,$$

④

将④中的  $t$  代入③得

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2,$$

化简得圆锥面方程为

$$xy + yz + zx = 0.$$

同理可求得以原点为顶点， $\Gamma_2$ ， $\Gamma_3$ ， $\Gamma_4$  依次为准线的圆锥面的方程为

$$xy - yz + zx = 0, \quad xy - yz - zx = 0, \quad xy + yz - zx = 0.$$

8. 求顶点为(1,2,4)，轴与平面 $2x+2y+z=0$ 垂直，且经过点(3,2,1)的圆锥面的方程。

解 设 $M(x,y,z)$ 为母线上的任意点，那么这 $M$ 点的母线的方向为

$$v = \{x-1, y-2, z-4\}。$$

而在直角坐标系下，圆锥面的轴线方向即为平面 $2x+2y+z=0$ 的法方向，

即有

$$n = \{2,2,1\}，$$

又因为过点(3,2,1)的母线的方向向量为

$$v_1 = \{2,0,-3\}，$$

从而有

$$\frac{|v \cdot n|}{|v| \cdot |n|} = \frac{v_1 \cdot n}{|v_1| \cdot |n|}，$$

$$\text{即 } \frac{|2(x-1) + 2(y-2) + z-4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2}} = \frac{|4-3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}}，$$

整理并化简得圆锥面的方程为

$$51(x-1)^2 + 51(y-2)^2 + 12(z-4)^2 + 104(x-1)(y-2)$$

$$+ 52(x-1)(z-4) + 52(y-2)(z-4) = 0。$$

9. 将直线 $\frac{x}{\alpha} = \frac{y-\beta}{o} = \frac{z}{1}$ 绕 $z$ 轴旋转，求这旋转曲面的方程，并就 $\alpha$ 和 $\beta$ 可能的值讨论这是什么曲面？

解 旋转轴方程为

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为母线上任一点，则过 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 的纬圆方程为

$$z - z_1 = 0, \tag{①}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \tag{②}$$

且

$$\frac{x_1}{\alpha} = \frac{y_1 - \beta}{o} = \frac{z_1}{1}, \tag{③}$$

由①得

$$z = z_1$$

再由③得  $y_1 = \beta, x_1 = \alpha z,$

代入②得  $x^2 + y^2 + z^2 = (\alpha z)^2 + \beta^2 + z^2,$

即  $x^2 + y^2 - (\alpha z)^2 - \beta^2 = 0$

当  $\alpha < 0, \beta \neq 0$  为椭圆面;

当  $\alpha > 0, \beta \neq 0$  为单页双曲面;

当  $\alpha \neq 0, \beta = 0$  为圆锥面;

当  $\alpha = 0, \beta \neq 0$  为圆柱面;

当  $\alpha = \beta = 0$  时曲面退化为直线即 Z 轴。

10. 已知曲线  $\Gamma$  的参数方程为:  $x = x(u), y = y(u), z = z(u)$ , 将曲线  $\Gamma$  绕 Z 轴旋转, 求曲面的参数方程。

解 设  $(x_0, y_0, z_0)$  为母线上的点, 则  $(x_0, y_0, z_0)$  到 z 轴的距离为  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ , 所以纬圆点参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cos \alpha, \\ y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sin \alpha, \\ z = z_0 \end{cases}$$

所以旋转曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{x(u)^2 + y(u)^2} \cos \alpha, \\ y = \sqrt{x(u)^2 + y(u)^2} \sin \alpha, \\ z = z(u) \end{cases}$$

其中  $u, \alpha$  为参数。

11. 一直线分别交坐标面  $yOz, zOx, xOy$  于三点 A, B, C, 当直线变动时, 直线上的三定点 A, B, C 也分别在三个坐标面上变动, 另外直线上有第四点 P, 它与 A, B, C 三点的距离分别为  $a, b, c$ , 当直线按照这样的规定 (即保持 A, B, C 分别在三个坐标面上) 变动时, 试求 P 点的轨迹。

解 设直线的方向余弦为  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , P 点的坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 则直线方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha, \\ y = y_0 + t \cos \beta, \\ z = z_0 + t \cos \gamma. \end{cases}$$

当  $x = 0$  时,  $x_0 + t \cos \alpha = 0$ , 从而

$$t = -\frac{x_0}{\cos \alpha}.$$

所以 A 坐标为  $\left(0, y_0 - \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} x_0, z_0 - \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} x_0\right)$ , 则依题意有

$$x_0^2 + \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} x_0^2 + \frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2 \alpha} x_0^2 = a^2,$$

即 
$$\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}{\cos^2 \alpha} x_0^2 = a^2,$$

因为 
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

所以 
$$x_0 = \pm a \cos \alpha.$$

同理可得 
$$y_0 = \pm b \cos \beta, z_0 = \pm c \cos \gamma,$$

从而有 
$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 = 1.$$

所以 P 点的轨迹方程为 
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

12. 已知椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . ( $c < a < b$ ), 试求过  $x$  轴并与曲面的交线是圆的平面.

**解** 设所求平面方程为 
$$By + Dz = 0,$$

其中 B, D 不全为零. 如果  $B=0$ , 则平面方程为  $z = 0$ , 故与椭球面的交线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

是一个椭圆, 与条件矛盾! 所以  $B \neq 0$ .

同样可知  $D \neq 0$ , 所以 
$$z = -\frac{B}{D}y.$$

因为过  $x$  轴并与曲面的交线圆可以看成球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

与椭球面的交线，即

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, & \text{①} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. & \text{②} \end{cases}$$

由②式得

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{a^2}{c^2}z^2 = a^2,$$

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 + z^2 + \left(\frac{a^2 - x^2}{c^2}\right)z^2 = a^2,$$

即

$$x^2 + z^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{a^2 - c^2}{c^2}z^2 = a^2, \quad \text{③}$$

将  $z = -\frac{B}{D}y$  代入③得

$$x^2 + z^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{a^2 - c^2}{c^2} \frac{B^2}{D^2}y^2 = a^2.$$

与①比较得

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2 - c^2}{c^2} \frac{B^2}{D^2} = 1,$$

所以

$$\begin{aligned} \left(\frac{B}{D}\right)^2 &= \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \times \frac{c^2}{a^2 - c^2} \\ &= \frac{c^2(b^2 - a^2)}{b^2(a^2 - c^2)} \end{aligned}$$

所以

$$B : D = \pm c\sqrt{b^2 - a^2} : (b\sqrt{a^2 - c^2})$$

所以所求平面方程为

$$c\sqrt{b^2 - a^2}y + b\sqrt{a^2 - c^2}z = 0,$$

与

$$c\sqrt{b^2 - a^2}y - b\sqrt{a^2 - c^2}z = 0.$$

13. 设动点与  $(4, 0, 0)$  的距离等于这点到平面  $x = 1$  的距离的两倍，试求这动点的轨迹。

解：设动点  $M(x, y, z)$ ，所求轨迹为  $\Sigma$ ，则

$$M(x, y, z) \in \Sigma \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2 + z^2} = 2|x-1| \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 4(x-1)^2$$

$$\text{亦即: } -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{12} = 1$$

此为  $\Sigma$  的轨迹方程。

14. 试求单叶双曲面  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{5} = 1$  与平面  $x - 2z + 3 = 0$  的交线对  $xoy$  平面的

射影柱面。

解: 题中所设的交线为:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{5} = 1 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

从此方程中消去  $z$ , 得到:

$$x^2 + 20y^2 - 24x - 116 = 0$$

此即为要求的射影柱面方程。

15. 适当选取坐标系, 求下列轨迹的方程:

(1) 到一定点和一定平面距离之比为定常数的点的轨迹;

(2) 与两给定的异面直线等距离的点的轨迹, 已知两异面直线间的距离为  $2a$ , 夹角为  $2\alpha$ 。

解: (1) 选取以给定平面为  $xoy$  面, 过定点且垂直于  $xoy$  面的直线作为  $z$  轴, 则定点的坐标设为  $(0, 0, h)$ , 常数为  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), 所求的点为  $M(x, y, z)$ , 则依提意得

