第四章　　柱面. 锥面. 旋转曲面与二次曲面

4.1 柱 面

授课学时 :1 学时

教学目标：1. 理解并掌握柱面的准线方程和柱面的母线方程；

　　　　　2. 熟练掌握求柱面的方法，快速写出相应柱面的方程。

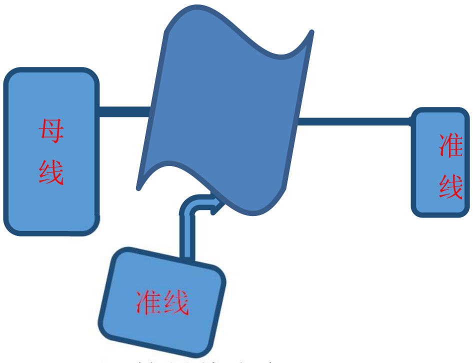
教学分析：学会求柱面方程的一般方法和步骤和母线平行于坐标轴的柱面方程

一 • 生活中的柱面

1. 柱面

定义 4.1.1　在空间，由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所生成的曲面叫柱面。定方向叫做柱面的方向，定曲线叫做柱面的准线，那族平行直线中的每一条直线叫做柱面的母线。

说明：除平面外，柱面的方向是惟一的，而其准线是不惟一的，每一条与柱面的母线都相交的曲线都可以作为柱面的准线。



2 柱面的方程

（1）　柱面的准线方程和准线 C 上任意一点（x, y, z）的母线方程：

其中 X, Y, Z 为母线方向 $\Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0 \\ F_2(x_1,y_1,z_1)=0 \\ \dfrac{x-x_1}{X}=\dfrac{y-y_1}{Y}=\dfrac{z-z_1}{Z} \end{cases}$

（2）　约束条件 $C:\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$

（3）由（1）（2）可得出一个三元方程 F(x, y, z)=0

例 1 柱面的准线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ 2x^2+2y^2+z^2=2 \end{cases}$，而母线的方向数是

$-1,0,1$ ，求这柱面的方程.

定理4.1.1在空间直角坐标系中，只含有两个元（坐标）的三元方程所表示的曲面是一个柱面，它的母线平行于所缺元（坐标）的同名坐标轴。

柱面方程的特征

$x^2+y^2=R^2$ 圆柱面，

$\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 椭圆柱面， 母线//X 轴

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 双曲柱面 ， 母线//Z 轴

$x^2=2pz$ 抛物柱面， 母线// Y 轴

引例：分析方程 $x^2+y^2=R^2$

表示怎样的曲面。

解：在xoy面上，$x^2+y^2=R^2$

表示圆C， 在圆C上任取一点 $M_1(x,y,0)$，

过此点作平行 z 轴的直线 l ，*对任意点* $M(x,y,z)$

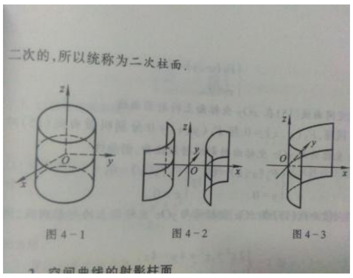
的坐标也满足方程 $x^2+y^2=R^2$

沿曲线C平行于 z 轴的一切直线所形成的曲面称为圆柱面。其上所有点的坐标都满足

此方程。故在空间 $x^2+y^2=R^2$

表示圆柱面

在空间直角坐标系里，因这些柱面与　　坐标面的交线分别是椭圆，双曲线与抛物线，所以它们依次叫做椭圆柱面，双曲柱面，抛物柱面，统称为二次柱面.



只含 x, y 而缺 z 的方程 $F(x, y) = 0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线为 xoy 面上曲线 $C: F(x, y) = 0$.

