《高等代数（1）》授课教案

授课班级：**级数学与应用数学*班

授课教师：*****

授课时间：**年**月至**年**月

授课地点：星期*第*节*楼*****

课程简介：《高等代数(1)》是数学与应用数学专业的专业必修课程，是数学专业研究生入学考试的必考课程之一，也是理论性和应用性很强的一门数学基础课.其主要内容包括一元多项式、行列式、线性方程组、矩阵等.讲授本课程的任务主要在于培养学生的代数基础理论和思想素质，基本掌握代数中的论证方法,获得较熟练的演算技能和初步应用的技巧,为进一步学习其它数学知识打下坚实的基础.

教学目的：通过本课程的教学，使学生对高等代数乃至代数学的思想和方法有较深刻的认识,提高他们的抽象思维、逻辑推理和运算的能力；使学生初步掌握基本的、系统的代数知识和抽象的、严格的代数方法，进而加深对中学代数的理解;使学生能应用代数思想和方法去理解与处理有关的问题,培养与提高代数的理论分析问题与解决问题的能力；为学生今后学习近世代数、离散数学、数值计算、泛函分析等后续课程提供所需的基础理论知识；使学生在智能开发、创新能力培养等方面获得重要的平台.

教学要求：在整个教学过程中，加强基本运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力以及解决实际问题的能力的培养.通过本课程的教学,应使学生较系统地掌握高等代数的基础理论和基本方法，提高逻辑思维和推理论证能力，并具备较熟练的计算能力和分析问题的能力，为学习后继课程打下基础.主要以讲授为主、学生参与习题演练为辅等教学方式进行授课，期末以闭卷考试方式进行考核.

中国大学慕课学习网址推荐

《高等代数》http://www.icourse163.org/course/YCTC-1449777177#/info

《高等代数选讲》：http://www.icourse163.org/course/YCTC-1001753080

20**-20**学年第 2 学期考勤、回答问题记录表

课程　　　高等代数（1）　　　　　**班级**

学号	姓名	考勤	回答问题 1	回答问题 2	回答问题 3	回答问题 4	回答问题 5	合计

平时成绩由以下构成

1. **期中考试成绩 10 分；**

2. **考勤 10 分**

有病有事必须请假，任何理由都可以请假，但必须是真实的理由。

病假事假每请假 1 次扣 0.5 分，迟到 2 次扣 0.5 分，旷课一次扣 1 分。

请假必须有班主任签字的请假条，并向授课教师请假。

3. **课堂表现 10 分**

（1）**课堂回答问题正确 1 次加 2 分；**

（2）**课堂讨论发言或建议得到老师或同学认可加 1 分。**

4. **作业 70 分**

（1）**认真完成作业且正确率高每次加 5 分；**

（2）**作业完成效果情况每次加减 0.5—3 分。**

目　录

第一章 多项式 ········· 1

1.1 数域 ········· 1

1.2 一元多项式 ········· 4

1.3 整除的概念 ········· 8

1.4 最大公因式 ········· 12

1.5   因式分解定理 ········· 18

1.6 重因式 ········· 22

1.7 多项式函数 ········· 26

1.8 复系数与实系数多项式的因式分解 ········· 30

1.9 有理系数多项式 ········· 34

第一章 多项式

教学的时间：2020 年 3 月　日　　　　　　　教学学时数：　2 学时

1.1 数域

一、教学目标

1. 掌握数域的定义；

2. 会判断一个代数系统是否是数域.

二、教学重点

数域的定义

三、教学难点

判断一个代数系统是否是数域

四、教学过程

(一)、引言

1. 进入大学学习之前所涉及到的数集有：N，Z，Q，R，C，它们之间的关系为： $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$.

若数集 P 中任意两个数作某一运算的结果都仍在 P 中，就称数集 P 对这个运算是封闭的.

N 中满足加法与乘法封闭，但减法与除法（尽管除数不为 0）不封闭.

Z 中满足加、减与乘法封闭，但除法仍然不封闭. 而在 Q，R，C 中满足四则运算封闭.

2. 满足四则运算封闭的数集除了 Q，R，C 是否还有其它数集？

3. 中学数学中因式分解要求分解到不能再分为止，“不能再分”是如何界定？

例如，求方程 $x^4-4=\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)$ 在**有理数集上**不能再分解了.

而在**实数集上**可以分解为 $x^4-4=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2+2\right)$.

在**复数集上**可以分解为$x^4-4=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{2}i\right)$.

由此可见，同一问题在不同的数的范围内可能有不同的结论. 因此，在这种情况下，要明确规定所考虑的数的范围. 某个范围内的数的全体构成的集合称为数集. 另外，在作代数问题时，不但要考虑一些数，而且往往要对这些数作加减乘除四种运算. 因此所考虑的数集还必须满足条件：其中任两个数的和差积商仍在这个集合内. 根据以上的需要，人们引进了如下所谓数域的概念.

(二)、数域的定义

定义 1. 设P是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1. 若P中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍然是P中的数，则称P为一个数域.

若数集P中任意两个数作某一运算的结果都仍在P中，就称数集P对这个运算是封闭的. 因此数域的定义也可以说成，若一个包含 0、1 在内的数集P对于加法、减法、乘法、除法（除数不为零）是封闭的，则称P为一个数域.

（三）、例子

例 由数域的定义知：全体有理数集、全体实数集、全体复数集合都是数域，分别称为有理数域、实数域、复数域，分别记作 Q，R，C.

但是全体整数集不是数域，因为不是任意两个整数的商都是整数.

例 1 证明数集$\mathbb{Q}(\sqrt{2})\triangleq\{x\,|\,x=a+b\sqrt{2},a,b\in\mathbb{Q}\}$为一数域.

证明 $0=0+0\bullet\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，$1=1+0\bullet\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2})$

在$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$中任取两个数$a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}$，则$a,b,c,d\in\mathbb{Q}$.

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

下面证明$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$对除法封闭，设$a+b\sqrt{2}\neq0$，则$a-b\sqrt{2}\neq0$. 否则，若$a-b\sqrt{2}=0$，那么$a=b\sqrt{2}$. 若$b=0$，则$a=0\bullet\sqrt{2}=0$，这与$a+b\sqrt{2}\neq0$矛盾. 若$b\neq0$，

则$\sqrt{2}=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$，这与$\sqrt{2}$为无理数矛盾. 故$a-b\sqrt{2}\neq 0$. 从而

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

例 2 $P=\left\{x\middle|x=\frac{a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x^1+b_2x^2+\cdots+b_mx^m},\text{其中}a_0,a_1,\cdots,a_n,\mathrm{b}_0,\mathrm{b}_1,\cdots,b_m\in Z,m,n\in N\right\}$

是数域.

例 3 判断下列两个集合是不是数域？

（1）$P_1=\left\{x\middle|x=2k-1,k\in Z\right\}$ No

（2）$P_2=\left\{x\middle|x=\sqrt{2}k,k\in Z\right\}$ No

（3）$F=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in Z\}$ No（这是因为$2+\sqrt{2}\in F,0\neq 2=2+0\bullet\sqrt{2}\in F$，

但$\frac{2+\sqrt{2}}{2}=1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\notin F$. 即$F$对除法不封闭. 从而$F$不是数域. ）

定理　任何数域都包含有理数域即有理数域是最小的数域.

证：设P是任何一个数域，下证：$Q\subseteq P$**即**要证$\forall x\in Q\text{有}x\in P$.

$$\boxed{\forall x\in Q\text{有}x=\frac{p}{q},p,q\in Z.}$$

由于 P 是一个数域知：$1\in P,0\in P$. 数域 P 对加法、减法封闭，知 0，1，2，⋯，-1，-2，-3，$\cdots\in P$，从而任意的数域P包含了全体整数.