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}}{|z|} = \lambda,$$

$$\text{即} \quad x^2 + y^2 + (z-h)^2 = \lambda^2 z^2,$$

$$\text{即} \quad x^2 + y^2 + (1-\lambda^2)z^2 - 2hz + h^2 = 0.$$

$h \neq 0$  时, 轨迹方程可改为

$$(i) \quad x^2 + y^2 + (1-\lambda^2)\left(z - \frac{h}{1-\lambda^2}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} h^2.$$

当  $\lambda^2 < 1$  即  $\lambda < 1$  时, 表示椭球面;

当  $\lambda > 1$  时, 为双叶旋转双曲面;

当  $\lambda = 1$  时, 为旋转抛物面

(ii) 当  $h=0$  时, 轨迹方程为

$$x^2+y^2+(1-\lambda^2)z^2=0$$

当  $\lambda < 1$  时, 为原点;

当  $\lambda > 1$  时, 为圆锥面;

当  $\lambda = 1$  时, 为  $z$  轴

(2) 取两异面直线的公垂线为  $z$  轴, 公垂线的中点为原点,  $x$  轴与两异面直角成等角, 设两异面直线为  $l, m$ , 则有

$$l: \begin{cases} x = t_1 \cos a \\ y = t_1 \sin a \\ z = a \end{cases} \quad m: \begin{cases} x = t_2 \cos a \\ y = -t_2 \sin a \\ z = -a \end{cases}$$

直线  $l, m$  的标准方程分别为

$$\frac{x}{\cos a} = \frac{y}{\sin a} = \frac{z-a}{0},$$

$$\frac{x}{\cos a} = \frac{y}{-\sin a} = \frac{z+a}{0}.$$

设  $M(x, y, z)$  到  $l, m$  的距离相等, 则

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y & z-a \\ \sin a & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z-a & x \\ 0 & \cos a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ \cos a & \sin a \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(\cos a)^2 + (\sin a)^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y & z+a \\ -\sin a & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z+a & x \\ 0 & \cos a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ \cos a & -\sin a \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(\cos a)^2 + (\sin a)^2}}$$

则有  $(z-a)^2 + (x \sin a - y \cos a)^2 = (z+a)^2 + (x \sin a + y \cos a)^2$ ,

即  $a z + x y \sin a \cos a = 0$

16. 画出下列方程所代表的图形

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1 \quad (2) z = x y;$$

解 (1) 该曲面显然以  $(0, 0, 1)$  为顶点, 以坐标面  $xOz$  与  $yOz$  为对称面, 对称轴为  $z$  轴,

但  $z \leq 1$ , 对称面与曲面的交线为主截线, 他们的方程依次为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} = 1 - z \\ y = 0 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} \frac{y^2}{9} = 1 - z \\ x = 0 \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

曲面被平行于  $xOy$  面的一族平行面  $z=t$  ( $t < 1$ ) 截得的一族曲线为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4(1-t)} + \frac{y^2}{9(1-t)} = 1, \\ z = t \end{cases}$$

这是一族椭圆, 其中任一椭圆的两对顶点  $(\pm 2\sqrt{1-t}, 0, t)$  与  $(0, \pm 3\sqrt{1-t}, t)$  的坐标分别满足方程①与②, 所以两对顶点分别在主截线即抛物线①与②上, 从而曲面的图形如图 4.14 所示.

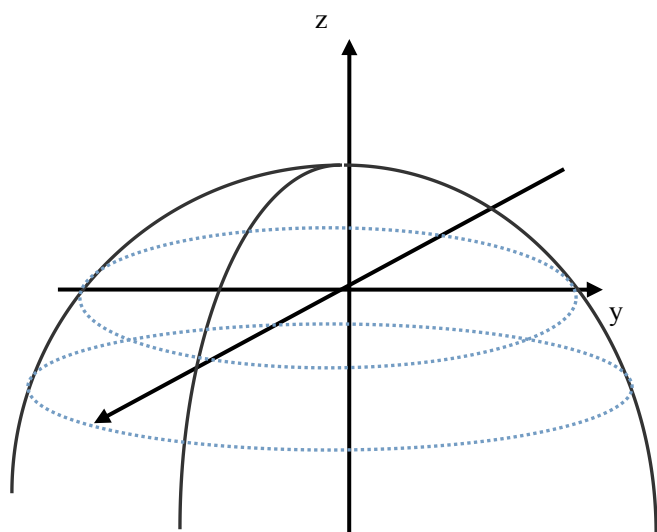


图 4.14

(2) 二次方程  $z=xy$  不是二次曲面的标准方程, 应稍做变换, 将  $x$  轴与  $y$  轴在  $xOy$  坐标面里一起绕  $O$  点旋转  $\frac{\pi}{4}$ , 这样新坐标系  $O-x'y'z'$  的关系为

$$\begin{cases} x = x' \cos \frac{\pi}{4} - y' \sin \frac{\pi}{4} \\ y = x' \sin \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{\pi}{4} \\ z = z' \end{cases}$$

代入方程  $z = x^2 - y^2$  就得到曲面在新坐标系  $O-x'y'z'$  下的方程为  $z' = \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}$ ,

这是一个双曲抛物面.

从方程知, 面  $x'Oz'$  面与  $y'Oz'$  面为双曲抛物面的对称面, 因此它的主截线为

$$\begin{cases} y'^2 = -2z' \\ x' = 0 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} x'^2 = 2z' \\ y' = 0 \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

用  $x'Oy'$  平面来截得到的是两条直线

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \quad \text{所以有} \quad \begin{cases} x' \pm y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \quad \textcircled{3}$$

它们恰是原坐标系的  $x$  轴与  $y$  轴.

用平行于  $x'Oy'$  面的一族平行面  $z' = h$  来截曲面, 得到的是一族双曲线

$$\begin{cases} \frac{x'^2}{2h} - \frac{y'^2}{2h} = 1 \\ z' = h \end{cases} \quad \textcircled{4}$$

当  $h > 0$  时, 双曲线④的实轴平行于  $x'$  轴, 虚轴平行于  $y'$  轴, 顶点  $(\pm\sqrt{2h}, 0, h)$  的坐标满足②, 所以顶点在主截线即抛物线②上; 当  $h < 0$  时, 双曲线③的实轴平行于  $y'$  轴, 虚轴平行于  $x'$  轴, 顶点  $(0, \pm\sqrt{2h}, h)$  在主截线即抛物线①上.

如果用平行于  $y'Oz'$  面的平面来截曲面, 得到的是一族抛物线

$$\begin{cases} y'^2 = -2(z' - \frac{t^2}{2}) \\ x' = t \end{cases} \quad \textcircled{5}$$

抛物线⑤的顶点为  $(t, 0, \frac{t^2}{2})$ , 显然它在抛物线②上, 抛物线⑤还与主抛物线①

的焦参数相等, 所以是全等, 而且开口方向也相同.

这样我们就能推想出曲面的大致形状, 并把截线①, ②画出, 再画出双曲线④与抛物线⑤ (或一部分), 曲面图形也可描写了. 如图 4.15 所示.

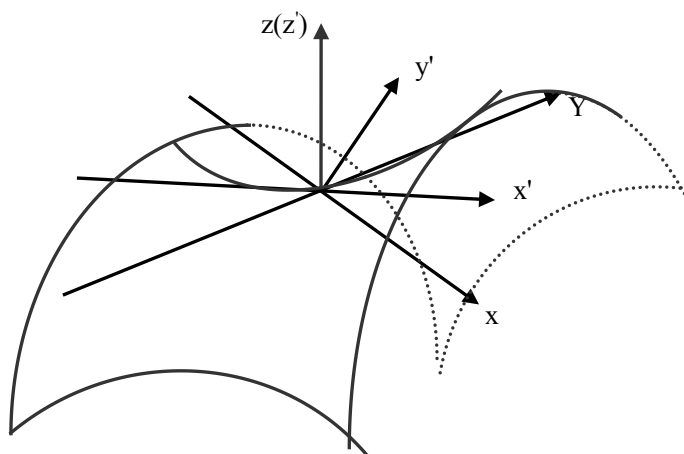


图 4.15

17. 画出下列各组曲面所围成的立体的图形:

(1)  $y=0, z=0, 3x+y=6, 3x+2y=12, x+y+z=6$ ;

(2)  $x^2 + y^2 = z$ , 三坐标平面,  $x+y=1$ ;