2 空间曲面的射影柱面

设空间曲线为 L
$$\begin{cases} F<x, y, z>=0 \\ G<x, y, z>=0 \end{cases} \quad <15>$$

如果我们从中依次消去一个元，可得

F1<x, y>,
F2<x, z>,
F3<y, z>,

任取其中两个方程组成方程组，比如

$$\begin{cases} F1<x, y>=0 \\ F2<x, z>=0 \end{cases} \quad <16>$$

那么方程组<16>与<15>是两个等价的方程组，也就是<16>表示的曲线与<15>是同一条曲线，从而曲面 F1<x, y>=0, 与 F2<x, z>=0 都通过已知直线<15>；同理方程 F3<y, z>=0 表示的曲面也通过已知直线<15>. 由定理 4. 1. 1 知，曲面 F1<x, y>=0 表示一个母线平行于 z 轴的柱面，在直角坐标系下，其母线垂直于 xOy 坐标面，我们把曲线 F1<x, y>叫做空间曲线<15>对 xOy 坐标面射影的射影柱面，而曲线叫

做空间曲线<15>在 x0y 坐标面上的射影曲线。

$$\begin{cases} F<x,y>=0, \\ z=0 \end{cases}$$

同理 F2<y,z>=0 与 F3<y,z>=0 分别叫做曲线<15>在 x0z 坐标面与 y0z 坐标面射影的射影柱面，而曲线

$$\begin{cases} F2<x,z>=0 \\ y\ =0 \end{cases} \text{与} \begin{cases} F3<y,z>=0 \\ x=0 \end{cases}$$

母线平行于轴的圆柱面，而后一个射影柱面是一个准线为做坐标面上的抛物线，母线平行于轴的抛物柱面，因此曲线可以看成是这两个柱面的交线，它的形状如图 4-4. 从这里我们可以看到，利用空间曲线的射影柱面来表达空间曲线，对我们认识空间曲线的形状是有利的

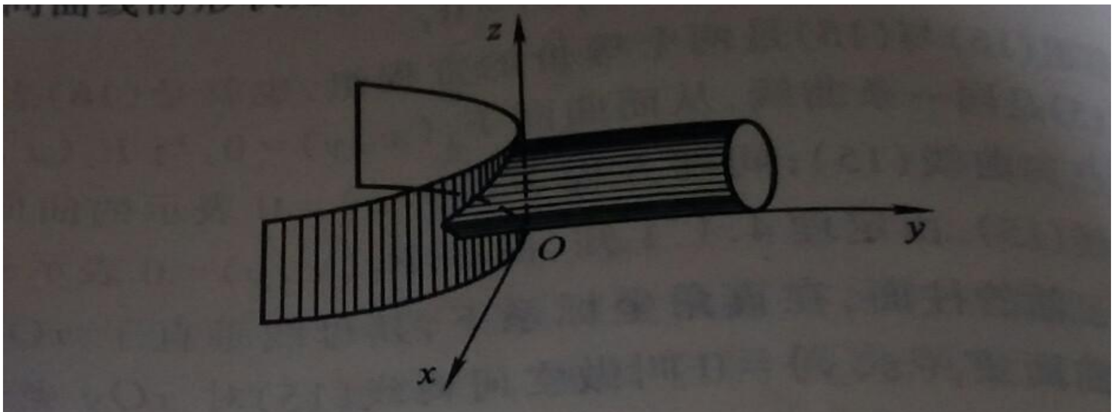


图 4－4

§ 4.2 锥面

授课学时：1 学时

一、教学目标

知识目标：1. 理解并掌握顶点在坐标原点的锥面方程及求解方法；

2. 熟练掌握求锥面的规律，快速写出相应锥面的方程。

能力目标：1. 通过与现实生活的联系，在教师引导下探索新知识，培养学生观察、分析、判断、归纳的能力；

2. 锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想；

3.强化“数”与“形”相结合，并相互转化的数学思想。

情感目标：1.运用数形结合的思想方法，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情；

2.培养学生积极探索的科学态度，让学生体会数学问题从具体到抽象的转化过程；

3.让学生感受到数学之美，从而激发学生学习数学的兴趣和信心。

二、教学重难点

1.教学重点：锥面的定义和顶点在坐标原点的锥面方程及求解方法

2.教学难点：根据求锥面的规律，写出对应锥面的方程

定义 4.2.1　　通过一定点且与定曲线相交的一族直线所产生的曲面叫做锥面，

这些直线都叫做锥面的母线，

那个定点叫做锥面的顶点，

定曲线叫做锥面的准线。

设准线方程为 $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$

顶点坐标 A（x_0,y_0,z_0），准线在准线上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则过 M_1 的母线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_2}=\frac{z-z_0}{z_1-z_2} \qquad (1)$$

