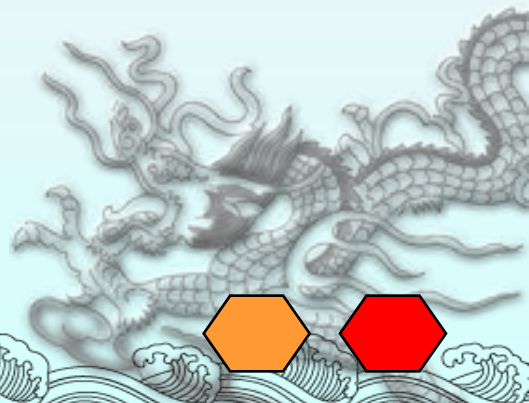


# 3.4空间直线的方程



# 一、空间直线的对称式（标准）方程

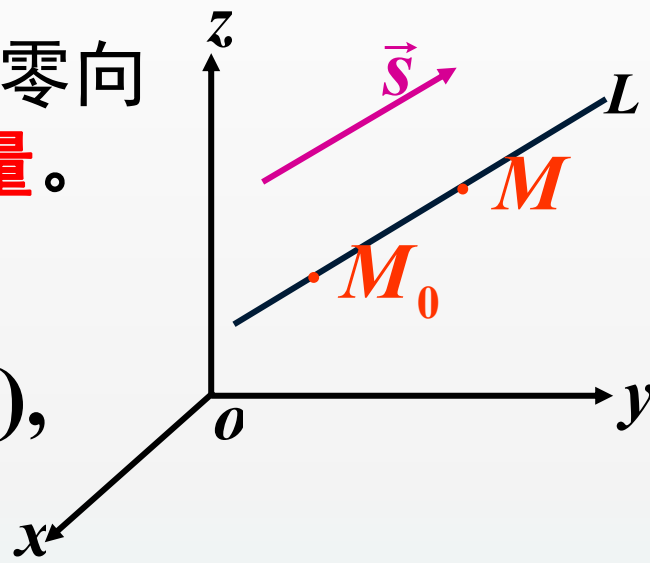
## 1. 由直线上一点 $M_0$ 与直线的方向所决定的直线方程

在空间给定了一点 $M_0$ 与一个非零向量 $\mathbf{v}$ ，那么通过点 $M_0$ 且与向量 $\mathbf{v}$ 平行的直线 $l$ 就唯一地被确定，向量 $\mathbf{v}$ 叫做直线 $l$ 的方向向量。



# 方向向量的定义

任何一个与直线  $l$  平行的非零向量都可以作为直线  $l$  的**方向向量**。



$$M_0(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z),$$

$$\forall M \in L, \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\vec{s} = \{m, n, p\}, \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$



现按给定条件导出直线的方程。在空间取标架

$$\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$$

并设 $M_0$ 的径矢为 $\overrightarrow{OM_0} = \mathbf{r}_0$ , 则L上任意点M的径矢为

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$$

于是点M在L上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\mathbf{v}$ 共线:  $\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{v}$

即

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$$

所以

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \quad (3.4-1)$$

该方程称为直线L的**矢量式参数方程**, 其中**t**为参数。

如果设  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $M(x, y, z)$ , 则

$$\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\} \quad \text{又设 } \mathbf{v} = \{X, Y, Z\}$$

则由 (3.4-1) 得:

$$\begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \\ z = z_0 + Zt \end{cases} \quad (3.4-2)$$

称之为直线的**坐标式参数方程**

由 (3.4-2) 消去参数  $t$ , 那么得到

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z} \quad (3.4-3)$$

(3.4-3) 叫做直线  $L$  的**对称式方程**或称直线  $L$  的**标准方程**

注：当方向向量的某个坐标为零时，比如  $m = 0, n \neq 0, p \neq 0$  时，方程仍然写为

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

此时理解为二平面的交线  $\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \end{cases}$

当方向向量的某两个坐标为零时，比如  $m = 0, n = 0, p \neq 0$  时，方程也仍然写为

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{p},$$

理解为交线  $\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}$  (考虑其几何意义)

**例1** 求过点 $(1,0,-2)$ 且与平面 $3x+4y-z+6=0$ 平行,又与直线 $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}$ 垂直的直线方程.

**解:** 设所求线的方向向量为 $\vec{s}$ ,

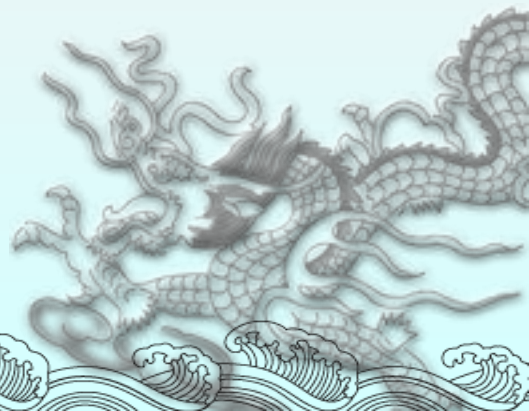
已知平面的法向量  $\vec{n} = \{3,4,-1\}$ ,

已知直线的方向向量  $\vec{s}_1 = \{1,4,1\}$  取  $\vec{s} = \vec{n} \times \vec{s}_1$

$$\vec{s} = \vec{n} \times \vec{s}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \{8, -4, 8\} = 4\{2, -1, 2\}$$