再由P对除法封闭知，$\boxed{\text{任意的有理数}\frac{p}{q}\in P\text{，即}x\in P.}$

因此$Q\subseteq P$也就是**任何数域都包含有理数域**.

五、小结

1.判断一个数集是不是数域的条件有哪些？

2.最小的数域是？最大的数域是？

六、作业（习题册）

七、教学反思

教学的时间：2020 年 3 月 日 **教学学时数:2 学时**

1.2 一元多项式

一、教学目标

1. 理解数域 P 上一元多项式的定义.

2. 掌握一元多项式的运算.

3. 会运用多项式的运算满足的规律.

二、教学重点

多项式的运算及其性质

三、教学难点

一元多项式的定义的认识

四、教学过程

（一） 一元多项式的概念

1. 设n为一非负整数，P是一个数域，x为一个符号（或文字）. 形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0x^0 \qquad (1)$$

其中$a_0,a_1,\ldots,a_n\in P$，称为**数域P上的一元多项式**. 用$f(x),g(x),\ldots$或$f,g,\ldots$等来表示多项式.

注意：这里定义的多项式中的x是一个符号. 它可以代表许多不同的事物，因此它是一个形式的表达式. 当符号x是未知数时，它就是中学所学的多项式. 看应用的需要，这个符号还可以代表其他待定的事物. 为了能统一研究未知数和其他待定事物的多项式，抽象地定义上述形式表达式. 并且还要对它们引入运算来反映各个待定事物所满足的运算规律，统一研究以得到它们普遍的公共的性质.

2．多项式的项及其系数

多项式（1）中的a_ix^i称为i次项，a_i称为i次项的系数，$i=0,1,\ldots,n$

3．为方便起见规定：

1^0.（*）中的a_1x^1通常写为a_1x；a_0x^0通常写为a_0，该项也称为常数项.

2^0．（*）中的 $a_i x^i (i \geq 1)$ 当 $a_i = 1$ 时可写为 x^i．

3^0．若一个多项式的系数不全为零，则其系数为零的项可以省略不写．这样自然也可以添上一些系数为零的项.

例如：$4x^3 + 1x^2 + 0x^1 + 2x^0$ 可写为 $4x^3 + x + 2$, 也可以写为 $0x^4 + 4x^3 + x + 2$．

4. 多项式的相等

若在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中，除去系数为零的项外，同次项的系数全相等，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记为 $f(x) = g(x)$．

例如. $0x^3 + 5x^2 + 0x + 1 = 5x^2 + 0x + 1 = 5x^2 + 1$，$2x^2 + x + 3 \neq x^2 + x + 3, 3x^2 + 2x + 1 \neq 2x + 1$．

5. 零多项式

系数全为零的多项式称为零多项式，记为 0.

6. 多项式的首项与次数

在（1）中，若 $a_n \neq 0$，则 $a_n x^n$ 称为（1）的首项，a_n 称为首项系数，n 称为多项式（1）的次数. 多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\partial(f(x))$．

注 1^0．在以上多项式的次数定义中，要求多项式至少有一项的系数不为零. 而零多项式的系数全为零，对于零多项式，我们不定义次数. 它也是唯一不定义次数的多项式. 因为零多项式不定义次数，所以在用符号 $\partial(f(x))$ 时，总是假定 $f(x) \neq 0$，以后就不一一说明了.

数域 P 上不为零的常数称为零次多项式，例如，$f(x) = 3721$

（二）多项式的运算

在中学所讲的代数中，两个多项式可以相加、相减、相乘，对于形式表达式（1），可类似地引入这些运算. 为便于计算和讨论，常用连加符号来表达多项式，即 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ 写成 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ．

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^1+a_0x^0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x^1+b_0x^0=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$

1. 加减法

（1）定义　不妨假设$m\le n$. 当$m<n$时，令$b_n=b_{n-1}=...=b_{m+1}=0$.

$$f(x)\pm g(x)\triangleq\sum_{i=0}^{n}(a_i\pm b_i)x^i$$

也就是说把两个多项式相加定义为同次项系数相加.

显然数域P上的两个多项式经过加、减运算后，所得结果仍然是P上的多项式.

（2）$\partial(f(x)\pm g(x))\le\max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$.

例：$f(x)=3x^3+4x^2-5x+6$，$g(x)=-3x^3+x^2-3x+1$，求 $f(x)\pm g(x)$及次数.

2. 乘法

（1）定义

$$f(x)g(x)\triangleq a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+(a_nb_{m-2}+a_{n-1}b_{m-1}+a_{n-2}b_m)x^{n+m-2}$$
$$+...+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0$$

其中s次项的系数是　$a_sb_0+a_{s-1}b_1+...+a_1b_{s-1}+a_0b_s=\sum_{i+j=s}a_ib_j$.

$f(x)g(x)$可表示为　$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{n+m}(\sum_{i+j=s}a_ib_j)x^s$

实际上，$f(x)g(x)$就是将$f(x)$与$g(x)$逐项相乘再合并同次项而得到的多项式.

显然数域P上的两个多项式经过相乘所得到的结果仍是P上的多项式.

（2）若 $f(x)\ne 0,g(x)\ne 0$，则 $f(x)g(x)\ne 0$，且 $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$.

证：$\because f(x)\ne 0,g(x)\ne 0$

$\therefore f(x)$ 与 $g(x)$ 中都至少有一项其系数不为零，

不妨设 $a_n \neq 0, b_m \neq 0$，则 $a_n b_m \neq 0$，且 $\partial(f(x)) = n, \partial(g(x)) = m$.

$\because f(x)g(x) = a_n b_m x^{n+m} + \ldots + a_0 b_0$ ，且 $a_n b_m \neq 0$

$\therefore f(x)g(x) \neq 0$，且 $a_n b_m x^{n+m}$ 是 $f(x)g(x)$ 的首项，由定义知

$\partial(f(x)g(x)) = n + m = \partial(f(x)) + \partial(g(x))$

（3） $f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ 与 $g(x)$ 中至少有一个等于 0.

（三）运算规律

和数的运算一样，多项式的运算也满足下面的一些规律

1. 加法交换律： $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$

2. 加法结合律： $[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$

3. 乘法交换律： $f(x)g(x) = g(x)f(x)$

4. 乘法结合律：$[f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)]$

5. 乘法对加减法的分配律： $f(x)[g(x) \pm h(x)] = f(x)g(x) \pm f(x)h(x)$

6. 乘法消去律：若 $f(x)g(x) = f(x)h(x)$ 且 $f(x) \neq 0$，则 $g(x) = h(x)$.

（四）数域 P 上的多项式环

定义 所以系数在数域 P 中的一元多项式的全体，称为数域 P 上的一元多项式环，记为 $P[x]$， P 称为 $P[x]$ 的系数域.

五、小结

1.学会了多项式的哪些运算？

2.多项式的运算满足哪些规律？

六、作业

1.见习题册　　　　　　　　2.下次课预习要点：整除的概念及其基本性质

七、教学反思

教学的时间：2020 年 3 月　日　　　　　　　　　　教学学时数:2 学时

1.3 整除的概念

一、教学目标

1. 掌握一元多项式整除的概念及其基本性质.

2. 熟练运用带余除法求商式与余式.