(3)  $x = \sqrt{y-z^2}, \frac{1}{2}\sqrt{y} = x, y = 1$ ;

解 (1)  $y=0$  即  $xOy$  坐标面,  $z=0$  即  $xOy$  坐标面, 分别画出平面  $3x+y=6, 3x+2y=12,$  平面  $x+y+z=6$  与平面  $3x+y=6$  的交线为

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

$$\text{即 } \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z}{2}$$

而平面  $x+y+z=6$  与平面  $3x+2y=12$  的交线为

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

为  $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-3}{1}$ , 平面  $3x+y=6$  与平面  $3x+2y=12$  的交线为

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 6. \end{cases}$$

而平面  $3x+y=6, 3x+2y=12, x+y+z=6$  与坐标面  $xOy$  的交线分别为

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 6 \\ z = 0 \end{cases}$$

与坐标面  $xOy$  的交线

$$l_1: \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \quad l_3: \begin{cases} x+z=6 \\ z=0 \end{cases}$$

而直线 $l_1$ 与 $l_3$ 的交点为 $(2, 0, 4)$ ，而直线 $l_2$ 与 $l_3$ 的交点为 $(4, 0, 2)$ ，从而图形为如图 4.17 中阴影的一块。

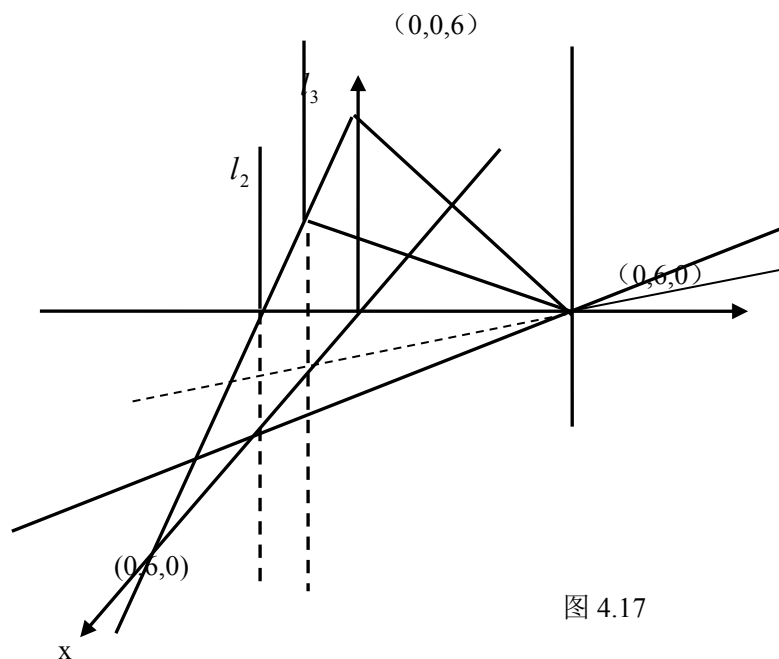


图 4.17

(2) 曲面与三坐标的交线分别为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{即 } (0, 0, 0),$$

$$\begin{cases} x^2 = z \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y^2 = z \\ x = 0 \end{cases}$$

而曲面 $x^2 + y^2 = z$ 与平面 $x+y=1$ 的交线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 2xy = z \\ x + y = 1 \end{cases}$$

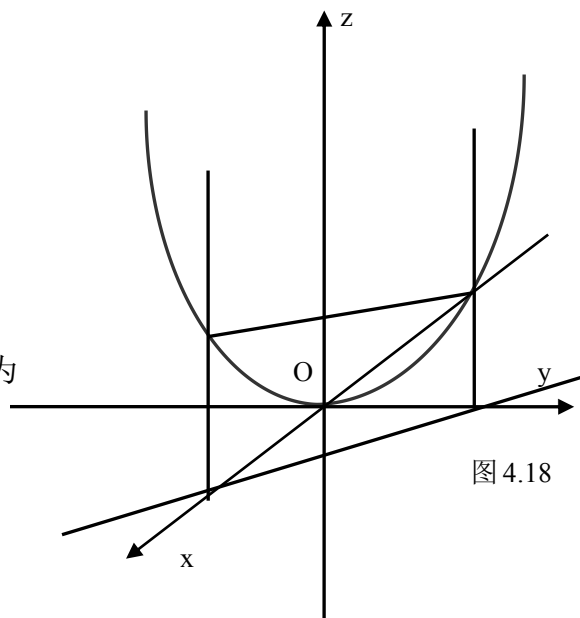


图 4.18

从而可知图形的形状如图 4.18 所示.

(3) 这是由椭圆抛物面  $x^2 + z^2 = y$  的  $x \geq 0$  的部分, 即半个椭圆抛物面与  $x^2 = \frac{1}{4}y$  的  $x \geq 0$  部分, 即半个抛物柱面, 以及平面  $y=1$  围成的区域, 它的简图如图 4.19 所示.

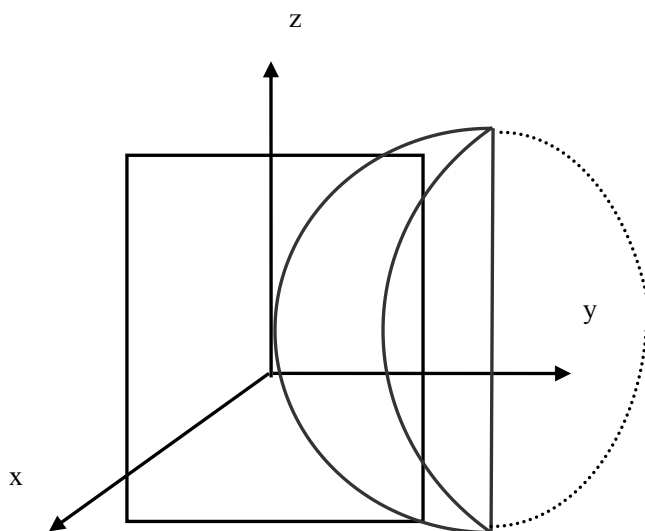


图 4.19

18. 求直线族  $\begin{cases} x + 2\lambda y + 4z = 4\lambda, \\ \lambda x - 2y - 4\lambda z = 4, \end{cases}$  所成的曲面 (式中的  $\lambda$  为参数).

解 当  $\lambda = 0$  时, 原方程变为

$$\begin{cases} x + 4z = 0, \\ y + 2 = 0 \end{cases}$$

当  $\lambda \neq 0$  时, 由第二式可知

$$\lambda = \frac{4 + 2y}{x - 4z},$$

带入第一式中得

$$x + 2y \cdot \frac{4 + 2y}{x - 4z} + 4z = 4 \frac{4 + 2y}{x - 4z},$$

整理并简化得

$$x^2 + 4y^2 - 16z^2 - 16 = 0,$$

容易验证直线

$$\begin{cases} x + 4y = 0, \\ y + 2 = 0 \end{cases}$$

在上述曲面中, 从而可知生成的曲面为

$$x^2 + 4y^2 - 16z^2 - 16 = 0$$

19. 在双曲抛物面  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$  上求平行于平面  $3x + 2y - 4z = 0$  的直母线.

解 方程  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$  可以转化为

$$\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) = z,$$

所以他的直母线为

$$\begin{cases} w\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) = u, \\ u\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) = wz \end{cases} \quad (w \neq 0)$$

与

$$\begin{cases} t\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right) = v, \\ t\left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) = tz \end{cases} \quad (t \neq 0)$$

而两族直母线的方向分别为

$$\begin{aligned} X_1 : Y_1 : Z_1 &= \begin{vmatrix} -\frac{w}{2} & 0 \\ \frac{u}{2} & -w \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & \frac{w}{4} \\ -w & \frac{u}{4} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{w}{4} & -\frac{w}{2} \\ \frac{u}{4} & \frac{u}{2} \end{vmatrix} \\ &= 2 : 1 : \frac{uw}{w^2} = 2 : 1 : \frac{u}{w}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 : Y_2 : Z_2 &= \begin{vmatrix} \frac{t}{2} & 0 \\ -\frac{v}{2} & -t \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & \frac{t}{4} \\ -t & \frac{v}{4} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{t}{4} & \frac{t}{2} \\ \frac{v}{4} & -\frac{v}{2} \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{t^2}{2}\right) : \frac{t^2}{4} : \left(-\frac{tv}{4}\right) \\ &= 2 : (-1) : \frac{tv}{t^2} = 2 : (-1) : \frac{tv}{t^2} = 2 : (-1) : \frac{v}{t}, \end{aligned}$$

因为两直母线要平行于平面  $3x + 2y - 4z = 0$  如果是第一种情况, 则有

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{u}{w} = 0$$

得

$$u : w = 2 : 1;$$

如果第二种情况, 则有

$$3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{v}{t} = 0,$$

得

$$v : t = 1$$

所以所求直母线方程为

$$\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 2, \\ \frac{x}{2} + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1, \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} - z = 0. \end{cases}$$

20. 求与直线  $\frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$  与  $\frac{x}{3} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+4}{-2}$  相交, 而且与平面  $2x+3y-5$  平行的直线的轨迹.