因此,所求直线方程为

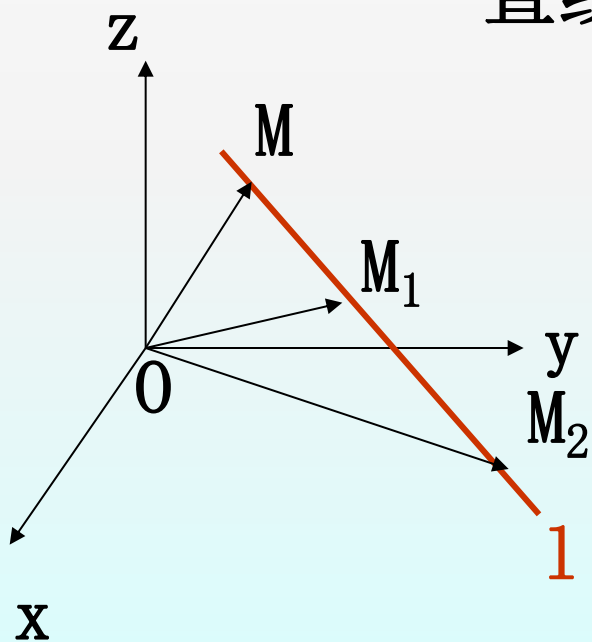
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$$



例2 求通过空间两点  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  
的直线1的方程。

解：取  $\vec{V}=\overrightarrow{M_1M_2}$  为直线的方向向量，

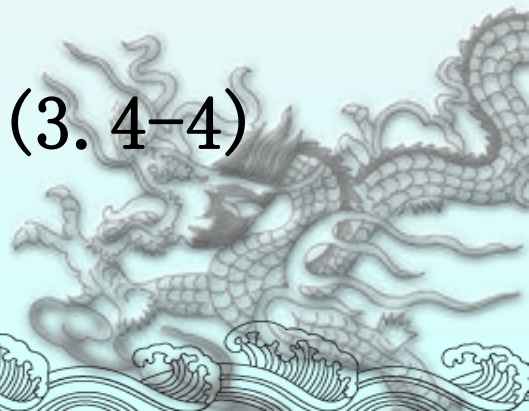
直线上的动点为  $M(x, y, z)$



$M_1(x_1, y_1, z_1)$  为直线上的定点。

于是可求得：

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) \quad (3.4-4)$$



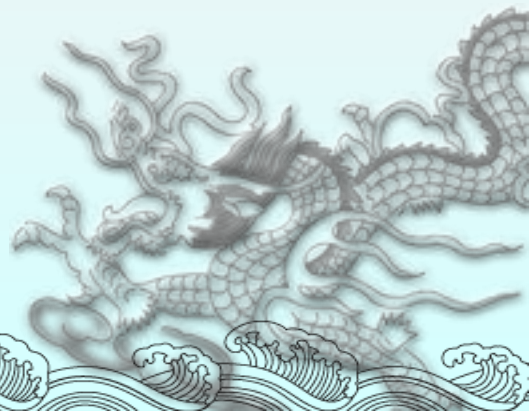
## 坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} \quad (3.4-5)$$

## 对称式方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (3.4-6)$$

方程 (3.4-4), (3.4-5), (3.4-6) 都叫做直线  $l$  的两点式方程。



在直角坐标系下，直线的方向矢量常常取单位矢量

$$v^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\},$$

这时直线  $l$  的参数方程为

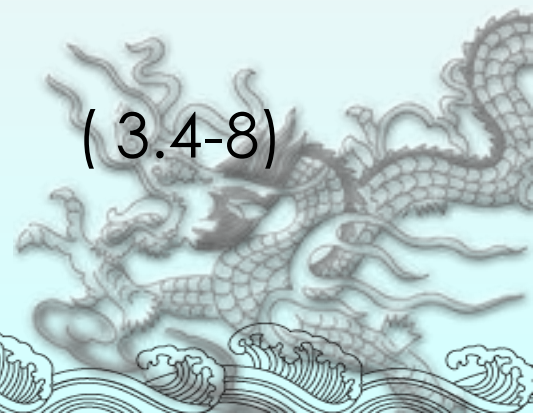
$$r = r_0 + tv^0$$

(3.4-7)

或

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \cos \beta \\ z = z_0 + t \cos \gamma \end{cases}$$