二、教学重点

1. 一元多项式整除的概念及其基本性质

2. 带余除法

三、教学难点

用带余除法求商式与余式

四、教学过程

这一节以及后面各节的讨论都是在某一固定的数域 P 上的多项式环 $P[x]$ 中进行的，也就是说，之后提到的多项式都是同一个固定的数域 P 上的一元多项式，以后就不每次重复说明了.

（一） 带余除法

上一节中讨论了多项式的加减法和乘法，在一元多项式环中，任给两个多项式总可以作加、减、乘三种运算，但是乘法的逆运算—除法—并不是普遍可以做的，也就是说用一个多项式去除另一个多项式，并不是总能除得尽的，下面举一个这样的例子.

设 $f(x)=3x^3+4x^2-5x+6, g(x)=x^2-3x+1$

$$
\begin{array}{r|r|l|}
g(x)=x^2-2x+1 & 3x^3+4x^2-5x+6 & q(x)=3x+13 \\
 & \underline{3x^3-9x^2+3x\quad} & \\
 & 13x^2-8x+6 & \\
 & \underline{13x^2-39x+13} & \\
 & r(x)=31x-7 &
\end{array}
$$

从上式看出 $g(x)$ 不能除尽 $f(x)$. 用 $g(x)$ 去除 $f(x)$ 得到一个商式 $q(x)=3x+13$ 和一个余式 $r(x)=31x-7$. 虽然如此，但我们可以把所得结果写成 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$

$\partial(r(x))<\partial(g(x))$

这个例子具有一般性. 一般地我们有：

定理（带余除法） 对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$，其中 $g(x)\neq 0$，一定有 $P[x]$ 中的多项式 $q(x),r(x)$ 存在，使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x) \tag{1}$$

成立. 其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或者 $r(x)=0$，并且这样的 $q(x),r(x)$ 是唯一决定的.

注 带余除法中所得的 $q(x)$ 通常称为 $g(x)$ **除** $f(x)$ **的商**，$r(x)$ **称为** $g(x)$ **除** $f(x)$ **的余式.**

注： 带余除法定理中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或者 $r(x)=0$，确定了 $q(x),r(x)$ 是唯一。

反例 若 $f(x)=1$，$g(x)=x$ 时有 $f(x)=g(x)*0+1=g(x)*1+(-x+1)$ 这样 $q(x),r(x)$ 并唯一，所以必须注意条件 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或者 $r(x)=0$.

带余除法定理的证明：

（二） 整除的概念

定义 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，若存在 $h(x)\in P[x]$ 使 $f(x)=g(x)h(x)$，则称 $g(x)$ **整除** $f(x)$，或称 $f(x)$ 被 $g(x)$ 整除，记为 $g(x)\mid f(x)$. 而 $g(x)\nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$. 当 $g(x)\mid f(x)$ 时， $g(x)$ 就称为 $f(x)$ 的因式， $f(x)$ 称为 $g(x)$ 的倍式.

（三） 整除性的判别及常用性质

1. 判定定理

定理 1 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，且 $g(x)\neq 0$，则 $g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为 0.

证： $\Leftarrow$ 当 $g(x)\neq 0$ 时，有带余除法知，存在 $q(x),r(x)\in P[x]$ 使 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$

其中， $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ ，或 $r(x)=0$.

若 $r(x)=0$ ，则 $f(x)=q(x)g(x)$， 即 $g(x)\mid f(x)$.

$\Rightarrow$ 若 $g(x)\mid f(x)$，则存在 $q(x)\in P[x]$ 使 $f(x)=q(x)g(x)=q(x)g(x)+0$ 即 $r(x)=0$.

2. 性质

（1） **若 $f(x)\mid g(x)$， $g(x)\mid f(x)$，则 $f(x)=cg(x)$，其中 c 为 P 中一个非零常数，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 只差一个零次因式.**

证： 由 $f(x)\mid g(x)$ 有 $g(x)=h_1(x)f(x)$， 由 $g(x)\mid f(x)$ 有 $f(x)=h_2(x)g(x)$.

于是 $$f(x)=h_2(x)g(x)=h_2(x)h_1(x)f(x) \qquad (*)$$

若 $f(x)\neq 0$，在（*）式中消去 $f(x)$ 得 $h_2(x)h_1(x)=1$.

从而 $\partial(h_1(x))+\partial(h_2(x))=\partial(1)=0$， 因此 $\partial(h_2(x))=0$.

故 $h_2(x)=c\neq 0$， 从而 $f(x)=h_2(x)g(x)=cg(x)$.

若 $f(x)=0$，则由 $f(x)\mid g(x)$ 得知 $g(x)=0$

显然此时也有 $f(x)=cg(x)$

（2） **若 $f(x)\mid g(x)$， $g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$.**

证：　由 $g(x)=g_1(x)f(x), h(x)=h_1(x)g(x)$

即得　$h(x)=h_1(x)g_1(x)f(x)$，

即 $f(x)\mid h(x)$

（3）**若** $f(x)\mid g_i(x), i=1,2,\ldots,r$ **，则对任意的** $u_i\in P[x](i=1,2,\ldots,r)$**，有**

$$f(x)\mid(u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\ldots+u_r(x)g_r(x))$$

五、小结

1. 请同学叙述一元多项式整除的概念及其基本性质.
2. 你会运用带余除法求商式与余式了吗？

六、作业（习题册）

七、教学反思

教学的时间：2020 年 3 月　日　　　　　　　　　教学学时数:2 学时

1.4 最大公因式

一、教学目标

1．掌握最大公因式、互素的概念及性质。

2．会求任意的两个多项式 $f(x),g(x)\in P[x]$ 的最大公因式，并能求 $u(x),v(x)\in P[x]$ 使 $\left(f(x),g(x)\right)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$。

二、教学重点

1. 最大公因式的概念、互素的概念及性质.

2. 利用辗转相除法求两个多项式的最大公因式.

三、教学难点

利用辗转相除法求两个多项式的最大公因式

四、教学过程

(一)．最大公因式的概念

因为对任意多项式 $f(x)$ 和任意零次多项式 c 都有

$$f(x)=c\left[c^{-1}f(x)\right] \tag{1}$$

所以可以说任意零次多项式都是任意多项式的因式，从而任意两个多项式都以零次多项式为它们的公共的因式,并且这些公共因式的数量有很多.

问题：我们作什么样的规定多项式的公因式才唯一确定？

1. 公因式的定义

设 P 是一个数域，$f(x),g(x),h(x)\in F[x]$,若 $h(x)\mid f(x)$ 且 $h(x)\mid g(x)$,则称 $h(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**公因式**.

注 1 由(1)式，任意两个多项式都存在公因式并且不唯一.

例 1 设 $f(x)=(x-1)^2$，$g(x)=x^2-1$，$h(x)=x-1$，则 $h(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个公因式.

若多项式$h(x)$是$f(x)$和$g(x)$的一个公因式,则对任意零次多项式c,$ch(x)$也是$f(x)$和$g(x)$的一个公因式.

2. 最大公因式的定义

$d(x)$为$f(x),g(x)$的一个最大公因式，如果

1）$d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$ （即$d(x)$是$f(x),g(x)$的公因式）

2） 若$h(x)\mid f(x),h(x)\mid g(x)$，则$h(x)\mid d(x)$ （即$f(x),g(x)$的公因式全是$d(x)$的因式）

(二). 最大公因式的存在性及其表达式

引理 1 若$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，则$f(x)$，$g(x)$和$g(x)$，$r(x)$有相同的公因式.

引理 2 若$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，$d(x)$为$g(x),r(x)$的一个最大公因式，则$d(x)$也是$f(x),g(x)$的一个最大公因式.

