



# 行列式按行（列）展开



# 一、引例

例 设

$$D = \left| \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ \hline c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right| = D_1 D_2$$

“降阶” 简化运算

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$



**思考：**有没有对行列式进行“**降阶**”的一般方法？从而**简化计算**？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{a_{11}a_{22}a_{33}}{\quad} + \frac{a_{12}a_{23}a_{31}}{\quad} + \frac{a_{13}a_{21}a_{32}}{\quad} \\
 - \frac{a_{11}a_{23}a_{32}}{\quad} - \frac{a_{12}a_{21}a_{33}}{\quad} - \frac{a_{13}a_{22}a_{31}}{\quad}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

## 二、余子式与代数余子式

在 $n$ 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，把元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行和第 $j$ 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 $a_{ij}$ 的余子式，记作 $M_{ij}$ 。

记  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  叫做元素 $a_{ij}$ 的代数余子式。



例如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

The element  $a_{23}$  is circled in blue. A red dashed line passes through the entire second row and the entire third column, intersecting at the circled element  $a_{23}$ .

元素  $a_{23}$  的余子式和代数余子式分别是

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$$

# 回到开始的问题

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$$

## 三、行列式按行（列）展开

### 定理

行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

## 三、行列式按行（列）展开

### 科普小知识



克莱默(Cramer, Gabriel, 1704-1752)瑞士数学家。他一生未婚，专心治学，平易近人且德高望重。

主要著作是《代数曲线的分析引论》(1750)，对行列式的定义和展开法则给出了比较完整、明确的阐述。

### 三、行列式按行（列）展开

例1

将  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$  分别按第二行和第三列展开.

解：按第二行展开：

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$= \boxed{0}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \boxed{0}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \boxed{3}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 15$$

## 三、行列式按行（列）展开

例1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

第三列展开.

按第三列展开:

$$D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

$$= -1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 15$$



**思考：** 有没有对行列式进行“降阶”的一般方法？  
从而简化计算？

**回答：** 一般方法是：行列式按行（列）展开

尽量选择含零元素较多的行（列），可简化计算

## 三、行列式按行（列）展开

### 例2

计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

## 行列式按行（列）展开

### 课堂小结

#### 行列式按行（列）展开

——用“降阶”简化计算行列式的方法

#### 选择零元素较多的行（列）

——应用此技巧

谢谢大家聆听！