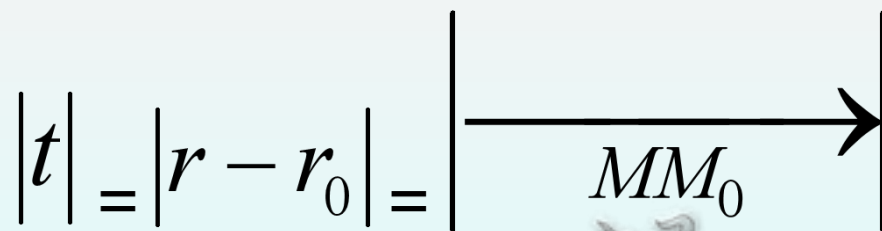
(3.4-8)



直线  $l$  的对称式方程为

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}, \quad (3.4-9)$$

这时(3.4-7)中的  $t$  的绝对值恰好是直线  $l$  上的两点  $M_0$  与  $M$  间的距离，这是因为

$$|t| = |r - r_0| = \left| \overrightarrow{MM_0} \right|$$




直线的方向矢量的方向角  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  与方向余弦  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  分别叫做直线的方向角与方向余弦；

直线的方向矢量的分量  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  或与它成比例的一组数  $l$ ,  $m$ ,  $n$  ( $l : m : n = X : Y : Z$ ) 叫做直线的方向数。

由于与直线共线的任何非零矢量，都可以作为直线的方向矢量，

因此  $\pi - \alpha$ ，  $\pi - \beta$ ，  $\pi - \gamma$  以及

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta,$$

$$\cos(\pi - \gamma) = -\cos \gamma,$$

也可以分别看成是直线的方向角与方向余弦。

显然直线的方向余弦与方向数之间有着下面的关系：



$$\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

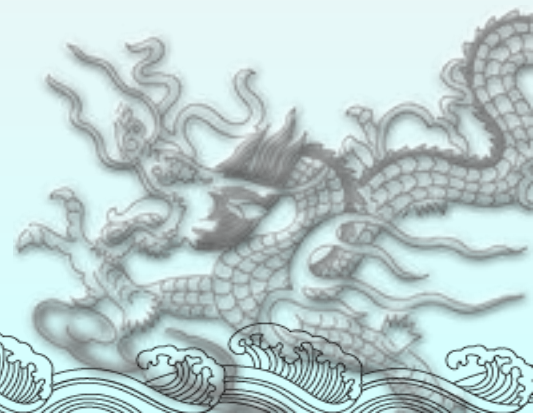
$$\cos \beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (3.4-10)$$

$$\cos \gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\text{或 } \cos \alpha = -\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\cos \beta = -\frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$


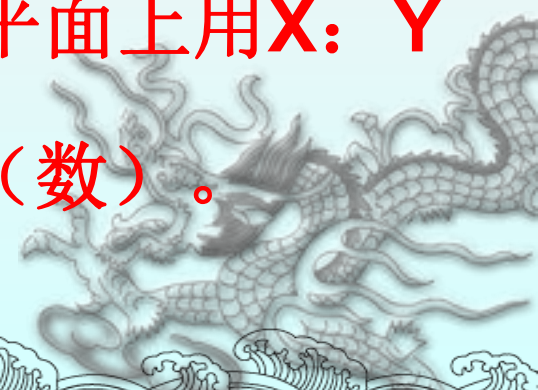
$$\cos \gamma = -\frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (3.4-10')$$



由于这里所讨论的直线，一般都不是有向直线，  
而且两非零向量 $\{X, Y, Z\}$ 与 $\{X', Y', Z'\}$ 共线  
的充要条件为

$$\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'} \quad \text{或写成} \quad X: Y: Z = X': Y': Z'$$

由于我们将用 $X: Y: Z$ 来表示与非零向量 $\{X, Y, Z\}$   
共线的直线的方向（数）；同样，在平面上用 $X: Y$   
表示与向量 $\{X, Y\}$ 共线的直线的方向（数）。



## 二、空间直线的一般方程

1.定义 空间直线可看成两平面的交线.