解 将直线方程化为参数式

$$l_1: \begin{cases} x = 6 + 3t_1, \\ y = 2t_2, \\ z = 1 + t_1 \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x = 3t_1, \\ y = 8 + 2t_2, \\ z = -4 - 2t_2 \end{cases}$$

要么点  $M_1M_2$  就是与两直线  $l_1, l_2$  都相交的直线, 它的方向向量为  $\overline{M_1M_2}$ , 因此直线  $M_1M_2$  的方向为

$$X:Y:Z = [3(t_2 - t_1) - 6] : [(2(t_2 - t_1) + 8)] : (-2t_2 - t_1 - 5),$$

直线  $M_1M_2$  的方程 (即直母线的方程) 为

$$\frac{x - (6 + 3t_1)}{3(t_2 - t_1) - 6} = \frac{y - 2t_1}{2(t_2 - t_1) + 8} = \frac{z - (1 + t_1)}{-2t_2 - t_1 - 5}, \quad \textcircled{1}$$

因为它平行于已知平面, 所以有

$$2[3(t_2 - t_1) - 6] + 3[2(t_2 - t_1) + 8] = 0$$

$$\text{化简得} \quad t_2 - t_1 + 1 = 0 \quad \textcircled{2}$$

由①, ②中三个式子消去参数  $t_1, t_2$  得所求的轨迹方程为

$$4x^2 - 9y^2 = 144z$$

$$\text{即} \quad \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 2z$$

这是一个双曲椭圆抛物面。

21. 求与下列三条直线

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = z \end{cases}, \begin{cases} x = -1, \\ y = -z \end{cases} \quad \text{与} \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{5}$$

都共面的直线所构成的曲面。

解 直线  $\begin{cases} x=1 \\ y=-z \end{cases}$  的标准方程为

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

直线  $\begin{cases} x=-1 \\ y=-z \end{cases}$  的标准方程为

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z},$$

根据两直线相交的充要条件有

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & 1 & 1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_0+1 & y_0 & z_0 \\ 0 & -1 & 1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_0-2 & y_0+1 & z_0+2 \\ -3 & 4 & 5 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (Z-Y)(x_0-1) + Xy_0 - Xz_0 = 0 \\ -(Y+Z)(x_0+1) + Xy_0 + Xz_0 = 0 \\ (4Z-Y)(x_0-2) + (5X+3Z)(y_0+1) - (3Y+4X)(z_0+2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y_0-z_0)X - (x_0-1)Y + (x_0-1)Z = 0 & \text{①} \\ (y_0+z_0)X - (x_0+1)Y - (x_0-1)Z = 0 & \text{②} \\ (5y_0-4z_0-3)X - (5x_0+3z_0-4)Y + (4x_0+3y_0-5)Z = 0 & \text{③} \end{cases}$$

由 ①, ② 得

$$\begin{aligned} X:Y:Z &= \begin{vmatrix} -(x_0-1) & x_0-1 \\ -(x_0+1) & -(x_0+1) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_0-1 & y_0-z_0 \\ -(x_0+1) & y_0+z_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_0-z_0 & -(x_0-1) \\ -(x_0+1) & -(x_0+1) \end{vmatrix} \\ &= 2(x_0^2-1) : 2(x_0y_0-z_0) : 2(x_0z_0-y_0) \\ &= (x_0-1) : (x_0y_0-z_0) : (x_0z_0-y_0), \end{aligned}$$

代入③式得

$$(5y_0-4z_0-3)(x_0^2-1) - (5x_0+3y_0-4)(x_0y_0-z_0) + (4x_0+3y_0-5)(x_0z_0-y_0),$$

整理并化简得 
$$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$$

因为 $(x_0, y_0, z_0)$ 是所求直线的任意点, 从而所求曲面的方程为

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

注 因为 $X, Y, Z$ 不全为零, 曲面①, ②, ③构成的方程组有非零解 $(X, Y, Z)$ , 所以有

$$\begin{vmatrix} y_0 - z_0 & -(x_0 - 1) & x_0 - 1 \\ y_0 + z_0 & -(x_0 + 1) & -(x_0 + 1) \\ 5y_0 - 4z_0 - 3 & -(5x_0 + 3z_0 - 4) & 4x_0 + 3y_0 - 5 \end{vmatrix} = 0,$$

展开并化简可得

$$x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1.$$

22. 试求单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上互相垂直的两直母线交点的轨迹方程.

解 两相交直母线必异族, 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的两直母线为

$$u \text{ 族: } \begin{cases} w\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = u\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = w\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

$$v \text{ 族: } \begin{cases} t\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = v\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = t\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

所以两相交直母线的交点坐标为

$$x = \frac{a(uv + wt)}{vw + ut}, \quad y = \frac{b(vw - ut)}{vw + ut}, \quad z = \frac{c(uv - wt)}{vw + ut} \quad \text{①}$$

两族直母线的方向向量分别为

$$S_u = \{a(u^2 - w^2), 2buw, c(u^2 + w^2)\},$$

$$S_v = \{a(v^2 - t^2), -2bvt, c(v^2 + t^2)\}$$

因为 $S_u \perp S_v$ , 所以有 $S_u \cdot S_v = 0$ , 即

$$a^2(u^2 - w^2)(v^2 - t^2) - 4b^2uvwt + c^2(u^2 + w^2)(v^2 + t^2) = 0,$$

从而得

$$\frac{a^2(uv + wt)^2}{(vw + ut)^2} + \frac{b^2(vw - ut)^2}{(vw + ut)^2} + \frac{c^2(uv - wt)^2}{(vw + ut)^2} = a^2 + b^2 + c^2,$$

将①代入得交点坐标满足

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$

所以所求的轨迹方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases}$$

23. 已知空间两异面直线间的距离为  $2a$ , 夹角为  $2\theta$ , 过这两直线分别作平面, 并使这两平面互相垂直, 求这样的两平面交线的轨迹.

解 取两异面直线  $l, m$  的公垂线为  $z$  轴, 公垂线的中点为原点,  $x$  与两异面直线成等角, 那么有

$$l: \begin{cases} x = t_1 \cos \theta, \\ y = t_1 \sin \theta, \\ z = a \end{cases}, \quad m: \begin{cases} x = t_2 \cos \theta, \\ y = -t_2 \sin \theta, \\ z = -a \end{cases}$$

即

$$l: \begin{cases} \frac{x}{\cos \theta} - \frac{y}{\sin \theta} = 0, \\ z - a = 0 \end{cases}, \quad m: \begin{cases} \frac{x}{\cos \theta} + \frac{y}{\sin \theta} = 0, \\ z + a = 0 \end{cases}$$

所以过直线  $l$  的平面方程为

$$\alpha_1 \left( \frac{x}{\cos \theta} - \frac{y}{\sin \theta} \right) + \beta_1 (z - a) = 0.$$

过直线  $l$  的平面方程为

$$\alpha_2 \left( \frac{x}{\cos \theta} + \frac{y}{\sin \theta} \right) + \beta_2 (z + a) = 0.$$

因为两平面垂直, 且两平面的法向量分别为

$$n_1 = \left\{ \frac{\alpha_1}{\cos \theta}, -\frac{\alpha_1}{\sin \theta}, \beta_1 \right\}, n_2 = \left\{ \frac{\alpha_2}{\cos \theta}, \frac{\alpha_2}{\sin \theta}, \beta_2 \right\},$$