又 M_1 在准线上，有 $F_1(x_1,y_1,z_1)=0$ ，$F_2(x_1,y_1,z_1)=0$　　(2)

从（1）（2）等式中消去 x_1 ，y_1 , z_1 ，最后得到 F（x,y,z)=0

例 1 锥面的顶 点在原点，且准线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$$

求锥面的方程。

解　设 M_1（x_1 , y_1 ， z_1）为准线上的任意点，那么过 M_1 的母线为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1} \qquad (1)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

$$z_1=c \qquad (3)$$

由（1）（2）得

$$x_1=\frac{cx}{z}, \quad y_1=\frac{cy}{z} \qquad (4)$$

（4）带入（2）所得的锥面方程为

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2}+\frac{c^2y^2}{b^2z^2}=1$$

把它改写为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

这个锥面叫做二次锥面。

显然，锥面的准线不是唯一的，和一切母线都相交的每一条曲线，都可以作为他的准线。

定理 4.2.1 一个关于 x, y, z 的齐次方程总表示顶点在坐标原点的锥面。

证：设关于 x, y, z 的齐次方程为

$$F(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

于是，对实数 t, 当 t^λ 有意义时，

$$F(tx,ty,tz)=t^\lambda f(x,y,z)$$

则 当 t=0 时，有 $F(0,0,0)=0$,

即（1）过原点。

如果 M_o（x_o, y_o, z_o）是图形上的非原点, 则直线 OM_o 的参数方程为：

$$\begin{cases} x=x_ot, \\ \end{cases}$$

$y=y_o t$,

$z=z_o t$,

代入　$F(x,y,z)=0$　中，得

$F(x,y,z)=F(tx_o,ty_o,tz_o)$

$=t^{\lambda}F(x_o,y_o,z_o)=0$

说明整条直线都在图形上.