定理 2 对任意$f(x),g(x)\in P[x]$，它们在$P[x]$中存在一个最大公因式$d(x)$且存在$u(x),v(x)\in P[x]$使$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

若$d_1(x)$是$f(x),g(x)$的最大公因式，c是$d_1(x)$首项系数，则$d(x)=c^{-1}d_1(x)$

是 $f(x),g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式，并且是唯一的. 我们通常把这个最大公因式用 $\left(f(x),g(x)\right)$ 表示.

例 1 设 $f(x)=x^4+2x^3-4x^2-2x+3, g(x)=x^3+4x^2+x-6$.

(1) 求 $\left(f(x),g(x)\right)$， (2) 求 $u(x),v(x)$ 使 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

例 2 设 $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1, g(x)=x^2-x-1$.

(1) 求 $\left(f(x),g(x)\right)$， (2) 求 $u(x),v(x)$ 使 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.（要求学生练习）

(三). 互素（互质）

1. 两多项式互素的定义

定义 7 $P[x]$ 中两个多项式 $f(x),g(x)$ 称为互素的，若 $\left(f(x),g(x)\right)=1$.

2. 两多项式互素的充要条件

定理 3 设 $f(x),g(x)\in P[x]$， $f(x),g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow \exists u(x),v(x)\in P[x]$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

证： $\Rightarrow$. 设 $f(x),g(x)$ 互素，由定义知 $(f(x),g(x))=1$.

由定理 2 知存在$u(x),v(x)\in P[x]$使

$$(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

即 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

$\Leftarrow$. 设有$u(x),v(x)\in P[x]$使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$ （*）

设$\varphi(x)$是$f(x),g(x)$的最大公因式

于是$\varphi(x)\mid f(x),\varphi(x)\mid g(x)$

由§1.3 中整除的性质 3 知 $\varphi(x)\mid u(x)f(x)+v(x)g(x)$

从而$\varphi(x)|1$. 这样，$0\le\partial(\varphi(x))\le\partial(1)=0$，即$\partial(\varphi(x))=0$

即$f(x),g(x)$的最大公因式全为零次多项式.

故$(f(x),g(x))=1$，从而$f(x),g(x)$互素

3. 关于互素多项式的重要性质

定理 4 若$(f(x),g(x))=1$且$f(x)\mid g(x)h(x)$，则$f(x)\mid h(x)$

证： 因为$(f(x),g(x))=1$，所以有$u(x),v(x)$使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

等式两边同乘$h(x)$得$u(x)h(x)f(x)+v(x)h(x)g(x)=h(x)$ （*）

因为$f(x)\mid g(x)h(x)$，$f(x)\mid f(x)$

所以$f(x)$整除（*）式左边

从而$f(x)\mid h(x)$

推论 若$f_1(x)\mid g(x),f_2(x)\mid g(x)$，且$(f_1(x),f_2(x))=1$，则$f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$

证： 由$f_1(x)\mid g(x)$有 $g(x)=f_1(x)h_1(x)$

因为$f_2(x)\mid g(x)$，所以 $f_2(x)\mid f_1(x)h_1(x)$

又因为$(f_1(x),f_2(x))=1$，由定理 4 知 $f_2(x)\mid h_1(x)$

即$h_1(x)=f_2(x)h_2(x)$，代入（*）式得： $g(x)=f_1(x)f_2(x)h_2(x)$

故 $f_1(x)f_2(x)\,|\,g(x)$

(四). 任意有限个多项式的最大公因式及任意有限个多项式的互素

定义 $d(x)$ 称为 $f_1(x), f_2(x),..., f_s(x)(s\ge 2)$ 的一个最大公因式，如果

（1） $d(x)\,|\,f_i(x), i=1,2,...,s$；

（2） 若 $\varphi(x)\,|\,f_i(x), i=1,2,...,s$，则 $\varphi(x)\,|\,d(x)$.

可以证明 $f_1(x), f_2(x),..., f_s(x)(s\ge 2)$ 的最大公因式存在. 用符号 $(f_1(x), f_2(x),..., f_s(x))$ 表示 $f_1(x), f_2(x),..., f_s(x)(s\ge 2)$ 首项系数为 1 的最大公因式.

当 $f_1(x), f_2(x),..., f_s(x)(s\ge 2)$ **不全为零时，有**

$$((f_1(x), f_2(x),..., f_{s-1}(x)), f_s(x)) = (f_1(x), f_2(x),..., f_s(x)).$$

证： 设 $(f_1(x), f_2(x),..., f_s(x)) = d, (f_1(x), f_2(x),..., f_{s-1}(x)) = d_1, (d_1, f_s) = d_2$

由 d 的定义知 $d\,|\,f_i, i=1,2,...,s$

由 d_1 的定义知 $d\,|\,d_1$

再由 $d\,|\,f_s$ 及 d_2 的定义知 $d\,|\,d_2$

另一方面，因为 $d_2\,|\,d_1, d_1\,|\,f_i, i=1,2,...,s-1$

所以 $d_2\,|\,f_i, i=1,2,...,s$，因此 $d_2\,|\,d$

故 $d_2 = cd(c\ne 0)$

因为 d, d_2 均为首 1 的，故 $d=d_2$

存在性利用已证等式和数学归纳法可证.

定理 存在 $u_i(x), i=1,2,...,s$ 使

$$(f_1(x), f_2(x),..., f_s(x)) = u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+...+u_s(x)f_s(x)$$

定义 若 $(f_1(x), f_2(x),..., f_s(x))=1$，则称 $f_1(x), f_2(x),..., f_s(x)(s\ge 2)$ 是互素的.

$f_1(x), f_2(x),..., f_s(x)(s\ge 2)$ 互素 $\Leftrightarrow \exists u_i(x), i=1,2,...,s$ 使

$$u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+...+u_s(x)f_s(x)=1$$

例 3 设 $(f(x),g(x))=1$，证明对任意的 $h(x)$ 有 $(f(x)h(x),g(x))=(g(x),h(x))$

例 4 设 f_1,f_2 都与 g_1,g_2 互素，证明 $(f_1g_1,f_2g_2)=(f_1,f_2)(g_1,g_2)$

五、小结

1. 请叙述公因式、最大公因式、互素的概念.
2. 如何求两个多项式的最大公因式?
3. 多项式互素有哪些性质？

六、作业（习题册）

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日 **教学学时数:2 学时**

1.5 因式分解定理

一、教学目标

1. 掌握不可约多项式的概念及性质。
2. 理解唯一因式分解定理。

二、教学重点

因式分解及其唯一性定理

三、教学难点

不可约多项式的概念及性质

四、教学过程

本节以整除性理论为基础，引入不可约多项式的概念，在一般数域上将多项式作为形式表达式，研究其因式分解，为多项式的因式分解提供理论依据。因此，本节是因式分解的理论基础，对中学代数的因式分解具有理论指导作用。

1. 问题背景

中学数学把一个多项式分解为不能再分的因式的乘积，那里所谓的不能再分没有一个确切的标准，仅仅是我们自己做不出怎么样分下去。其实不能再分也不是绝对的，而是相对于系数所在的数域而言。

例 1 对于多项式 x^4-4 的分解。

由例 1 题可知，必须明确系数域之后，所谓不能再分才有确切的含义。因此，在以后的讨论中，选定一个数域，才考虑多项式的因式分解。

2. 不可约多项式的定义

定义 8 数域 P 上次数 ≥ 1 的多项式 $p(x)$，若 $p(x)$ 不能表成 P 上的两个次数比 $p(x)$ 低的多项式的乘积，则称 $p(x)$ 为数域 P 上的不可约多项式，或称 $p(x)$ 在 P

上不可约.