所以有  $n_1 \cdot n_2 = 0$ , 即

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\cos^2\theta} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{\sin^2\theta} + \beta_1\beta_2 = 0, \quad (1)$$

即

$$\alpha_1\alpha_2 = -\beta_1\beta_2 \left( \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta} \right) \quad (2\theta \neq \frac{\pi}{2}), \quad (1)'$$

而两平面的交线为

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{\cos\theta}x - \frac{\alpha_1}{\sin\theta}y + \beta_1z - \beta_1a = 0, \\ \frac{\alpha_2}{\cos\theta}x + \frac{\alpha_2}{\sin\theta}y + \beta_2z + \beta_2a = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{\cos\theta}x - \frac{\alpha_1}{\sin\theta}y + \beta_1z - \beta_1a = 0, \\ \alpha_1\alpha_2 \left( \frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} \right) = \beta_1\beta_2 (z^2 - a^2) \end{cases} \quad (2)$$

将①'代入②中的第二式得

$$\left( \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta} \right) \left( \frac{x^2}{\sin^2\theta} - \frac{y^2}{\cos^2\theta} \right) = z^2 - a^2, \quad (3)$$

所以任一满足条件的两平面的交线都落在曲面③上,从而生成的轨迹方程为

$$\left( \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta} \right) \left( \frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} \right) = z^2 - a^2.$$

当  $2\theta \neq \frac{\pi}{2}$  时, 轨迹为单叶双曲面;

当  $2\theta = \frac{\pi}{2}$  时, 由①知  $\beta_1\beta_2 = 0$ , 所以  $\beta_1 = 0$  或  $\beta_2 = 0$ .

$\beta_1 = 0$  时, 轨迹方程为

$$x - y = 0,$$

$\beta_2 = 0$  时, 轨迹方程为

$$x + y = 0,$$

所以  $2\theta = \frac{\pi}{2}$  时, 轨迹为两相交平面.

24. 已知圆柱面的轴为  $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-2}$ , 点  $(1, -2, 1)$  在此圆柱面上, 求这个圆柱面的方程.

解: 因为圆柱面的母线平行于轴, 所以母线的方向数即为轴的方向数  $1, -2, -2$ . 因为空间的圆, 总可以看成是某一球面与一平面的交线, 这里的圆柱面的准线圆, 可以看成是以轴上的点  $(0, 1, -1)$  为球心, 点  $(0, 1, -1)$  到已知点  $(1, -2, 1)$  的距离  $d = \sqrt{14}$  为半径的球面

$$x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 14,$$

过已知点  $(1, -2, 1)$  且垂直于轴的平面

$$x - 2y - 2z - 3 = 0$$

的交线, 即准线圆的方程为

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 14, \\ x - 2y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

再设  $(x_1, y_1, z_1)$  为准线圆 (1) 上的点, 那么过  $(x_1, y_1, z_1)$  的母线为

$$\frac{x - x_1}{1} = \frac{y - y_1}{-2} = \frac{z - z_1}{-2}$$

且有

$$x_1^2 + (y_1 - 1)^2 + (z_1 + 1)^2 = 14,$$

$$x_1 - 2y_1 - 2z_1 - 3 = 0$$

由以上四式消去参数  $x_1, y_1, z_1$  即得所求的圆柱面的方程

$$8x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 4xz - 8yz - 18y + 18z - 99 = 0$$

25. 试求通过三条平行直线

$$l_1: \frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1},$$

$$l_2: \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

$$l_3: \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

的圆柱面方程.

解：过直线  $l_3$  上的点  $(1, 1, 1)$  且垂直于  $l_3$  的平面为

$$(y-1)+(z-1)=0,$$

即  $y+z-2=0,$

过平面交直线  $l_1$  于点  $(0, 2, 0)$ , 交直线  $l_2$  于点  $(0, 0, 2)$ , 容易验证坐标原点与这三点  $(1, 1, 1)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 0, 2)$  不共面, 所以过这四点存在一球面, 设过原点的球面为

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz = 0,$$

将点  $(1, 1, 1)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 0, 2)$  的坐标代入得

$$D+E+F+3=0,$$

$$2E+4=0,$$

$$2F+4=0,$$

从而得  $D=1, E=F=-2$ .

因此球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y - 2z = 0,$$

所以圆柱面的准线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y - 2z = 0, \\ y+z-2=0 \end{cases}$$

又圆柱面的母线方向为  $0:1:1$ , 在准线上任取一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 那么过  $M_0$

的母线为

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{1},$$

且有

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + x_0 - 2y_0 - 2z_0 = 0, \\ y_0 + z_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

由上四式消去参数  $x_0, y_0, z_0$  得所求柱面的方程为

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2x - 4 = 0.$$

26. 求与两个球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \text{ 与 } x^2 + (y-8)^2 + z^2 = 1$$

都相切的圆锥面方程.

解 两个球面的球心分别为  $O_1(0, 0, 0)$ ,  $O_2(0, 8, 0)$ , 而两球面的半径分别

为  $R=4$ ，如，显然两个球面是相离的，因为  $|O_1O_2| > R+r$ 。因此与他们相切的锥面应该有两个，即两个球可在锥面的同一腔内，也可在锥面的不同的两个腔内的两种情况，在第一种情况下，锥面顶点  $S_1$  外分线段  $O_1O_2$ ，定比为  $\lambda = -R : r = -4$ ；

第二种情况下，锥面的顶点  $S_2$  是内分线段  $O_1O_2$ ，定比  $\lambda = R : r = 4$ 。

设圆锥面顶点  $S$  的坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ ，那么

$$x_0 = z_0 = 0,$$

$$y_0 = \frac{-4 \times 8}{1-4} = \frac{32}{3},$$

所以  $S_1$  的坐标为  $(0, \frac{32}{3}, 0)$ 。

同样可求得  $S_2$  的坐标为  $(0, \frac{32}{3}, 0)$ 。

设圆锥面  $S_1$  的半顶角为  $\theta_1$ ，那么显然有

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{\left(\frac{32}{3}\right)^2 - 4^2}}{\frac{32}{3}} = \frac{\sqrt{55}}{8},$$

所以圆锥面  $S_1$  的方程为

$$\frac{\left| \left\{ x, y - \frac{32}{3}, z \right\} \cdot \{0, 1, 0\} \right|}{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{32}{3}\right)^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{55}}{8},$$

化简得  $55x^2 - 9\left(y - \frac{32}{3}\right)^2 + 55z^2 = 0$ 。

再设圆锥面  $S_2$  的半顶角为  $\theta_2$ ，那么有

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{\left(\frac{32}{5}\right)^2 - 4^2}}{\frac{32}{5}} = \frac{\sqrt{39}}{8},$$

所以圆锥面  $S_2$  的方程为

$$\frac{\left| \left\{ x, y - \frac{32}{5}, z \right\} \cdot \{0, 1, 0\} \right|}{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{32}{5}\right)^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{39}}{8},$$

化简得 
$$39x^2 - 25\left(y - \frac{32}{5}\right)^2 + 39z^2 = 0$$

27. 在直角坐标系下, 求关于三坐标面对称, 且通过两曲线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1 \\ z = 4 \end{cases} \text{ 与 } \begin{cases} \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{48} = 1 \\ z = -6; \end{cases} \text{ 的二次曲面的方程.}$$

解 曲面与三坐标面都对称, 那么它的方程中只含平方项与常数项, 因此可设所求的二次曲面为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0,$$

它与平面  $z=4$  与  $z=-6$  分别交于

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 16a_{33} + a_{44} = 0, \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 36a_{33} + a_{44} = 0, \\ z = -6 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{x^2}{-\frac{16a_{33} + a_{44}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{-\frac{16a_{33} + a_{44}}{a_{22}}} = 1 \\ z = 4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{-\frac{36a_{33} + a_{44}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{-\frac{36a_{33} + a_{44}}{a_{22}}} = 1 \\ z = -6 \end{cases},$$

将它们分别与曲线

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1 \\ z = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{48} = 1 \\ z = -6; \end{cases}$$

比较得

$$\begin{aligned} -\frac{16a_{33} + a_{44}}{a_{11}} = 9, & \quad -\frac{16a_{33} + a_{44}}{a_{22}} = 18, \\ -\frac{36a_{33} + a_{44}}{a_{11}} = 24, & \quad -\frac{36a_{33} + a_{44}}{a_{22}} = 48, \end{aligned}$$

由上解得  $a_{11} : a_{22} : a_{33} : a_{44} = 4 : 2 : (-3) : 12$ ,

因此所求的二次曲面方程为

$$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 12 = 0,$$

即

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{4} = -1,$$

这是一个双叶双曲面.