综上所述：

(1)表示的曲面是由这种通过坐标原点的直线所组成，即它是以原点为顶点的锥面。

推论：关于 x-x0,y-y0,z-z0 的齐次方程表示

&4.3 旋转曲面

授课学时；2 学时

一．教学目标

1.熟练掌握旋转曲面的规律，快速写出相应旋转曲面的方程
2，理解并掌握母线在坐标平面上，旋转轴为坐标轴的旋转曲面求解方法

二．教学重难点

1.教学重点
求母线在坐标平面上，旋转轴为坐标轴的旋转曲面的一般方程与步骤
2.教学难点
根据求旋转曲面的规律，写出对应旋转曲面方程

三．教学方法

多媒体辅助教学和探究式教学法

四，教学过程
1.引入

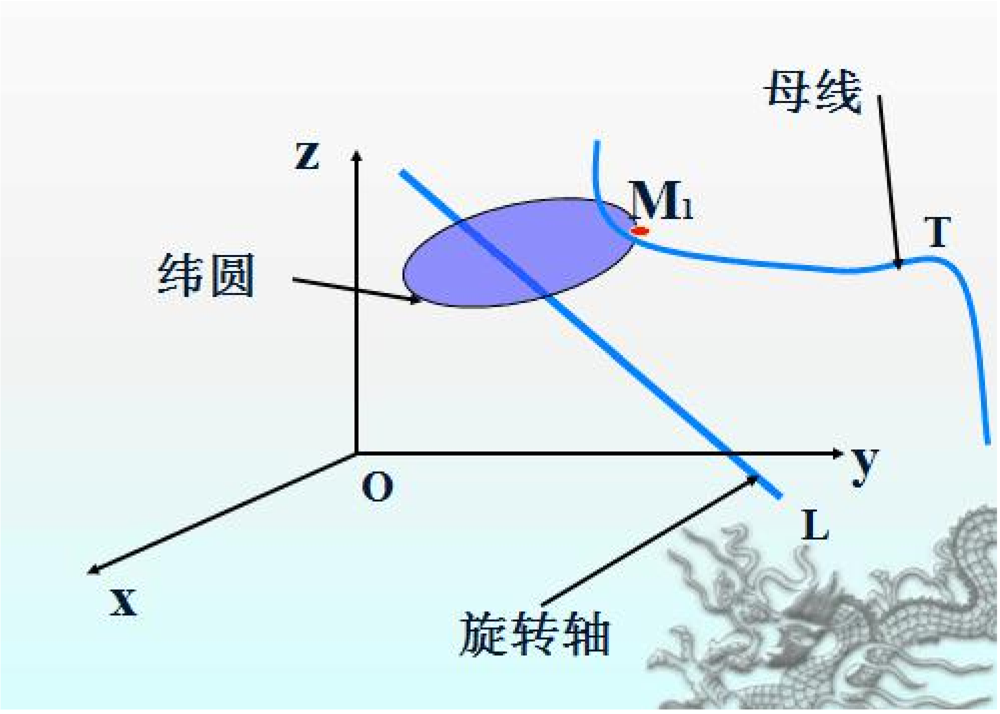
卫星接收装置

旋转门

2.讲解过程

定义：在空间,一条曲线 T 围绕着定直线 L 旋转一周， 所产生的曲面叫做旋转曲面。

如图;旋转曲面的母线 T 上的任意一点 M1 在旋转时形成一个圆，这个圆也就是通过点 M1 且垂直于轴 L 的平面上，以 L 为界的每个半平面都与曲面交成一条曲线，这些曲线叫做旋转面的经线

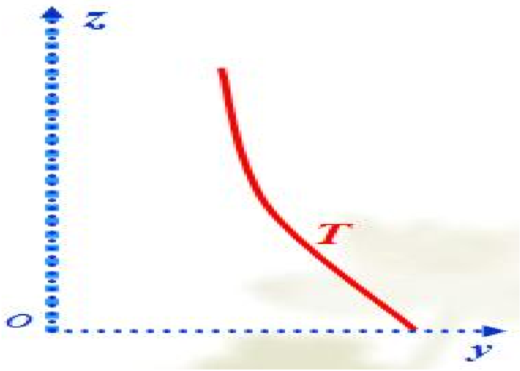


二、旋转曲面的方程

1. 前提:在直角坐标系下

旋转曲面:(1)旋转轴为坐标轴,(2) 母线在坐标平面上

推导：母线 T $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转



设M_1为旋转曲面 S 的母线Γ上的任一点，在Γ 绕轴 l 旋转时，M_1也绕 l 旋转而形成一个圆，称其为 S 的纬圆、纬线或平行圆. 以 l 为边界的半平面与 S 的交线称为 S 的经线.

S 的纬圆实际上是过母线Γ 上的点且垂直于轴 l 的平面与 S 的交线. S 的所有纬圆构成整个 S.

S 的所有经线的形状相同，且都可以作为 S 的母线，而母线不一定是经线. 这里因为母线不一定为平面曲线，而经线为平面曲线.

在直角坐标系下，设旋转曲面 S 的母线为

$$\Gamma\text{:}\ \begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{1}$$

旋转轴为

$$l\text{:}\ \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z} \tag{2}$$

这里 $P_0(x_0,y_0,z_0)$为 l 上一点，X，Y，Z 为 l 的方向数.

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为母线Γ 上的任意点，过 M_1的纬圆总可看成过M_1且垂直于轴 l 的平面与以 P_0为中心，$|\overline{P_0M_1}|$为半径的球面的交线. 故过 M_1的纬圆的方程为

$$\begin{cases} X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0 & (3) \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2 & (4) \end{cases}$$

当 M_1跑遍整个母线时，就得出旋转曲面的所有纬圆，所求的旋转曲面就可以看成是由这些纬圆构成的.

由于 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 在母线Γ 上，有

$$\begin{cases} F_1(x_1,y_1,z_1)=0 \\ F_2(x_2,y_2,z_2)=0 \end{cases} \tag{5}$$

从（3）、（4）、（5）4 个等式消去参数 x_1，y_1，z_1得一个方程

$$F(x, y, z)=0$$

即为 S 的方程.

例 1 求直线Γ：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$绕直线$l: x=y=z$旋转所得的旋转曲面 S 的方程.