注1^0 对零多项式和零次多项式，既不说是不可约的，也不说是可约的.

2^0 一次多项式总是不可约的.

思考：数域 P 上，不是不可约的多项式是否必是可约多项式？ （×）

3. 不可约多项式的性质

（1）若 $p(x)$ 不可约，则对任意 $0 \neq c \in P$， $cp(x)$ 也不可约

（2）若 $p(x)$ 不可约，则对任意 $f(x)$，或者 $p(x) \mid f(x)$，或者 $(p(x), f(x)) = 1$

证： 设 $(p, f) = d(x)$，则 $d(x) \mid p(x)$. 因为 $p(x)$ 不可约， 所以 $d(x)$ 为 $p(x)$ 的平凡因式. 又因为 $d(x)$ 为首 1 的，所以 $d(x) = 1$，或 $d(x) = cp(x)$ （$c \neq 0, cp(x)$ 为首 1 的）.

若 $d(x) = 1$，则 $(p(x), f(x)) = 1$

若 $d(x) = cp(x)$，因为 $d(x) \mid f(x)$，所以 $cp(x) \mid f(x)$

即 $f(x) = cp(x)h(x) = p(x)(ch(x))$，由此可见 $p(x) \mid f(x)$

（3）若 $p_1(x), p_2(x)$ 是互异首 1 的，且不可约的，则 $(p_1(x), p_2(x)) = 1$

证：因为 $p_1(x), p_2(x)$ 是不可约的，且 $p_1(x), p_2(x)$ 是首 1 的

所以 $p_1(x) \nmid p_2(x)$，再由性质（2）知，$(p_1(x), p_2(x)) = 1$

定理 5 若 $p(x)$ 是一个不可约多项式，则对任意 $f(x), g(x)$，由 $p(x) \mid f(x)g(x)$ 推出 $p(x) \mid f(x)$ 或 $p(x) \mid g(x)$.

证：（参见课本 p19）

4. 因式分解及唯一性定理

数域 P 上每一个次数大于等于 1 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积.

所谓唯一性是说若有两分解式

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\ldots p_x(x)=q_1(x)q_2(x)\ldots q_t(x),$$

那么必有 $s=t$ 且适当排列因式的顺序后有 $p_i(x)=c_iq_i(x), i=1,2,\ldots,s$ ，其中 $c_i(i=1,2,\ldots,s)$ 是一些非零常数.

证： 先证分解式的存在性.

因为一次多项式都是不可约的，所以 $n=1$ 时结论成立.

假设结论对次数低于 n 的多项式成立. 设 $\partial(f(x))=n$.

若 $f(x)$ 是不可约的，则结论显然成立

若 $f(x)$ 是可约的，则 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ ，其中 $\partial(f_1(x))<n, \partial(f_2(x))<n$. 由归纳假设知， $f_1(x), f_2(x)$ 都可分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积. 把 $f_1(x), f_2(x)$ 的分解式相乘，就得到 $f(x)$ 的一个分解式. 由归纳原理，结论成立.

再证唯一性. 设 $f(x)$ 可分解成不可约多项式的乘积：

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\ldots p_x(x)=q_1(x)q_2(x)\ldots q_t(x) \qquad （*）（下对 s 作归纳法）$$

当 $s=1$ 时， $f(x)=p_1(x)$ 是不可约多项式，由不可约多项式的定义必有 $t=s=1$ 且 $f(x)=p_1(x)=q_1(x)$

现设不可约多项式的个数为 $s-1$ 时唯一性已证.

由（1），$p_1(x)\mid q_1(x)q_2(x)\ldots q_t(x)$. 因此，$p_1(x)$ 必然除尽其中一个，不妨设 $p_1(x)\mid q_1(x)$

因为 $q_1(x)$ 也是不可约多项式，所以 $q_1(x)$ 的因式只有非零常数和它本身的非零常数倍，但 $p_1(x)\neq c(\partial(p_1(x))\geq 1)$，故

$$p_1(x)=c_1q_1(x) \qquad （2）$$

在（1）式中代入（2）后消去 $q_1(x)$，就有

$$g(x)\triangleq p_2(x)\ldots p_s(x)=c_1^{-1}q_2(x)\ldots q_t(x)$$

由归纳假设，有 $s-1=t-1$，即 $s=t$ （3）

并且适当排列次序之后有

$p_2(x)=c_2^{'}(c_1^{-1}q_2(x))$，即 $p_2(x)=c_2q_2(x), p_i(x)=c_iq_i(x), i=3,4\ldots,s$ （4）

（2）（3）（4）合起来即为所要证的. 这就证明了分解的唯一性.

5. 标准分解式

把多项式 $f(x)$ 的分解式中不可约多项式都化为首项系数是 1 的不可约多项式，并且把相同因式的乘积写成幂的形式：

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

其中 C 是 $f(x)$ 的首项系数，$p_1(x), p_2(x),\cdots, p_s(x),$ 是不同的首项系数为 1 的不可约多项式，$r_1,r_2,\cdots,r_s\in Z^+$. z 这种分解式称为 $f(x)$ 的**标准分解式**.

6. 求最大公因式的方法二

若多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的标准分解式如下：

$$f(x)=c_1p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)h_1^{m_1}(x)h_2^{m_2}(x)\cdots h_i^{m_i}(x),$$

$$g(x)=c_2p_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x)q_1^{k_1}(x)q_1^{k_1}(x)\cdots q_t^{k_t}(x)$$

多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式等于标准分解式中出现的相同的不可约多项式方幂的乘积，且所带的方幂指数等于分解式中所带的方幂较小的那一个。即 $(f(x),\mathrm{g}(x))=p_1^{\lambda_1}(x)p_2^{\lambda_2}(x)\cdots p_s^{\lambda_s}(x)$，其中 $\lambda_i=\min(r_i,l_i)$.

五、小结

1. 请同学叙述不可约多项式的概念及其性质.
2. 请同学叙述唯一因式分解定理。
3. 多项式的标准分解式的作用和意义是什么？

六、作业（习题册、预习 1.6 重因式）

七、教学反思

教学的时间：2020 年 4 月 日 **教学学时数:2 学时**

1.6 重因式

一、教学目标

1. 掌握重因式的概念及性质。

2. 掌握判定一个多项式有重因式的方法。

二、教学重点

重因式的概念及性质

三、教学难点

重因式的概念及性质

四、教学过程

这一节将讨论数域 P 上多项式的因式分解问题。首先介绍重因式的概念。

1. 重因式的定义

定义 9 不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 k 重因式，如果 $p^k(x)\mid f(x)$，而 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$.