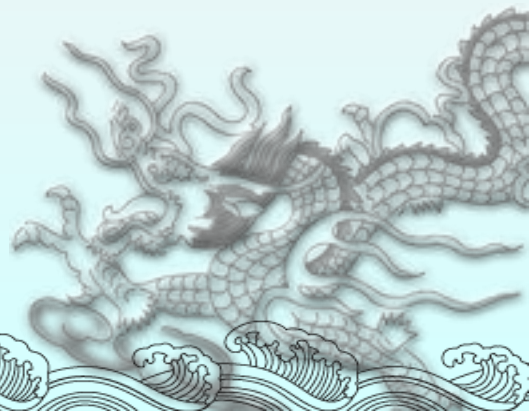
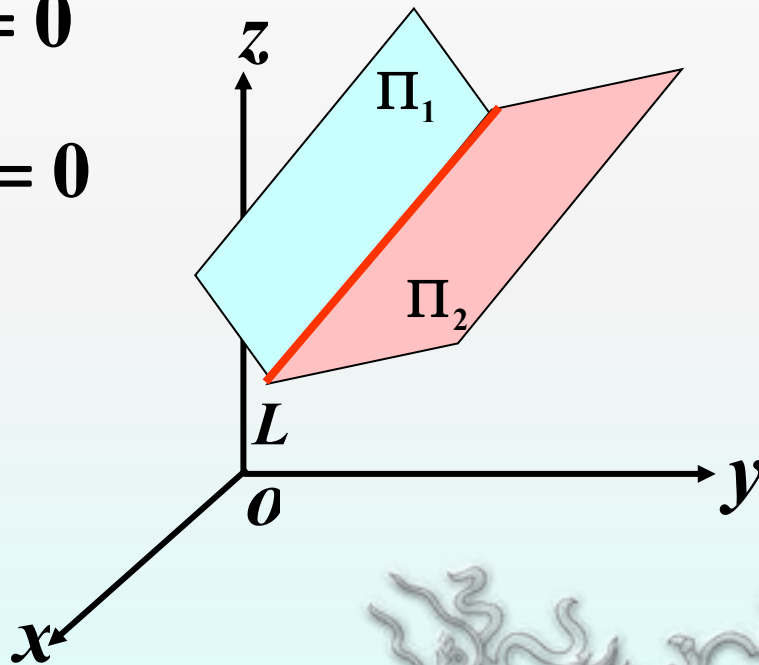
$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

空间直线的一般方程

(注：两平面不平行)



设有两个平面  $\pi_1$  和  $\pi_2$  的方程为：

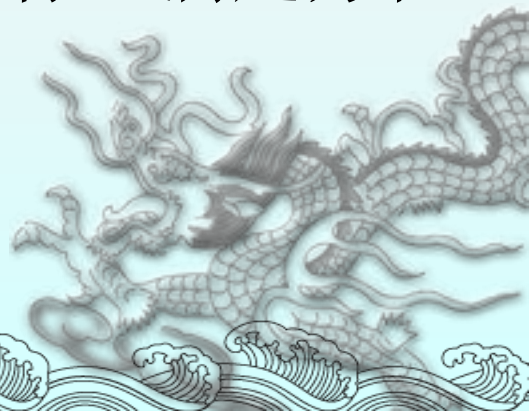
$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (3.4-11)$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

如果  $A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$ ，即方程组 (3.4-11) 中的系数

行列式： $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ 、 $\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$ 、 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$  不全为零，

那么平面  $\pi_1$  与  $\pi_2$  相交，它们的交线设为直线  $L$ ，因为直线  $L$  上的任意一点同在两平面上，所以它的坐标必满足方程组 (3.4-11)；



反过来，坐标满足方程组 (3.4-11) 的点同在两平面上，因而一定在两平面的交线即直线  $l$  上。因此方程组 (3.4-11) 表示直线  $l$  的方程，我们把它叫做直线的一般方程。直线的坐标方程 (3.4-3) 是一般方程的特殊情形。事实上，我们总可以将标准方程 (3.4-3) 表示为一般方程的形式，这是因为在 (3.4-3) 中  $X, Y, Z$  不全为零，不妨设  $Z \neq 0$ ，那么 (3.4-3) 可先改写成

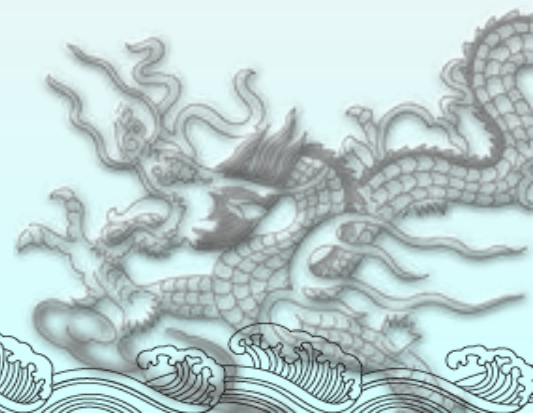
$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{X} = \frac{z - z_0}{Z}, \\ \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}; \end{cases}$$

上式经整理得下列形式

$$\begin{cases} x = az + c, \\ y = bz + d, \end{cases} \quad (3.4-12)$$

式中  $a = \frac{X}{Z}$ ,  $b = \frac{Y}{Z}$ ,  $c = x_0 - \frac{X}{Z}z_0$ ,  $d = y_0 - \frac{Y}{Z}z_0$

显然这是一种特殊的一般方程，



(3.4-3) 表示的直线L可以看作是(3.4-12)中两个方程表示的两个平面的交线,这两个平面是通过该直线且分别平行于Oy轴与Ox轴的平面,在直角坐标系下它们又分别垂直于坐标面xOz与yOz(图3-13),我们把(3.4-12)叫做直线L的射影式方程。