解　设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为母线Γ 上的任一点，因旋转轴过原点，过 M_1的纬圆方程为

$$\begin{cases}(x-x_1)+(y-y_1)+(z-z_1)=0\\ x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2\end{cases}\tag{7}$$

因 M_1在母线上，有

$$\frac{x_1}{2}=\frac{y_1}{1}=\frac{z_1-1}{0}\tag{8}$$

由（8）得

$$x_1=2t, y_1=t, z_1=1\tag{9}$$

将(9)代入(7)得　$x-2t+y-t+z-1=0$，$t=\dfrac{1}{3}(x+y+z-1)$

且

$$x_1=\frac{2}{3}(x+y+z-1), y_1=\frac{1}{3}(x+y+z-1), z_1=1$$

最后得

$$x^2+y^2+z^2=\frac{4}{9}(x+y+z-1)^2+\frac{1}{9}(x+y+z-1)^2+1$$

即 S 的方程是

$$2(x^2+y^2+z^2)-5(xy+xz+yz)+5(x+y+z)-7=0.$$

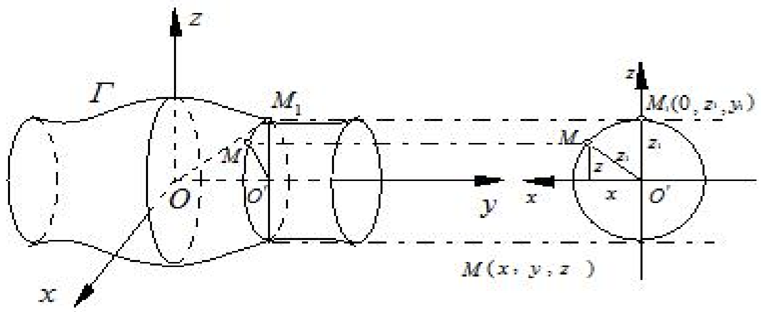
2．坐标平面上的曲线绕坐标轴旋转所得旋转曲面的方程

任一旋转曲面总可以看作是由其一条经线绕旋转轴旋转而生成的. 故今后为了方便，总是取旋转曲面的一条经线作为母线.

更进一步，在直角坐标系下导出旋转曲面的方程时，我们常把母线所在的平面取作坐标平面，从而使旋转曲面的方程具有特殊的形式.

设旋转曲面 S 的母线为 yOz 平面上的曲线

$$\Gamma:\begin{cases}F(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$$



旋转轴为 y 轴 $$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$$

设 $M_1(0，y_1，z_1)$为母线上任一点，则过 M_1 的纬圆为

$$\begin{cases}y-y_1=0\\ x^2+y^2+z^2=y_1^2+z_1^2\end{cases}$$

且有 $$\begin{cases}F(y_1,z_1)=0\\ x_1=0\end{cases}$$

由以上两个方程组消可得 $x_1=0,y_1=y,z_1=\pm\sqrt{x^2+z^2}$ ，最后得旋转曲面的方程是

$$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

实际上，此旋转曲面的方程也可由前面的图直接得出.

设 $M_1(0，y_1，z_1)$为母线上任一点，$M(x，y，z)$为过 M_1 的纬圆上的任意一点，则由上图中的辅助图可知

$$y_1=y,\quad z_1=\ \pm|O'M_1|=\pm|O'M|=\pm\sqrt{x^2+z^2} \tag{10}$$

因 $M_1(0，y_1，z_1)$在母线上，$F(y_1，z_1) = 0$，将(10)的结果代入，就得所求的旋转曲面的方程为 $F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

类似地，母线为 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$，旋转轴为 z 轴的旋转曲面的方程为：$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

对于其它坐标平面上的曲线，绕坐标轴旋转所得的旋转曲面，其方程可类似求出.

于是我们得到如下的规律：

当坐标平面上的曲线Γ 绕此坐标平面的一个坐标轴旋转时，所得旋转曲面的方程可根据下面的方法直接写出：保持方程的形式不变，将曲线Γ 在坐标面里的方程中的与旋转轴同名的坐标保持不变，而以其它两个坐标的平方和的平方根来代替方程中的另一坐标.

