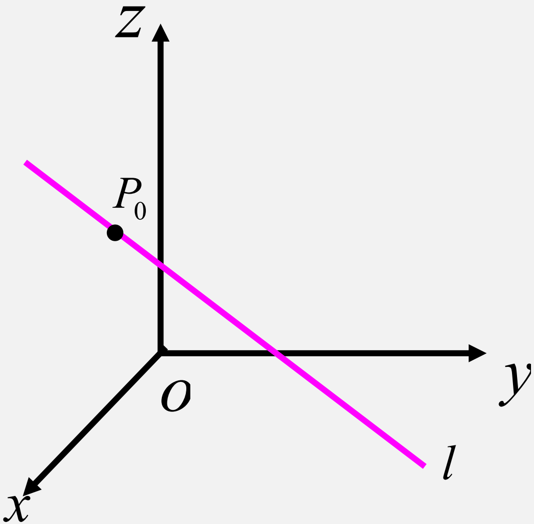
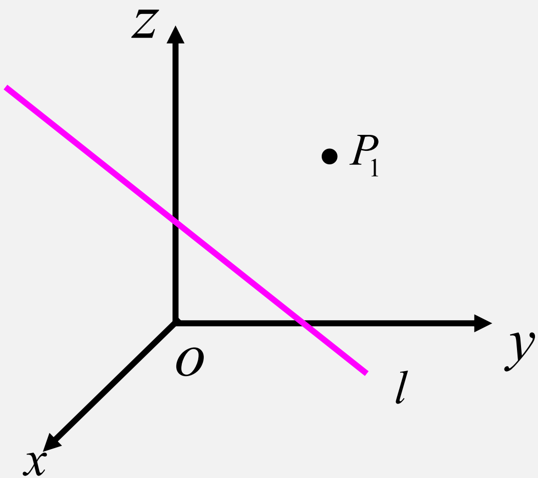
空间直线与点的相关位置

主讲人：周 平

思考：空间直线与点的相关位置关系有哪些？



点在直线上



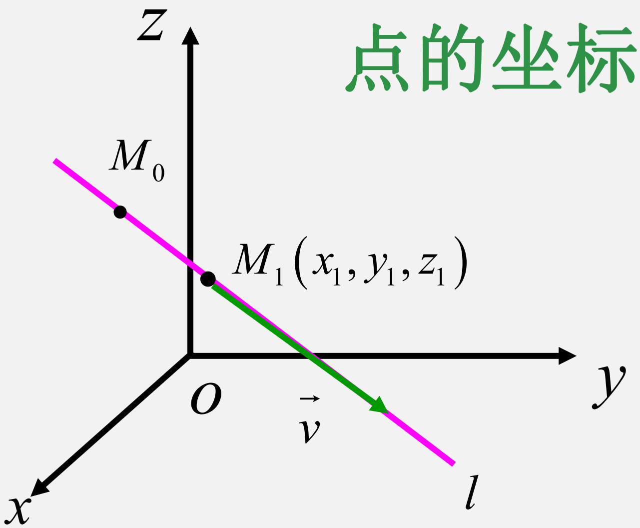
点不在直线上

想一想：如何判断这些位置关系呢？

1.空间直线与点的相关位置

※ 点在直线上的条件：

点的坐标满足直线的方程.



设 $l: \frac{x-x_1}{X} = \frac{y-y_1}{Y} = \frac{z-z_1}{Z}$

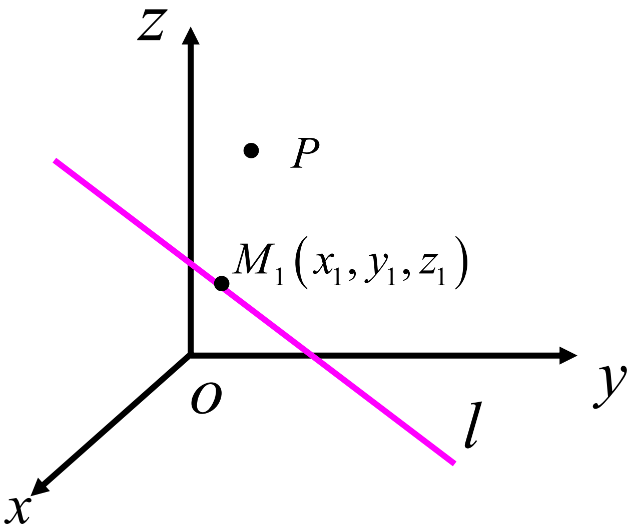
$M_0 = (x_0, y_0, z_0)$

点M_0在直线l上，那么M_0坐标满足直线方程l

$\frac{x_0-x_1}{X} = \frac{y_0-y_1}{Y} = \frac{z_0-z_1}{Z}$成立.