如图3-13



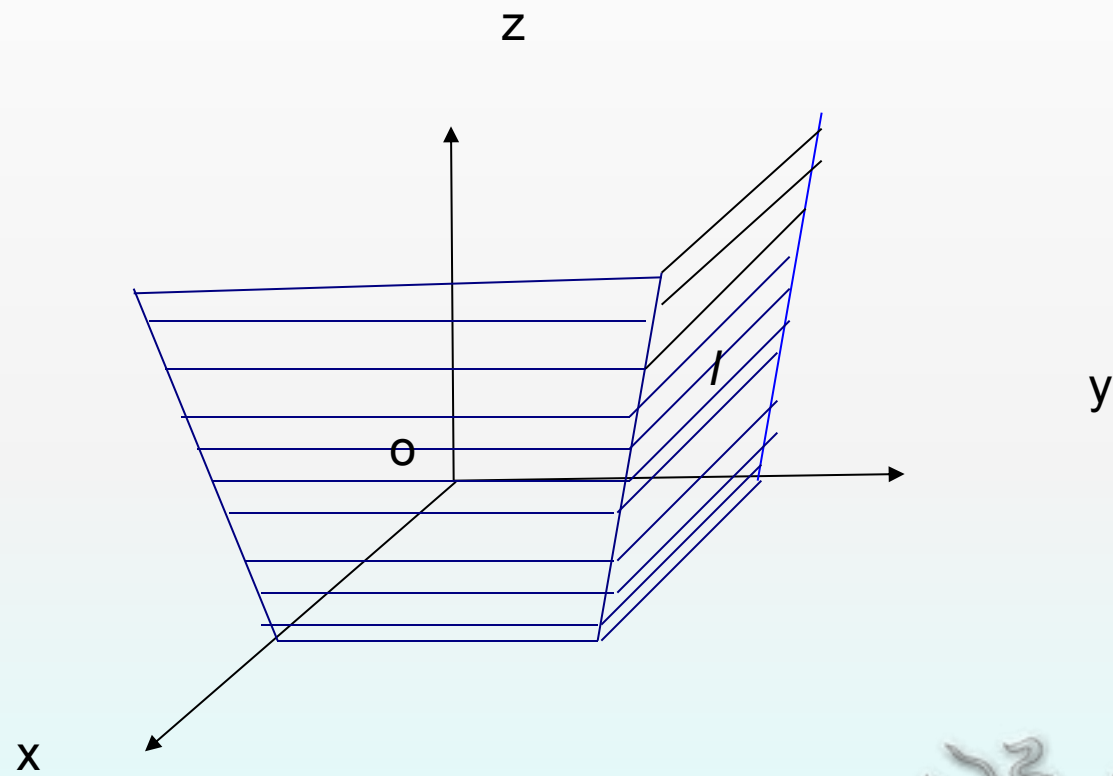
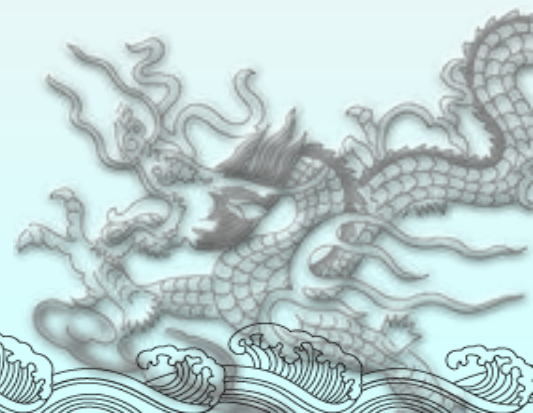


图3-13

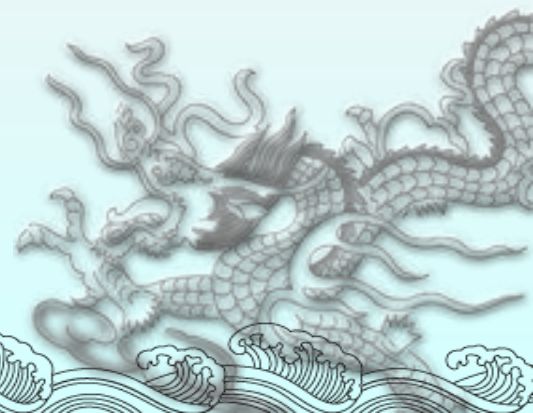


反过来，直线的一般方程（3.4-11）也总可以化为标准方程（3.4-3）的形式，这是因为（3.4-11）中三个系数行列式

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

不全为零，不失一般性，设

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0。$$

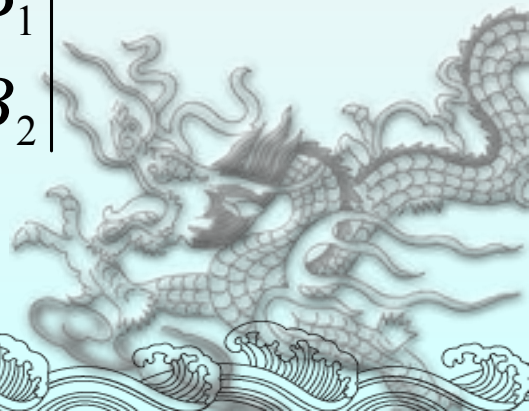


那么由 ( 3.4-11 ) 中的两式分别消去  $y$  与  $x$  得直线的射影式方程为:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \frac{\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \\ y = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \frac{\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \end{array} \right.$$