**证明题**

1. 已知柱面的准线为  $r(u) = \{x(u), y(u), z(u)\}$ , 母线的方向平行于向量  $s = \{X, Y, Z\}$ , 试证明柱面的向量式参数方程与坐标式参数方程分别为

$$r = r(u) + vs,$$

与 
$$\begin{cases} x = x(u) + Xv, \\ y = y(u) + Yv, \\ z = z(u) + Zv \end{cases}$$

式中  $u, v$  为参数.

**证明** 如图 4.3 所示, 设  $M(x, y, z)$  为柱面上一点, 则在准线上定存在点  $M_0(x(u), y(u), z(u))$ , 使得

$$\overrightarrow{M_0M} // S,$$

$$\text{设 } r = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\},$$

$$\overrightarrow{OM_0} = r(u)$$

其中  $u, v$  为参数.

所以存在  $v$ , 使得

$$\overrightarrow{M_0M} = vs,$$

即 
$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = vs,$$

所以 
$$r = r(u) + vs.$$

从而坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x = x(u) + Xv \\ y = y(u) + Yv \\ z = z(u) + Zv \end{cases}$$

其中  $u, v$  为参数.

2. 证明下列方程表示的曲面是柱面:

(1)  $(x - z)^2 + (y + z - a)^2 = a^2;$

(2)  $(x + y)(y + z) = x + 2y + z;$

(3)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 1 = 0.$

**证明** (1) 把原方程改写为

$$(x - z)^2 = a^2 - (y + z - a)^2,$$

或

$$(x-z)^2 = (y+z)(2a-y-z),$$

从而有

$$\begin{cases} x-z = \lambda(y+z), \\ \lambda(x-z) = 2a-y-z \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x-\lambda y-(1-\lambda)z = 0, \\ \lambda x+y+(1-\lambda)z-2a = 0 \end{cases}$$

这是一族直线，如果消去参数  $\lambda$  就得原方程，所以原方程表示的曲面由这族直线所生成的，而这族直线的方向为

$$\begin{aligned} X:Y:Z &= \begin{vmatrix} -\lambda & -(1+\lambda) \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -(1+\lambda) & 1 \\ 1-\lambda & \lambda \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda^2+1) : [-(\lambda^2+1)] : (\lambda^2+1) \\ &= 1 : (-1) : 1, \end{aligned}$$

所以这是一族平行直线，因此由它所生成的曲面是一个柱面，或者确切地说，这是一个准线为

$$\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = a^2, \\ z = 0, \end{cases}$$

母线方向为  $1 : (-1) : 1$  的柱面；

(2) 把原方程改写为

$$(x+y)(y+z) = (x+y) + (y+z),$$

或

$$(x+y)(y+z-1) = y+z,$$

那么有

$$\begin{cases} x+y = \lambda(y+z), \\ \lambda(y+z-1) = 1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x+(1-\lambda)y-\lambda z = 0, \\ \lambda y+\lambda z-(\lambda+1) = 0, \end{cases}$$

这是一族直线，消去参数  $\lambda$  就得原方程，这族直线的方向为

$$\begin{aligned} X:Y:Z &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda : (-\lambda) : \lambda = 1 : (-1) : 1, \end{aligned}$$

所以这是一族平行直线族，由它生成的曲面是柱面，因此原方程是一个母线方向为  $1 : (-1) : 1$  的柱面；

(3) 证法一 因为方程可改写为

$$(x+z)^2 = 1-y^2,$$

或  $(x+z)^2 = (1+y)(1-y)$  ,

从而有 
$$\begin{cases} x+z = \lambda(1+y), \\ \lambda(x+z) = 1-y \end{cases}$$

即 
$$\begin{cases} x - \lambda y + z - \lambda = 0, \\ \lambda x + y + \lambda z - 1 = 0 \end{cases}$$

这是一族直线，消去参数  $\lambda$  就得原方程，这族直线的方向为

$$\begin{aligned} X:Y:Z &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda^2 + 1) : 0 : (\lambda^2 + 1) \\ &= -1 : 0 : 1 \end{aligned}$$

因此这是一族平行直线族，因此由它生成的曲面是一个柱面，这是一个准线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

母线方向为  $-1:0:1$  的柱面.

### 3.证明曲面

$$F\left(\frac{x}{l} - \frac{y}{m}, \frac{y}{m} - \frac{z}{n}, \frac{z}{n} - \frac{x}{l}\right) = 0$$

是一个柱面，它的母线平行于直线

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}.$$

证法一 取  $xoy$  坐标面与曲面的交线

$$\begin{cases} F\left(\frac{x}{l} - \frac{y}{m}, \frac{y}{m} - \frac{z}{n}, \frac{z}{n} - \frac{x}{l}\right) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

即 
$$\begin{cases} F\left(\frac{x}{l} - \frac{y}{m}, \frac{y}{m}, -\frac{x}{l}\right) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

为柱面的准线，母线方向为  $l:m:n$  建立柱面方程，为此在准线上任取一点  $M_1(x_1, y_1, 0)$ , 那么过  $M_1$  的母线为

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z}{n}, \tag{1}$$

且有 
$$F\left(\frac{x_1}{l} - \frac{y_1}{m}, \frac{y_1}{m}, -\frac{x_1}{l}\right) = 0, \tag{2}$$

由①得 
$$x_1 = x - \frac{l}{n}z, \quad y_1 = y - \frac{m}{n}z,$$

代入②得 
$$F\left(\frac{x - \frac{l}{n}z}{l} - \frac{y - \frac{m}{n}z}{m}, \frac{y - \frac{m}{n}z}{m}, -\frac{x - \frac{l}{n}z}{l}\right) = 0,$$

即 
$$F\left(\frac{x}{l} - \frac{y}{m}, \frac{y}{m} - \frac{z}{n}, \frac{z}{n} - \frac{x}{l}\right) = 0,$$

这就是原方程，所以原方程是一个母线平行于直线  $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$  的柱面。

4. 已知锥面的准线为  $r(u) = \{x(u), y(u), z(u)\}$ ，顶点 A 决定的向径为  $r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ ，试证明锥面的向量式参数方程与坐标式参数方程为

$$r = vr(u) + (1-v)r_0,$$

与 
$$\begin{cases} x = vx(u) + (1-v)x_0, \\ y = vy(u) + (1-v)y_0, \\ z = vz(u) + (1-v)z_0, \end{cases}$$

式中的  $u, v$  为参数。

解  $p(x, y, z)$  为锥面上任意一点， $r = \overline{op} = \{x, y, z\}$ ，则  $p$  点一定落在某条母线上，设母线为准线上的点  $M(x(u), y(u), z(u))$  与 A 的连线，从而

$$r - r_0 // [r(u) - r_0]$$

设  $r - r_0 = t[r(u) - r_0],$

即  $(1+t)r = r_0 + tr(u),$

所以  $r = \frac{1}{1+t}r_0 + \frac{t}{1+t}r(u), (t \neq -1)$

令  $\frac{t}{1+t} = v, \frac{1}{1+t} = 1-v,$

所也  $r = (1-v)r_0 + vr(u)$

从而锥面的坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x = vx(u) + (1-v)x_0 \\ y = vy(u) + (1-v)y_0 \\ z = vz(u) + (1-v)z_0 \end{cases}$$

式中,  $u, v$  为参数.