※ 点不在直线上:

点的坐标不满足直线的方程.



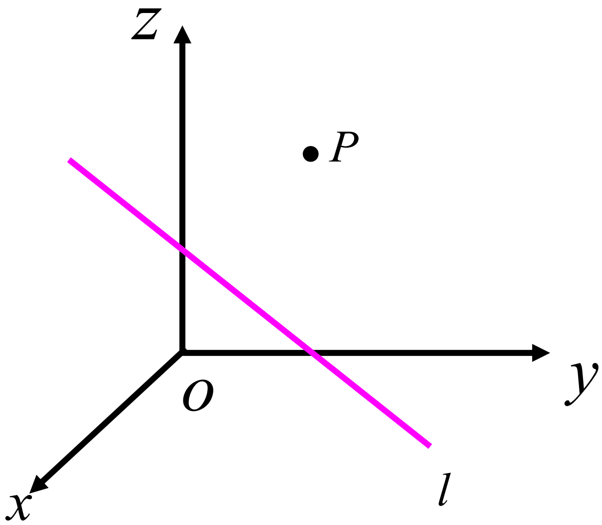
设 $l:\dfrac{x-x_1}{X}=\dfrac{y-y_1}{Y}=\dfrac{z-z_1}{Z}$

$$P=(x_0,y_0,z_0)$$

点P不在直线l上，那么P坐标不满足直线方程l。:

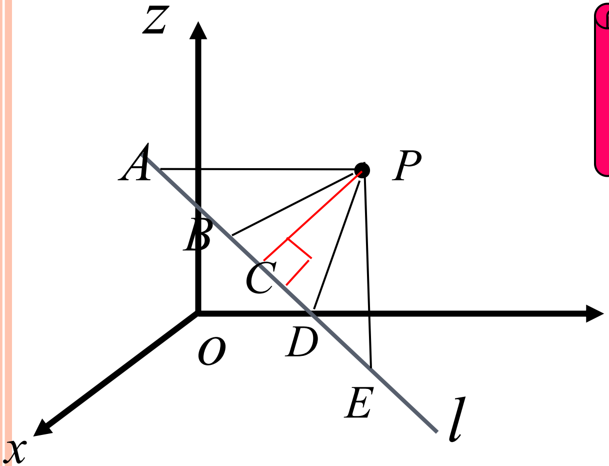
即 $\dfrac{x_0-x_1}{X}=\dfrac{y_0-y_1}{Y}=\dfrac{z_0-z_1}{Z}$ 不成立.

2.点到空间直线的距离



思考：怎样定义一点到空间直线的距离？如何计算呢？

定义3.6.1 一点与空间直线上的点之间的最短距离叫做该点与空间直线间的距离.



思考：怎样理解定义3.6.1?

过该点作与空间直线垂直相交的直线，得垂足，那么该点**与垂足之间的距离**即为该点与空间直线的距离.

想一想：如何计算点到空间直线的距离呢？

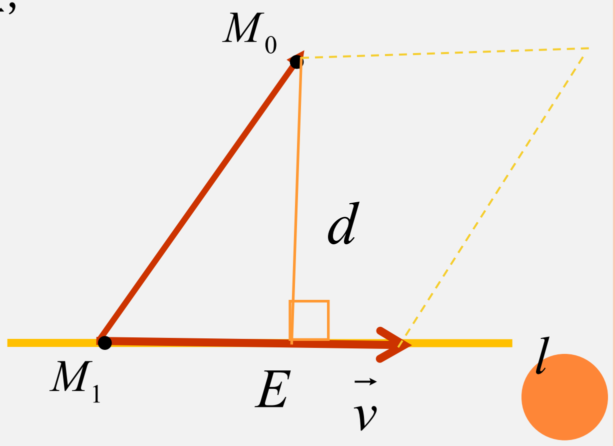
在空间直角坐标系下：

给定空间一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$与直线

$$l:\frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y}=\frac{z-z_1}{Z}$$

设$\vec{v}=\{X,Y,Z\}$为直线l上的方向向量，

$M_1(x_1,y_1,z_1)$为直线l上的一点.