从而得直线的标准方程为

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

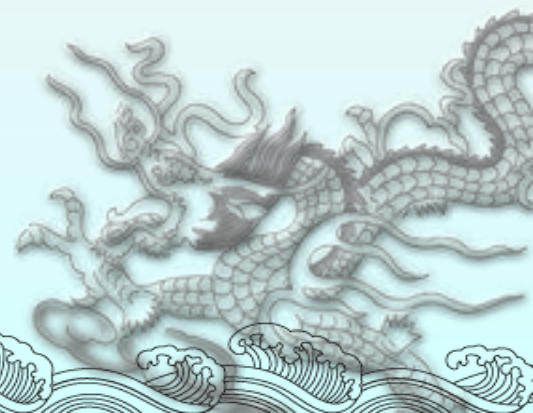


式中

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

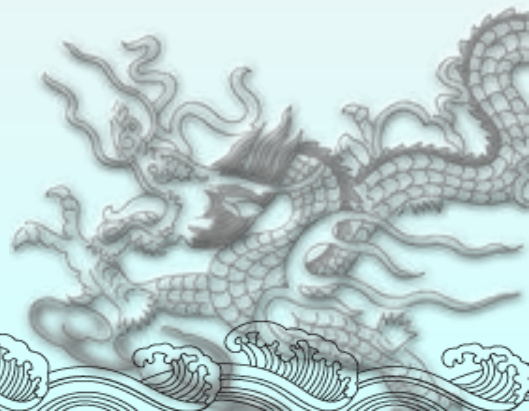
$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

$$z_0 = 0$$



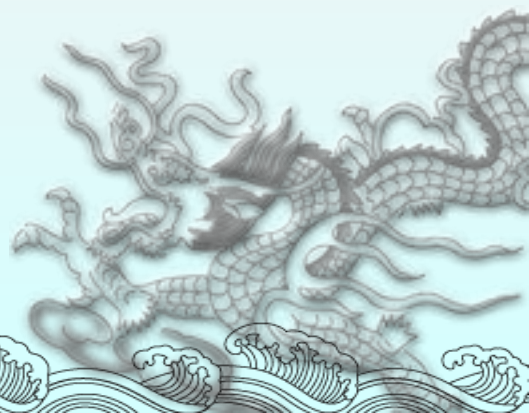
从以上可以看出，给定了直线的一般方程 ( 3.4-11 )，我们立刻可以写出它的一组方向数，这就是方程组 ( 3.4-11 ) 的三个二阶系数行列式

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$



由于这三个二阶行列式不能全为零，例如  $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ，那么我们就可使任意指定的值  $z = z_0$ （特别地可取  $z=0$ ），解方程组 (3.4-11)，得  $x=x_0, y=y_0$ ，那么  $(x_0, y_0, z_0)$  为方程组 (3.4-11) 的一个特解，点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  就是直线上的一点，于是同样地得到了直线 (3.4-11) 的标准方程为

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$



### 例 3 化直线 $l$ 的一般方程

$$\begin{cases} 2x + y + z - 5 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

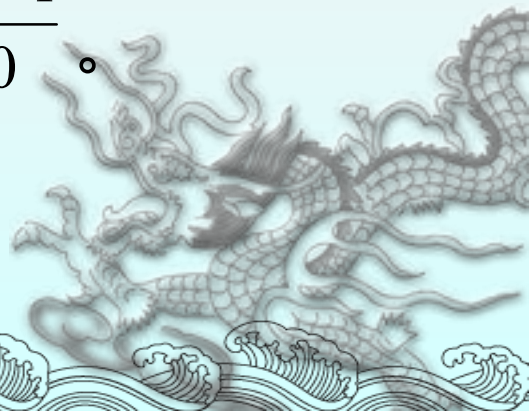
### 为标准方程

**解 1.** 因为  $y, z$  的系数行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ , 所以可由原方程组分别消去  $z$

和  $y$ , 得直线  $l$  的射影式方程为: 
$$\begin{cases} y = -2x + 4, \\ z = 1 \end{cases}$$

所以直线  $l$  的标准方程为  $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{0}$ 。

再来看第二种解法

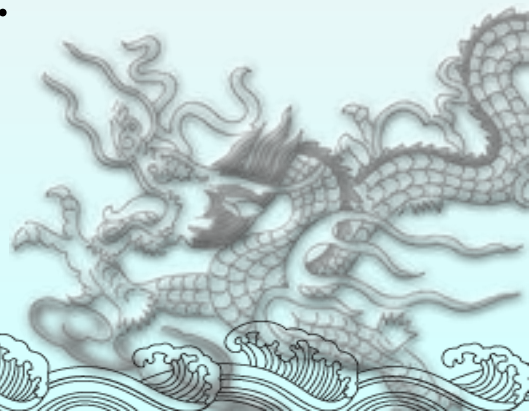


解 2. 因为直线  $l$  的标准方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 : 8 : 0 = 1 : (-2) : 0.$$

再设  $x=0$ . 解得  $y=4, z=1$ , 那么  $(0, 4, 1)$  为直线上的一点, 所

以直线  $l$  的标准方程为  $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{0}$ .