5. 由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的中心 (即圆点), 沿某一定方向到曲面上的一

点的距离是  $r$ , 设定方向的方向余弦分别为  $\lambda, \mu, \nu$ , 试证:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}.$$

**证明** 因为  $r$  的方向的方向余弦分别为  $\lambda, \mu, \nu$ , 所以有

$$x = r\lambda, y = r\mu, z = r\nu, \quad \textcircled{1}$$

因为点  $(x, y, z)$  在椭球面上, 所以有

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \textcircled{2}$$

将①代入②得  $\frac{(r\lambda)^2}{a^2} + \frac{(r\mu)^2}{b^2} + \frac{(r\nu)^2}{c^2} = 1,$

即有  $\frac{1}{r^2} = \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}.$

6. 由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的中心, 引三条两两相互垂直的射线, 分别交曲

面于点  $P_1, P_2, P_3$ , 设  $OP_1 = r_1, OP_2 = r_2, OP_3 = r_3$ , 试求:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

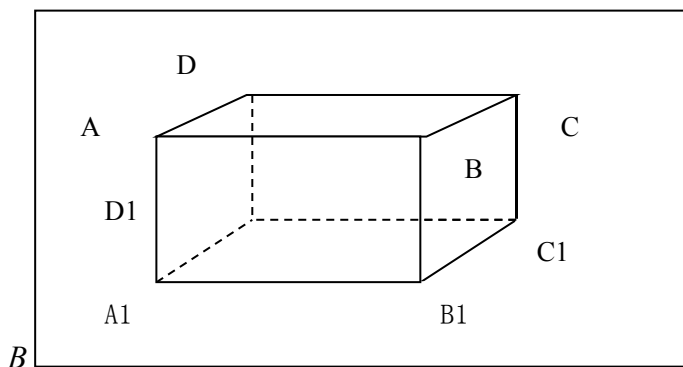


图 4.10

**证明** 如图 4.10, 长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ , 设  $\overline{A_1C}$  与  $\overline{A_1A}$ ,  $\overline{A_1B_1}$ ,  $\overline{A_1D_1}$  的夹角分别为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 则有

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

设  $OP_1$  与  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴的方向余弦分别为  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$ ,

$OP_2$  与  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴的方向余弦分别为  $\lambda_2, \mu_2, \nu_2$ ,

$OP_3$  与  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴的方向余弦分别为  $\lambda_3, \mu_3, \nu_3$ ,

因为  $OP_1, OP_2, OP_3$  两两互相垂直, 从而可以把它们看成长方体中的边, 而把  $x$

轴,  $y$  轴,  $z$  轴看成长方体中的对角线, 从而有

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1,$$

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1,$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1,$$

又因为

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\mu_1^2}{b^2} + \frac{\nu_1^2}{c^2},$$

$$\frac{1}{r_2^2} = \frac{\lambda_2^2}{a^2} + \frac{\mu_2^2}{b^2} + \frac{\nu_2^2}{c^2},$$

$$\frac{1}{r_3^2} = \frac{\lambda_3^2}{a^2} + \frac{\mu_3^2}{b^2} + \frac{\nu_3^2}{c^2},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{a^2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \frac{1}{b^2}(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) + \frac{1}{c^2}(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

7. 设直线  $l$  与  $m$  为互不垂直的两条异面直线,  $C$  是  $l$  与  $m$  的公垂线的中点,  $A, B$  两

点分别在直线  $l, m$  上滑动, 且  $\angle ACB = 90^\circ$ , 试证直线  $AB$  的轨迹是一个单叶双曲面。

证明: 以  $l, m$  的公垂线作为  $z$  轴,  $C$  作为坐标原点, 再令  $x$  轴与  $l, m$  的夹角均为  $\alpha$ , 公

垂线的长为  $2c$ , 若设  $\operatorname{tg}\alpha = \lambda$ , 则  $l, m$  的方程分别为:

$$l: \begin{cases} y + \lambda x = 0 \\ z = c \end{cases}$$

$$m: \begin{cases} y - \lambda x = 0 \\ z = -c \end{cases}$$

令  $A(x_1, y_1, c), B(x_2, y_2, -c)$ , 则有:

$$y_1 + \lambda x_1 = 0, y_2 - \lambda x_2 = 0$$

又  $AC \perp CB$ , 所以:  $x_1^2 + y_1^2 + c^2 + x_2^2 + y_2^2 + c^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (2c)^2$

$$\text{亦即} \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 - c^2 = 0$$

(2)

又设  $M(x, y, z)$  为  $AB$  上任一点, 则

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - c}{-2c} \quad (3)$$

从 (1) —— (3) 中消去  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , 得:

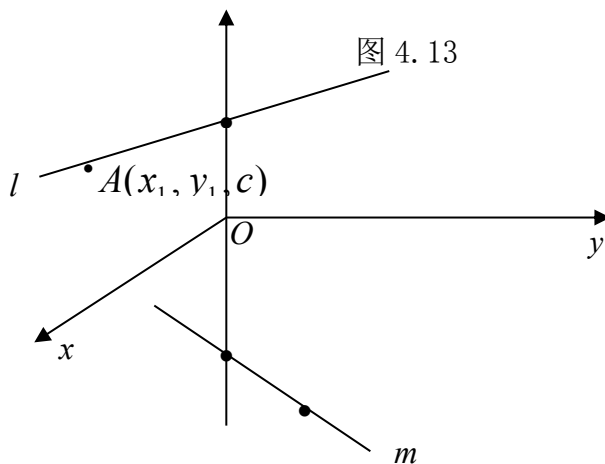
$$\lambda^2(1 - \lambda^2)x^2 - (1 - \lambda^2)y^2 + \lambda^2 z^2 = \lambda^2 c^2$$

$$\text{即: } \frac{x^2}{\frac{c^2}{1 - \lambda^2}} - \frac{y^2}{\frac{\lambda^2 c^2}{1 - \lambda^2}} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

$\because l$  不垂直  $m$ ,  $\therefore \lambda \neq 1$

(4) 表示单叶双曲面, 即  $AB$  的轨迹是一单叶双曲面。

8. 试验证单叶双曲面与双叶双曲面的参数方程分别为:



$$\begin{cases} x = a \sec u \cos v \\ y = b \sec u \sin v \\ z = ctgu \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x = atgu \cos v \\ y = btgu \sin v \\ z = c \sec u \end{cases}$$

证明：对方程： 
$$\begin{cases} x = a \sec u \cos v \\ y = b \sec u \sin v \\ z = ctgu \end{cases}$$

消去参数  $u, v$ ，有： 
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

此即为单叶双曲面。

又对方程： 
$$\begin{cases} x = atgu \cos v \\ y = btgu \sin v \\ z = c \sec u \end{cases} \left( 0, t, \pm \sqrt{\frac{t^2}{4} - 1} \right)$$

消去参数  $u, v$ ，有： 
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

此即为双叶双曲面方程。

9. 试验证椭圆抛物面与双曲抛物面的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = au \cos v, \\ y = bu \sin v, \\ z = \frac{1}{2}u^2 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x = a(u+v), \\ y = b(a-v), \\ z = 2uv, \end{cases}$$

式中  $u, v$  为参数。

证明 
$$\begin{cases} x = au \cos v, & \textcircled{1} \\ y = bu \sin v, & \textcircled{2} \\ z = \frac{1}{2}u^2 & \textcircled{3} \end{cases}$$

由①，②得 
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = u^2,$$

所以有 
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

所以

$$\begin{cases} x = au \cos v \\ y = bu \sin v \\ z = \frac{1}{2}u^2 \end{cases}$$

是椭圆抛物面的参数方程。

$$\begin{cases} x = a(u+v), & \text{④} \\ y = b(u-v), & \text{⑤} \\ z = 2uv & \text{⑥} \end{cases}$$

由④, ⑤得

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 4uv,$$

再由⑥可知

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

所以

$$\begin{cases} x = a(u+v), \\ y = b(u-v), \\ z = 2uv \end{cases}$$

是双曲抛物面的参数方程。

10. 试证单叶双曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  的任意一条直母线在  $xoy$  平面上的射影, 一

定是腰椭圆切线。

**证明**  $xoy$  平面上的椭圆方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{①}$$

而  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  的两族直母线方程为

$$u\text{族:} \begin{cases} w\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = u\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = w\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (u, w \text{不全为零})$$

$$v\text{族:} \begin{cases} t\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = v\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = t\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (v, t \text{不全为零})$$