思考：

怎样求以$\vec{v}$和向量$\overrightarrow{M_1M_0}$为两邻边构成的平行四边形的面积呢？

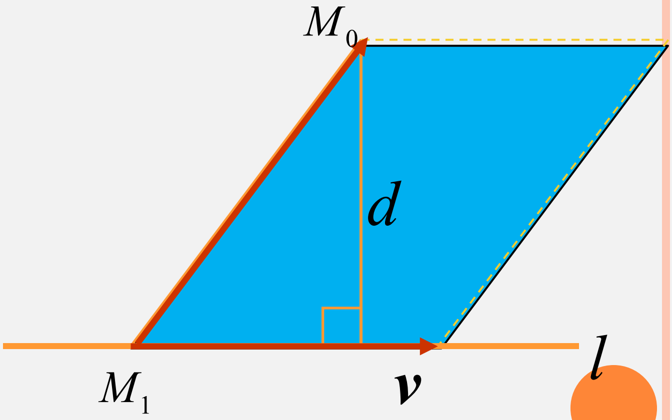
如下图所示，由课本47页1.8节定理1.8.1可知**平行四边形的面积**为：

$$S_{\square}=\left|\vec{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right|$$

并且 $S_{\square}=|\vec{v}|d$

$$\because S_{\square}=\left|\vec{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right|=|\vec{v}|d$$

$$\therefore d=\frac{\left|\vec{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right|}{|\vec{v}|}$$



显然点M_0到l的距离d就是这平行四边形的对应于以$|\vec{v}|$为底的高，因此有

$$d = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{M_1 M_0}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ Y & Z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ Z & X \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ X & Y \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

3.应用举例

例1 求点$(5,4,2)$到直线$l:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$的距离$d$.

解　$M_0(5,4,2)$,取$M_1(-1,3,1)$,$\vec{v}=(2,3,-1)$

$$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$$

$$d=\frac{|\vec{v}\times M_1M_0|}{|\vec{v}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}4-3 & 2-1\\ 3 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2-1 & 5+1\\ -1 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}5+1 & 4-3\\ 2 & 3\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{14}}=2\sqrt{6}$$

或者$\overrightarrow{M_1M_0}=(6,1,1)$　$\vec{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 6 & 1 & 1\end{vmatrix}=\{4,-8,-16\}$

$$\therefore d=\frac{|\vec{v}\times M_1M_0|}{|\vec{v}|}=\frac{\sqrt{4^2+(-8)^2+(-16)^2}}{\sqrt{14}}=2\sqrt{6}.$$

例2 求点$(2,3,-1)$到直线$\begin{cases}2x-2y+z+3=0\\3x-2y+2z+17=0\end{cases}$的距离.

解 先将直线方程$\begin{cases}2x-2y+z+3=0\\3x-2y+2z+17=0\end{cases}$化为一般式

两平面的法向量分别为$\vec{n}_1=\{2,-2,1\}$, $\vec{n}_2=\{3,-2,2\}$

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{2,-2,1\}\times\{3,-2,2\}=\{-2,-1,2\}$$

且$(11,0,25)$为直线上一点，所以直线标准方程为：

$$\frac{x-11}{-2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-25}{2}$$

$M_0(2,3,-1)$, 取$M_1(11,0,-25)$，那么$\overrightarrow{M_1M_0}=\{-9,3,24\}$

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$d=\frac{\left|\vec{v}\times M_1M_0\right|}{|\vec{v}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}3 & 24\\ 1 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}24 & -9\\ -2 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-9 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}^2}}{3}=\frac{\sqrt{2025}}{3}=15$$

或者 $$\vec{v}\times\overrightarrow{M_1M_0}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & 2\\ -9 & 3 & 24\end{vmatrix}=\{-30,30,15\}=15\{-2,2,1\}$$

$$d=\frac{\left|\vec{v}\times M_1M_0\right|}{|\vec{v}|}=\frac{15\times\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}{3}=\frac{15\times 3}{3}=15.$$

4.课堂小结

- 空间直线和点有几种位置关系？
- 怎样判断点是否在空间直线上？
- 如果点不在直线上怎样计算点到空间直线的距离？

思考：

直线 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1Z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2Z+D_2=0 \end{cases}$ 通过原点的条件？

5.布置作业

第125页： 习题 第1题和第2题

谢谢！