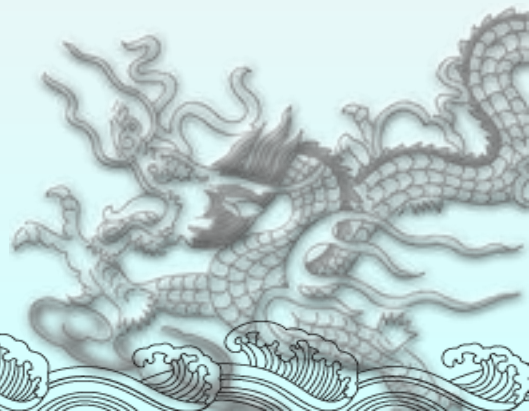
注意:

在直角坐标下, (3.4-11) 中的两平面的法矢量分别为

$$\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

所以直线  $l$  的方向矢量可取为

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$



例 4 把直线  $l$  的一般方程

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ x - 2y - z = 0. \end{cases}$$

化为标准方程。

解： 因直线  $l$  平行于矢量

$$n_1 \times n_2 = \{1, -2, 3\} \times \{1, -2, -1\} = \{8, 4, 0\} = 4 \begin{Bmatrix} 2, 1, 0 \\ 1 \quad -1 \end{Bmatrix},$$

所以矢量  $v = \{2, 1, 0\}$  为直线  $l$  的方向矢量。其次由于  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ ,

因此令  $y=0$ ，解方程组得  $x=1, z=1$ ，那么  $(1, 0, 1)$  为直

线  $l$  上的一点，所以直线  $l$  的标准方程为：
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$$

#### 例4. 用对称式及参数式表示直线

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

解: 先在直线上找一点.

令  $x = 1$ , 解方程组  $\begin{cases} y + z = -2 \\ y - 3z = 6 \end{cases}$ , 得  $y = 0, z = -2$

故  $(1, 0, -2)$  是直线上一点.

再求直线的方向向量  $\vec{s}$ .

交已知直线的两平面的法向量为

$$\vec{n}_1 = \{1, 1, 1\}, \quad \vec{n}_2 = \{2, -1, 3\}$$

$$\because \vec{s} \perp \vec{n}_1, \vec{s} \perp \vec{n}_2 \quad \therefore \vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \{4, -1, -3\}$$

故所给直线的对称式方程为  $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3}$

参数式方程为 
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

**解题思路:** 先找直线上一点;

再找直线的方向向量.

### 三、空间直线的参数式方程

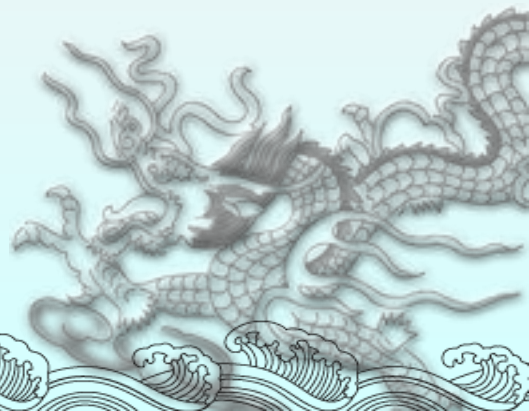
由直线的对称式方程  $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$

令  $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$

直线的一组方向数

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

直线的参数方程



**例5** 用对称式方程及参数方程表示直线

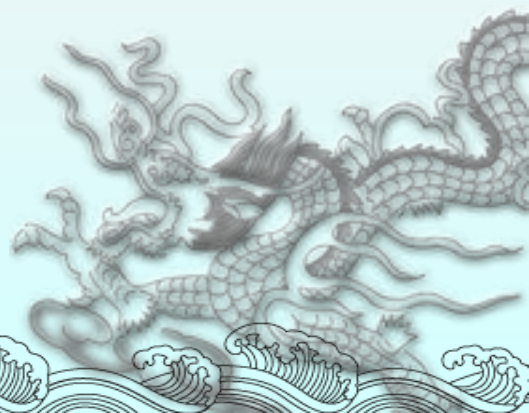
$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

**解** 在直线上任取一点  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\text{取 } x_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_0 + z_0 + 2 = 0 \\ y_0 - 3z_0 - 6 = 0 \end{cases}$$