若 $k=0$，定义中 $p^{0+1}(x)=p(x)\nmid f(x)$，即 $p(x)$ 根本不是 $f(x)$ 的因式。

若 $k=1$，那么 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的单因式。

若 $k>1$，那么 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的重因式。

在许多问题中，要求所讨论的多项式是没有重因式的，下面介绍如何判断多项式有没有重因式。求多项式的重因式以及将 $f(x)$ 变为不含重因式的多项式的方法。

当然，如知道了 $f(x)$ 的标准分解式 $f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\ldots p_s^{r_s}(x)$

那么也就知道了 $p_1(x)p_2(x)\ldots p_s(x)$ 分别是 $f(x)$ 的 $r_1,r_2,\ldots,r_s$ 重因式。即其中指数等于 1 的不可约因式是单因式，指数大于 1 的不可约因式是重因式。但是，由于没有一个一般的方法能将多项式分解成标准分解式，所以需要用另外的方

法来判断多项式有没有重因式。下面我们用微商的概念来解决这个问题。

2. 多项式的微商（导数）的定义

设多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$. 定义它的微商是比 $f(x)$ 低一次的多项式

$$f'(x)=a_nnx^{n-1}+a_{n-1}(n-1)x^{n-2}+\dots+a_1.$$

这种规定自然来源于数学分析。但是在目前的情况下，我们只把它看作是一个形式的定义。通过直接的经验，可以得出关于多项式的微商的基本公式

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x) \qquad (cf(x))'=cf'(x)$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad (f^m(x))'=mf^{m-1}(x)f'(x)$$

3. 重因式的判定

定理 6 若不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的 $k(k\ge 1)$ 重因式，则它是微商 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式。特别地，$f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式。

推论 1 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(k\ge 1)$ 重因式，那么 $p(x)$ 是 $f(x),f'(x),\dots,f^{k-1}(x)$ 的因式，但不是 $f^{k}(x)$ 的因式。

推论 2 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充分必要条件为 $p(x)$ 是 $f(x),f'(x)$ 的公因式。

推论 3 非零多项式 $f(x)$ 没有重因式 $\Leftrightarrow$ $f(x),f'(x)$ 互素。

例 1 判断 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$ 是否有重因式.

有时候常常希望所讨论的多项式没有重因式，特别是在讨论与解方程有关的问题时。因此需要求一个多项式 $g(x)$ 代替 $f(x)$，使 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的所有互不相同的不可约因式的乘积，但 $g(x)$ 没有重因式。下面我们讨论这个问题。

设 $f(x)$ 的标准分解式为 $f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\ldots p_s^{r_s}(x)$

$(f(x),f'(x))=f(x)=p_1^{r_1-1}(x)p_2^{r_2-1}(x)\ldots p_s^{r_s-1}(x)$

于是 $\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=(p_1(x)p_2(x)\ldots p_s(x))$

例 2 设 $f(x)=x^5+7x^4+17x^3+14x^2-4x-8\in Q[x]$

（1）判断 $f(x)$ 是否有重因式，若有求出来，并说明重数

（2）求 $g(x)$，使 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的所有不同的不可约因式之积，但没有重因式.

（3）求 $f(x)$ 的标准分解式.

五、小结

1. 叙述重因式的概念及性质。
2. 判定一个多项式有重因式的方法？
3. 如何把一个多项式的所有因式写出来，但是没有重因式的方法？

六、作业（习题册）

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日　　　　教学学时数:2 学时

1.7 多项式函数

一、教学目标

1. 掌握多项式函数、多项式的根等概念。

2. 会用余数定理及其推论证明有关命题。

二、教学重点

余数定理及其推论的应用

三、教学难点

余数定理及其推论的应用

四、教学过程

直到现在为止，我们始终是纯形式地讨论多项式，也就是把多项式看作形式的表达式，在这一节，我们将从函数的观点考察多项式。

1. 多项式函数的概念

设给定 $P[x]$ 中的一个多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ （1）和一个数 $\alpha\in P$。在（1）中用 α 代替 x，就得到 P 中的一个数 $a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n$，这个数叫做 $f(x)$ 当 $x=\alpha$ 时的值，记为 $f(\alpha)$。

零多项式在 $x=\alpha$ 时的值为零，零次多项式 $f(x)=a$ 在 $x=\alpha$ 时的值为 a。

这样，对 P 中的每一个数 α，就有 P 中唯一确定的数 $f(\alpha)$ 与它对应，于是就得到数域 P 上的一个函数，这个函数是由多项式 $f(x)$ 定义的。可由一个多项式来定义的函数称为**数域 P 上的多项式函数**。当 P 是实数域时，这就是数学分析中所讨论的多项式函数。

下面讨论两个多项式的和与差当 $x=\alpha$ 时的值与这两个多项式当 $x=\alpha$ 时的函数值的关系。

利用多项式加法和乘法的定义，以及多项式当 $x=\alpha$ 时的值，以及数的运

算规则，不难验证有如下的关系：

若 $h_1(x)=f(x)+g(x),h_2(x)=f(x)g(x)$，则 $h_1(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha),h_2(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)$ （＊）

也就是说两个多项式的积当 $x=\alpha$ 时的值等于这两个多项式当 $x=\alpha$ 时的值的积。

2. 多项式的根

利用带余除法，我们有下列常用的定理。

定理（余数定理） 用一次多项式 $x-\alpha$ 去除多项式 $f(x)$，所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(\alpha)$。

证明 用 $x-\alpha$ 去除 $f(x)$，由带余除法得 $f(x)=(x-\alpha)q(x)+r(x)$，其中 $\partial(r(x))=0$ 或 $r(x)=0$，总之，$r(x)$ 为常数 c，即 $f(x)=(x-\alpha)q(x)+c$，以 α 代 x 得

$f(\alpha)=(\alpha-\alpha)q(\alpha)+c=c$。

定义 若 $f(x)$ 当 $x=\alpha$ 时的函数值 $f(\alpha)$=0，则 α 称为 $f(x)$ 的一个根或零点。

由余数定理可得根与一次因式有如下关系。

推论 α 为 $f(x)$ 的根 $\Leftrightarrow (x-\alpha)|f(x)$

证明 由余数定理， $f(x)=(x-\alpha)q(x)+f(\alpha)$ （＊＊）

α 为 $f(x)$ 的根 $\Leftrightarrow f(\alpha)=0\Leftrightarrow (x-\alpha)|f(x)$。

注 利用这个概念，我们可定义重根的概念。

定义 α 称为 $f(x)$ 的 k 重根，若 $x-\alpha$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式。当 $k=1$ 时，α 称为单根；当 $k\succ 1$ 时，α 称为重根。

例 1 求 k，使 $f(x)=x^3+3x^2+kx+1$ 有重根。

例 2 检验 2 是不是 $f(x)=x^6-6x^5+11x^4-x^3-18x^2+20x-8$ 的根，若是，它是几重根。

定理 8 $P[x]$ 中的 n 次多项式 $f(x)$ $(n\geq 0)$ 在数域 P 中的根不可能多于 n 个，重根按重数计算。

证明 当 $n=0$ 时，$f(x)=c(c\neq 0)$，这时 $f(x)$ 在数域 P 中的根的个数为零，故结论成立。

设 $n\succ 0$，令 $x-\alpha_1,x-\alpha_2,\cdots x-\alpha_s$ 是函数在 $f(x)$ 的标准分解式中的所有不同的一次因式它

们的重数分别为 $k_1,\cdots,k_s$，那么 $f(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}g(x)$，（＊）

其中 $g(x)$ 在 P 中再没有一次因式，因此，由定理 7 的推论知 $f(x)$ 在数域 P 中的不同的根只能是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，它们的重数分别是 $k_1,\cdots k_s$，若重根按重数计算，则 $f(x)$ 在数域 P 中的根的个数为 $k_1+\cdots k_s$ 个，比较（＊）式两边的次数得 $k_1+\cdots k_s\leq n$。

3. 多项式与其确定的函数之间的关系

由定义，两个多项式相同是指除去系数为零的项外，同次项的系数全相等。在上面我们看到，每个多项式函数都可由一个多项式来定义，那么，不同的多项式会不会定义出相同的函数呢？也就是问，是否可能有 $f(x)\neq g(x)$，而对 P 中的所有的数 α，都有 $f(\alpha)=g(\alpha)$？下面我们讨论这个问题。

定理 9 若多项式 $f(x),g(x)$ 的次数都不超过 n，而它们对 $n+1$ 个不同的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_{n+1}$ 有相同的值，既 $f(\alpha_i)=g(\alpha_i),i=1,2,\cdots n+1$，则 $f(x)=g(x)$。