两族直母线与  $xoy$  平面的交点分别为

$$\left(\frac{\partial auw}{u^2+w^2}, \frac{b(w^2-u^2)}{u^2+w^2}, 0\right), \left(\frac{2avt}{v^2+t^2}, \frac{b(v^2-t^2)}{v^2+t^2}, 0\right),$$

而  $u$  族直母线方向为

$$X_1 : Y_1 : Z_1 = a(u^2 - w^2) : 2buw : c(u^2 + w^2),$$

$v$  族直母线方向为

$$X_2 : Y_2 : Z_2 = a(t^2 - v^2) : 2bvt : [-c(t^2 + v^2)],$$

所以  $u$  族直母线在  $xoy$  平面的射影方程为

$$\frac{x - \frac{2auw}{u^2+w^2}}{a(u^2-w^2)} = \frac{y - \frac{b(w^2-u^2)}{u^2+w^2}}{2buw}, z=0$$

②

$v$  族直母线在  $xoy$  平面的射影方程为

$$\frac{x - \frac{2avt}{v^2+t^2}}{a(t^2-v^2)} = \frac{y - \frac{b(v^2-t^2)}{v^2+t^2}}{2bvt}, z=0$$

实际上上面两个方程具有同一形式，顾直考虑一个即可

由②得 
$$\frac{y}{b} = \frac{2uw}{a(u^2-w^2)}x - \frac{u^2+w^2}{u^2-w^2},$$

带入①得 
$$\frac{x^2}{a^2} + \left[\frac{2uw}{a(u^2-w^2)}x - \frac{u^2+w^2}{u^2-w^2}\right]^2 = 1,$$

即 
$$\frac{1}{a^2} \left[1 + \frac{4u^2w^2}{(u^2-w^2)^2}\right]x^2 - \frac{4uw(u^2+w^2)}{a(u^2-w^2)^2}x + \left(\frac{u^2+w^2}{u^2-w^2}\right)^2 - 1 = 0$$

而 
$$\Delta = \left[\frac{4uw(u^2+w^2)}{a(u^2-w^2)^2}\right]^2 - 4 \cdot \frac{1}{a^2} \left[1 + \left(\frac{4u^2w^2}{u^2-w^2}\right)\right] \cdot \left[\frac{(u^2+w^2)^2 - (u^2-w^2)^2}{(u^2-w^2)^2}\right]$$

$$= \frac{4}{a^2} \left[\frac{4u^2w^2(u^2+w^2)^2}{(u^2-w^2)^4} - \frac{(u^2+w^2)^2 \cdot 4u^2w^2}{(u^2-w^2)^4}\right]$$

$$= 0$$

而 
$$\frac{1}{a^2} \left[1 + \frac{4u^2w^2}{u^2-w^2}\right] \neq 0$$

所以直母线在  $xOy$  平面上的摄影，一定是其腰椭圆的切线。

11. 试证明经过单叶双曲面的一条直母线的每一个平面一定经过属于另一族直母线的一条直母线。并举一反例，说明这个命题在双曲抛物面的情况下不一定成立。

证明 单叶双曲面的两族直母线为

$$u \text{ 族: } \begin{cases} \omega\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = u\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \omega\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

$$v \text{ 族: } \begin{cases} t\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = v\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = t\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

所以过  $u$  族的任一直母线的平面可以写成

$$t\left[\omega\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) - u\left(1 + \frac{y}{b}\right)\right] + v\left[u\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) - \omega\left(1 - \frac{y}{b}\right)\right] = 0,$$

即 
$$\omega\left[t\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) - v\left(1 - \frac{y}{b}\right)\right] + u\left[v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) - t\left(1 + \frac{y}{b}\right)\right] = 0,$$

显然它通过  $v$  族的一条直母线。同理通过  $v$  族的任一直母线的每一平面经过属于  $u$  族的一条直母线。但是这个命题对双曲抛物面却不一定成立，例如平面

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\lambda \quad (\text{常数}),$$

它通过双曲抛物面 
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

的  $u$  族直母线中的直线 
$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\lambda \end{cases}$$

而不通过  $v$  族直母线 
$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2v, \\ v\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z \end{cases}$$

中的任何直母线，这是因为  $v$  族直母线的方向向量  $\mathbf{v} = \frac{1}{ab} \{a, b, 2v\}$ ，而平面的法向量为

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 0 \right\} = \frac{1}{ab} \{b, a, 0\},$$

所以 
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{a^2 b^2} (ab + ba) = \frac{2}{ab} \neq 0.$$

12. 试证明双曲抛物面  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$  ( $a \neq 0$ ) 上的两直母线直交时, 其交点必在一双曲线上.

证明 两相交直母线必异族, 双曲抛物面  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$  上的两直母线为

$$u \text{ 族: } \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2u, \\ u \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) = z. \end{cases}$$

$$v \text{ 族: } \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2v, \\ v \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = z. \end{cases}$$

两直母线的交点坐标为

$$x = a(u+v), y = b(u-v), z = 2uv \quad \text{①}$$

两直母线的方向向量分别为

$$S_u = \left\{ -\frac{1}{b}, \frac{1}{a}, -\frac{2u}{ab} \right\} = \frac{1}{ab} \{a, -b, 2u\},$$

$$S_v = \left\{ \frac{1}{b}, \frac{1}{a}, \frac{2v}{ab} \right\} = \frac{1}{ab} \{a, b, 2v\},$$

因为  $S_u \perp S_v$ ,  $S_u \cdot S_v = 0$ . 即

$$a^2 - b^2 + 4uv = 0.$$

将①中的  $z = 2uv$  代入上式得

$$2z = b^2 - a^2$$

所以交点坐标满足

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \\ 2z = b^2 - a^2 \end{cases}$$

即

$$\left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = b^2 - a^2, \right.$$

$$z = \frac{b^2 - a^2}{2} \quad \textcircled{2}$$

因为  $b \neq a$ , 所以②为一条双曲线方程. 从而交点在双曲线②上.

13. 证明方程

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 2xz - 2yz + 20x + 20y - 40z - 16 = 0$$

表示的曲面是一个柱面.

证明 取曲线

$$\begin{cases} 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 2xz - 2yz + 20x + 20y - 40z - 16 = 0, \\ z=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 5x^2 + 5y^2 - 8xy + 20x + 20y - 16 = 0, \\ z=0, \end{cases}$$

为准线, 母线方向为  $l:m:n$  来建立柱面的方程.

在准线上任取一点  $(x_0, y_0, 0)$ , 那么过这一点的母线为

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z}{n}, \quad \textcircled{1}$$

且有

$$5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0 + 20x_0 + 20y_0 - 16 = 0, \quad \textcircled{2}$$

$$\text{由①得 } x_0 = x - \frac{l}{n}z, y_0 = y - \frac{m}{n}z, \quad \textcircled{3}$$

将③代入②得

$$5\left(x - \frac{l}{n}z\right)^2 + 5\left(y - \frac{m}{n}z\right)^2 - 8\left(x - \frac{l}{n}z\right)\left(y - \frac{m}{n}z\right) + 20\left(x - \frac{l}{n}z\right) + 20\left(y - \frac{m}{n}z\right) - 16 = 0$$

即

$$5x^2 + 5y^2 + \left(\frac{5l^2}{n^2} + \frac{5m^2}{n^2} - 8\frac{lm}{n^2}\right)z^2 - 8xy - 2\left(\frac{5l}{n} - \frac{4m}{n}\right)xz - 2\left(\frac{5m}{n} - \frac{4l}{n}\right)yz + 20x + 20y - 20\left(\frac{l}{n} + \frac{m}{n}\right)z - 16 = 0. \quad \textcircled{4}$$

将④与原方程比较, 并取

$$\frac{5m}{n} - \frac{5l}{n} = 1, \quad \frac{l}{n} + \frac{m}{n} = 2,$$

由这方程得

$$l:m:n=1:1:1$$

代入④得到

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 8xy - 2xz - 2yz + 20x + 20y - 40z - 16 = 0,$$

与原方程一致，所以原方程表示的曲面是一个以

$$\begin{cases} 5x^2 + 5y^2 - 8xy + 20x + 20y - 16 = 0, \\ z=0 \end{cases}$$

为准线，母线方向为 1:1:1 的柱面。