解得  $y_0 = 0, z_0 = -2$

点坐标  $(1, 0, -2)$ ,



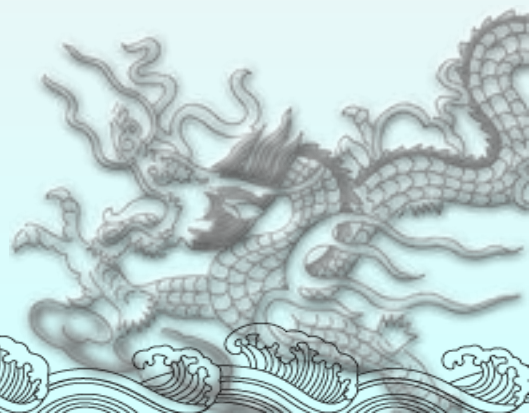
因所求直线与两平面的法向量都垂直

取  $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{4, -1, -3\},$

对称式方程  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+2}{-3},$

令  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+2}{-3} = t,$

得参数方程  $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$



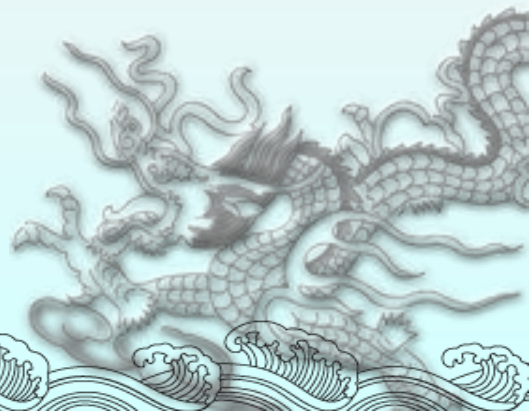
**例 3** 一直线过点  $A(2, -3, 4)$ , 且和  $y$  轴垂直相交, 求其方程.

**解** 因为直线和  $y$  轴垂直相交,  
所以交点为  $B(0, -3, 0)$

$$\text{取 } \vec{s} = \overrightarrow{BA} = \{2, 0, 4\}$$

$$\text{所求直线方程 } \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-4}{4}$$

$$\text{或 } \begin{cases} y = -3 \\ \frac{x-2}{2} = \frac{z-4}{4} \end{cases}$$



## 四、课堂小结

1. 确定直线的关键要素：**直线上一点和一个方向向量**；
2. 直线方程之间的相互关系。

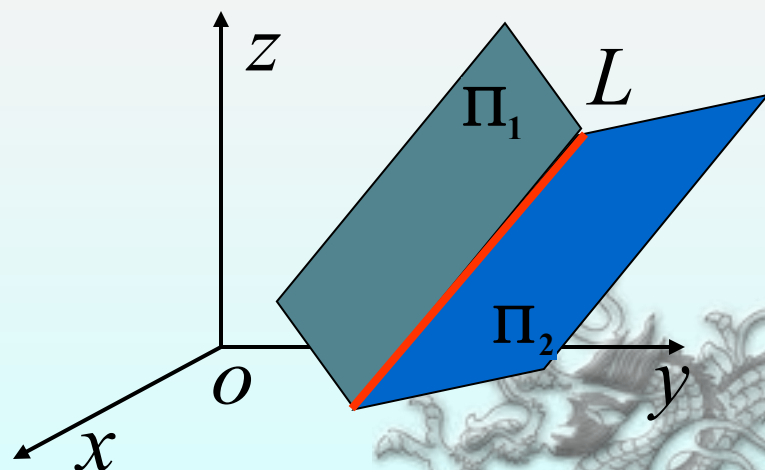


## (1) 一般式方程

直线可视为两平面交线，因此其一般式方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

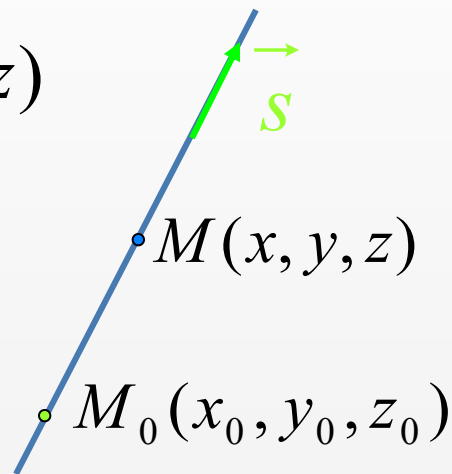
(不唯一)



## (2) 对称式方程

已知直线上一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  和它的方向向量

$\vec{s} = \{ m, n, p \}$ , 设直线上的动点为  $M(x, y, z)$   
则  $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$



故有

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

此式称为直线的对称式方程(也称为点向式方程)

**说明:** 某些分母为零时, 其分子也理解为零.

例如, 当  $m = n = 0, p \neq 0$  时, 直线方程为

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

### (3) 参数式方程

$$\text{设 } \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

得参数式方程：

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$