证明 由条件有 $f(\alpha_i)-g(\alpha_i)=0,i=1,2,\cdots n+1,$ 这就是说多项式 $f(x)-g(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根。

如果 $f(x)-g(x)\neq 0$，由定理 8 知，它不可能有 $n+1$ 个根，与 $f(x)-g(x)$ 有 $n+1$ 个根矛盾，因此 $f(x)-g(x)$=0，即 $f(x)=g(x)$。

不同的多项式定义的函数也不相同。

五、小结

1. 叙述余数定理。
2. 叙述多项式根的概念和定理 9 的内容。

六、作业（习题册）

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日 **教学学时数:2 学时**

1.8 复系数与实系数多项式的因式分解

一、教学目标

1. 掌握代数基本定理。
2. 复系数与实系数多项式的因式分解定理。

二、教学重点

复系数与实系数多项式的因式分解定理

三、教学难点

实系数多项式的因式分解

四、教学过程

课本 P19 因式分解及唯一性定理讨论了在一般数域上的多项式的因式分解问题，现在看一下复数域与实数域上的多项式的因式分解。复数域与实数域既然都是数域，因此前面所得的结论对它们也是成立的，但这两个数域又有它们的特殊性，所以某些结论就可以进一步具体化。

对复数域，我们有重要的代数学基本定理。

1. 代数基本定理

代数基本定理 每个次数≥ 1的复系数多项式在复数域中有一根。

利用根与一次因式的关系，代数基本定理显然可等价的叙述为：

每个次数≥ 1的复系数多项式在复数域中一定有一个一次因式。

设 $f(x)$ 是一个 $n(n>1)$ 次复系数多项式，由代数基本定理

$f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x)$,这里$\alpha(f_1(x))=n-1$，也就是说复数域上次数大于 1 的多项式全是可约的，而一次多项式总是不可约的，故复数域上的不可约多项式只有一次多项式。于是分解定理在复数域上可叙述为：

2. 复系数多项式因式分解定理 每个次数≥ 1的复系数多项式在复数域中都

可以唯一地分解为一次因式的乘积。

因此，复系数多项式具有标准分解式： $f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_s)^{l_s}$，

其中 $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 是不同的复数，$l_1,\cdots l_s$ 是正整数，标准分解式说明**每个 n 次复系数多项式恰有 n 个重根（重根按重数计算）。**

下面讨论实系数多项式，以下的事实是基本的，即：**若 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的根，那么 α 的共轭数 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根。**

证： 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $a_i\in R$，若 α 为根，则

$$f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

两边取共轭有 $f(\overline{\alpha})=a_n\overline{\alpha}^n+a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_0=0$. $\therefore\overline{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 为复根.

3. 实系数多项式因式分解

实系数多项式因式分解定理 每一个次数 ≥ 1 的实系数多系多项式再实数域上都可唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

证： 对 $f(x)$ 的次数作数学归纳

① 若 $\partial(f(x))=1$， $f(x)$ 就是一次因式，结论成立

② 假设对次数<n 的多项式结论成立，设 $\partial(f(x))=n$， 由代数基本定理，$f(x)$ 有一复根 α .

若 α 为实数 则 $f(x)=(x-\alpha)f_1(x)$，其中 $\partial(f_1)=n-1$.

若 α 不为实数，则 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的复根，于是

$f(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})f_2(x)=(x^2-(\alpha-\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha})f_2(x)$

设 $\alpha=a+bi$，则 $\overline{\alpha}=a-bi$, $\alpha+\overline{\alpha}=2a\in R$ $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2\in R$ ，

即在 R 上 $x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$ 是一个二次实系数不可约多项式，从而 $\partial(f_2)=n-2$

由归纳假设 $f_1(x)$、 $f_2(x)$ 可分解成一次因式与二次不可约多项式的乘积.

由归纳原理，定理得证.

推论 1. $\forall f(x)\in R[x], f(x)$ 在 R 上具有标准分解式

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r}$$ 其中 $c_1,c_2\cdots c_s,p_1\cdots p_r,q_1\cdots q_r\in R \quad k_1\cdots k_s,l_1\cdots l_s\in z^+$ ，

且 $p_i{}^2-4q_i<0, i=1,2\cdots r$ ，即 $x^2+p_ix+q_i$ 为 R 上的不可约多项式

推论 2. 在实数域上不可约多项式只有一次多项式和某些二次不可约多项式，所有次数>3 的多项式皆可约.

例 1 求 x^n-1 在 C 上的标准分解式

解：在复数范围内 x^n-1 有 n 个复根 $1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots\varepsilon^{n-1}$，这里

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\quad \varepsilon^n=1$$

$$\varepsilon^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\quad k=1,2,\cdots n$$

$$\therefore x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$$

在实数域范围内课下自己完成。

五、小结

实数域和复数域上不可约因式的类型有哪些？

六、作业（习题册）

七、教学反思

教学的时间：2020 年 月 日　　　　教学学时数:2 学时

1.9 有理系数多项式

一、教学目标

1. 理解本原多项式的概念，会用艾森施坦因判别法。
2. 掌握整系数多项式的有理根的求法。

二、教学重点

1. 本原多项式的概念。
2. 艾森施坦因判别法。
3. 整系数多项式的有理根的求法。

三、教学难点

整系数多项式的有理根的求法

四、教学过程

本节讨论有理数域上的一元多项式的因式分解，所谓有理数域上的一元多项式就是系数为有理数的一元多项式，也称为有理系数多项式.

在此之前学习了在一般数域上的多项式的因式分解定理：数域 P 中每个次数 ≥ 1 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解为数域 P 中一些不可约多项式的乘积.（课本 P19）这个定理在有理数域上当然也成立. 也就是说，每个次数 ≥ 1 的有理系数多项式都可以唯一地分解为不可约的有理系数多项式的乘积.

（一）有理系数多项式的因式分解可归结为整系数多项式的因式分解

1 本原多项式　若一个非零的整系数多项式 $q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0$ 的系数 $b_n,b_{n-1},\cdots b_0$ 没有异于 ± 1 的公因子，就称为一个本原多项式.

2 有理系数多项式与本原多项式的关系.

引理 1　对任意非零有理系数多项式 $f(x)$，都存在有理数 r，本原多项式 $g(x)$，使得 $f(x)=rg(x)$，且这种表示法除了差一个正负号是唯一的.

证明 （存在性） 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 为非零有理系数多项式，$a_n,a_{n-1},\cdots,a_0$,分母的最小公倍数为 c. 则 $cf(x)$ 是一整系数多项式,若 $cf(x)$ 各系数有异于 ±1 的最大公因子 d，将其提出得 $cf(x)=dq(x)$，则 $q(x)$ 的系数是互素的整数，因而 $q(x)$ 是本原多项式，于是 $f(x)=\frac{d}{c}g(x)=rg(x)$，其中 $r=\frac{d}{c}$.

（唯一性）若 $f(x)=rg(x)=r_1g_1(x)$,其中 r,r_1 为有理数，$g(x),g_1(x)$ 为本原多项式，则必有 $r,r_1\in Z,r=\pm r_1,g(x)=\pm g_1(x)$.

3 本原多项式的性质

定理 10 两个本原多项式乘积还是本原多项式.

证 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，$g(x)=b_nx^m+\cdots+b_0$ 是两个本原多项式，而 $h(x)=f(x)g(x)=d_{n+m}x^{n+m}+d_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+d_0$ 是它们的乘积.（用反证法）

若 $h(x)$ 不是本原的，则 $h(x)$ 的系数就有一个异于 ±1 的公因子，它们就能被一个素数 P 整除.