例如，S 为由 xoz 面上的$\Gamma:\begin{cases}F(x,z)=0\\ y=0\end{cases}$绕 x 轴所得，则 S 的方程为 $F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

三．旋转曲面的规律

1. 文字叙述

当坐标平面上的曲线绕此坐标平面里的一个坐标轴旋转时，为了求出这样的旋转曲面的方程，只要将曲线在坐标面里的方程保留和旋转轴同名的坐标，而以其他两个坐标平方和的平方根来代替方程中的另一坐标。

2. 用数学符号表示

母线 **F(x,z)=0，y=0**

绕 x 轴旋转的旋转曲面方程为 $F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

那么绕 Z 轴旋转 $F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

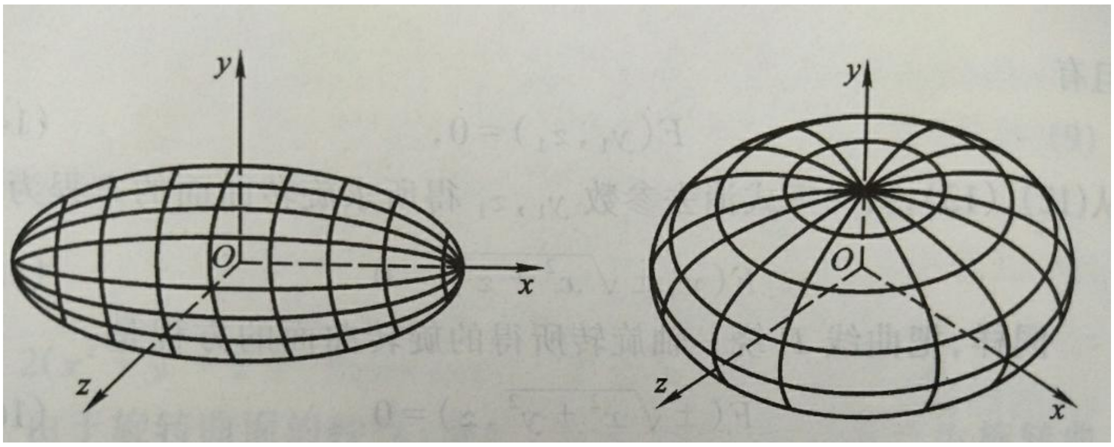
四．实际运用

1.椭圆

当绕 x 轴旋转时，同名坐标即为 x, 在方程中 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 中保留坐标 x 不变，

用 代 y,便得将椭圆中 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 x 轴旋转的曲面方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ，该曲面即为长形旋转椭球面。图为左下。

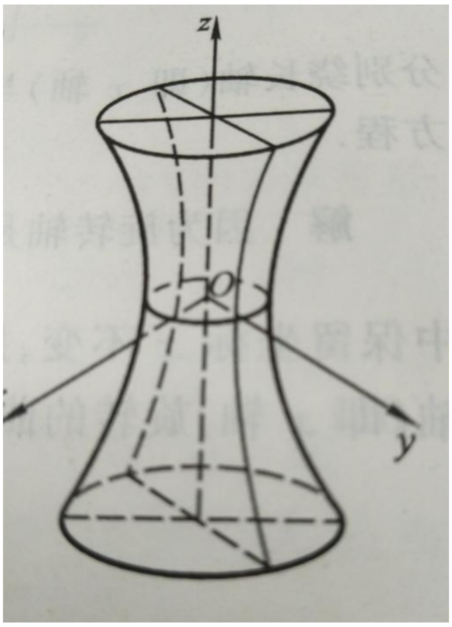
同理，当椭圆绕 y 轴旋转时，曲面方程即为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ，该曲面叫做扁形旋转椭球面。图为右下。

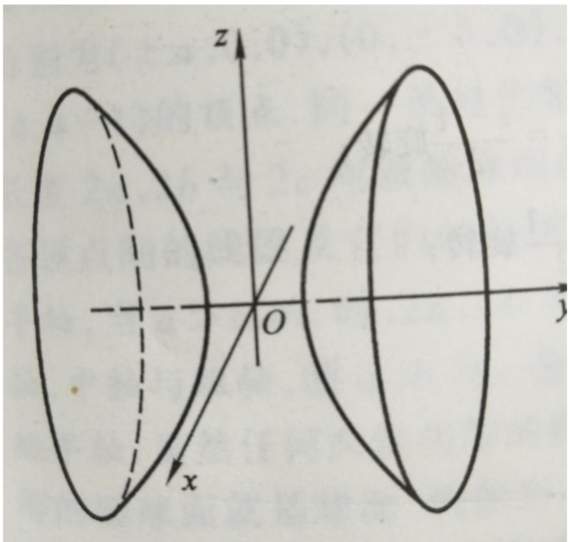


2. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

绕 z 轴旋转的旋转曲面方程为 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ，该曲面叫做单叶旋转双曲面