因为 $f(x)$ 是本原多项式，以它的各项系数没有异于 ±1 的公因子，因为 $p\neq\pm1$，故 $p|a_0,p|a_1,\cdots p|a_{i-1},p$ 不整除 a_i. 同样的，$g(x)$ 也是本原多项式，设 b_j 是第一个不能被 P 整除的系数，即 $p|b_0,\cdots p|b_{j-1},p$ 不整除 b_j.

现在来看 $h(x)$ 的项 $d_{i+j}x^{i+j}$ 的系数 d_{i+j}，

$$d_{i+j}=a_{i+j}b_0+a_{i+j-1}b_1+\cdots+a_{i+1}b_{j-1}+a_ib_i+a_{i-1}b_{j+1}+a_1b_{i+j-1}+a_0b_{i+j},$$

由 p 不整除 a_i，p 不整除 b_j，而且 p 是素数知 p 不整除 a_ib_j，由 $p|a_0,\cdots p|a_{i-1},p|b_0,\cdots p|b_{j-1}$ 知等式右边其余各项都可以被 p，于是 p 不整除 d_{i+j}，这与 $p|d_{i+j}$ 矛盾. 故 $h(x)$ 一定是本原多项式.

4 一致性

定理 11 若一非零的整系数多项式能够分解为两个次数较低的有理系数

多项式的乘积，则它一定能分解为两个次数较低的整数多项式的乘积.

证明 设整系数多项式 $f(x)$ 能够分解为 $f(x)=g(x)h(x)$ （＊），其中 $g(x),h(x)$ 是有理系数多项式，且 $\partial(g(x))<\partial(f(x)),\partial(f(x))<\partial(f(x))$，设 $f(x)=af_1(x),g(x)=rg_1(x),h(x)=sh_1(x)$ （＊＊），这里 $f_1(x),g_1(x),h_1(x)$ 都是本原多项式，a 是整数，r,s 是有理数. 于是 $af_1=rsg_1(x)h_1(x)$，由定理 10，$g_1(x)h_1(x)$ 是本原多项式，$rs=\pm a$，即 rs 是一整数，因此有 $f(x)=(rsg_1(x))h_1(x)$，这里 $rsg_1(x),h_1(x)$ 都是整系数多项式且次数都低于 $f(x)$ 的次数.

推论 设 $f(x),g(x)$ 是整系数多项式，且 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $h(x)$ 是有理系数多项式. 若 $g(x)$ 为本原多项式，那么 $h(x)$ 一定是整系数多项式.

证明 因为 $g(x)$ 为本原多项式，所以在定理 11 的证明中，$r=1,s=\pm a$ 是一个整数，因此 $h(x)=sh_1(x)$ 是一个整系数多项式.

（二）有理系数多项式的有理根的求法

应用以上的推论，可得出下面的一个定理，此定理提供了一个求有理系数多项式的全部有理根的方法.

定理 12 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 是一个整系数多项式，而 $\dfrac{r}{s}$ 是它的一个有理根，其中 r,s 互素，那么有 $s|a_n,r|a_0$，特别地，若 a_n=1，则 $f(x)$ 的有理根都是整根，而且是 a_0 的因子.

证明 把 $f(x)$ 看成有理系数多项式，因为 $\dfrac{r}{s}$ 是它的一个有理根，所以 $(x-\dfrac{r}{x})|f(x)$，从而 $(sx-r)|f(x)$.

设 $f(x)=(sx-r)(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0)$，（＊）其中 $b_{n-1},\cdots,b_0$ 都是有理数. 因为 r,s 互素，所以 $rx+s$ 是一个本原多项式. 由上述推论可知，$b_{n-1},\cdots,b_0$ 都是整数. 比较（＊）式两边 n 次项的系数及常数项得，$a_n=sb_{n-1},a_0=-rb_0$，因此 $s|a_n,r|a_0$.

例 1 求多项式 $f(x)=2x^4-x^3+2x-3$ 的有理根.

例 2 证明 $f(x)=x^3-2x+2$ 在有理数域上不可约.

证明 若它在有理数域上可约，则它至少有一个一次的有理因式，因此有一个有理根，由 $a_3=1$，据定理 12，$f(x)$ 的根只可能是整根，且是常数项 2 的因子，故只可能是 $\pm1,\pm2$. 经验证，$\pm1,\pm2$ 都不是 $f(x)$ 的根，从而 $f(x)$ 没有有理根，故 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

（三）艾森斯坦因判别法

由第 1.8 节知判定复数域和实数域上的多项式是否可约很容易，但判定有理数域上的多项式是可约不是一个容易解决的问题.

有理系数多项式的因式分解问题可以归结为 整系数多项式的因式分解问题，从而有理系数多项式是否可约与相应的整系数多项式是否可约是一致的. 因此，只须讨论整系数多项式在有理数域上不可约的判定方法，下面给出一个称为艾森斯坦因的判别法，它只是一个充分条件，但应用很广.

定理 13 （艾森斯坦因 Eisenstein 判别法）设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 是一个整系多项式. 若存在一个素数 p，使得

1 p 不整除 a_n；

2 $p|a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0$；

3 p^2 不整除 a_0；则 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的.

证明 （反证法）若 $f(x)$ 在有理数域上可约，则由定理 11，$f(x)$ 可分解为两个次数较低的系数多项式的乘积：

$$f(x)=(b_lx^l+b_{l-1}x^{l-1}+\cdots+b_0)(c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_0)(l<n,m,n,l+m=n)$$

因此，$a_n=b_lc_m,a_0=b_0c_0$. 因为 $p|a_0$，所以 $p|b_0$ 或 $p|c_0$（p 是素数），但 p^2 不整

除a_0，所以p不能同时整除b_0,c_0.（不然，$a_0=b_0c_0=(b_1p)(c_1p)=p^2(b_1c_1)$，即$p^2|a_0$，矛盾）因此，不妨设$p|b_0$，但$p$不整除$c_0$. 另一方面，因$p$不整除$a_n$，所以$p$不整除$b_l$，假设$b_0,b_1,\cdots b_l$中第一个不能被$p$整除的是$b_k$，比较$f(x)$中$x^k$的系数，得等式 $a_k=b_kc_0+b_{k-1}c_1+\cdots+b_0c_k$，式中$a_k,b_{k-1},\cdots,b_0$都能被$p$整除，所以$b_kc_o$也必须能被$p$整除，但$p$是一个素数，所以$b_k,c_0$中至少有一个被$p$整除，这与$p$不整除$b_k$，$p$不整除$c_0$矛盾.

例 证明 $f(x)=x^6+x^3+1$在有理数域上不可约.

解 令$x=y+1$得

$$f(y+1)=(y+1)^6+(y+1)^3+1$$

$$=\left(y^6+C_6^1y^5+C_6^2y^4+C_6^3y^3+C_6^4y^2+C_6^5y^1+C_6^6y^0\right)+\left(y^3+3y^2+3y+1\right)+1$$

$$=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+6y^1+3$$

取素数 p=3 满足艾森斯坦因判别法，因此$f(y+1)$在有理数域上不可约，从而$f(x)=x^6+x^3+1$在有理数域上不可约.

五、小结

1. 本原多项式的乘积是不是本原多项式？

2. 如何将有理数域上的多项式化为整系数多项式？

3. 请叙述定理 12 和定理 13 的内容.

六、作业

1. 习题册

2. 思考整系数多项式在有理数上可约与有理数域上有根的区别和联系.

七、教学反思