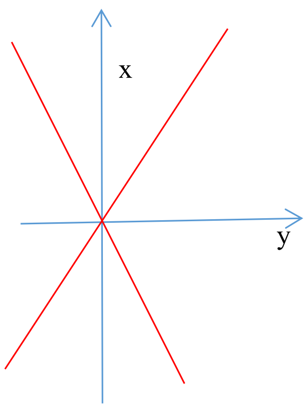
绕 y 轴旋转的旋转曲面方程为 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，该曲面叫做双叶旋转双曲面

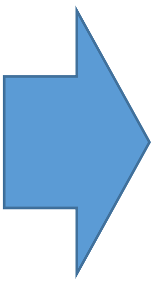


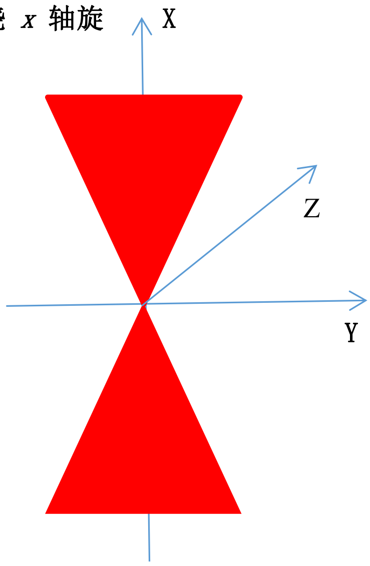


五 两种特殊的双曲面

双曲线 Γ： xoy 平面上两条相交直线$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$绕 x 轴旋



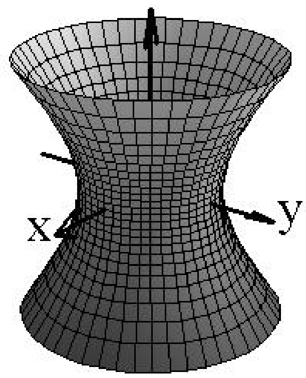




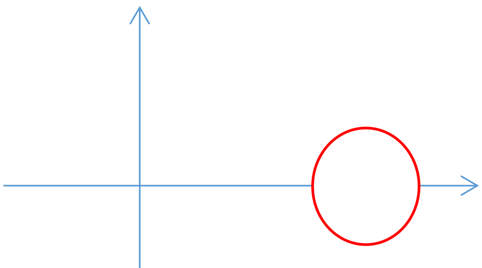
双曲线 Γ： $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转，求所得的旋转曲面方程。

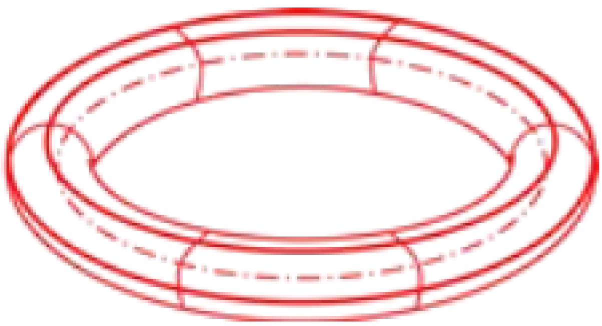
解：绕 Z 轴旋转的旋转曲面方程为 $\dfrac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

即 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，这个曲面叫做单叶旋转双曲面



2.圆 $(x-R)^2+y^2=r^2(R>r>0)$ **绕 y 轴旋转所成曲面**





环面：

$(\pm\sqrt{x^2+z^2}-R)^2$

六、课堂小结

1.母线在坐标平面上，旋转轴为坐标轴的旋转曲面；

2.求解旋转曲面方程的规律。

思考题

如果母线不在坐标平面上，旋转轴不是坐标轴时，又该如何求旋转曲面的方程？

七，布置作业

八，教学反思

§4.4　椭球面

授课学时，两小时

一．教学目标

1.知识目标：a.理解并掌握椭球面半轴、长轴的概念及其求解方法；

b.熟练掌握求椭球曲面的规律，快速写出相应椭球面的方程

2.能力目标：a.通过与现实生活的联系，在教师引导下探索新知识，培养学生观察、分析、判断、归纳的能力；

b.锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想；

c.强化“数”与“形”相结合，并相互转化的数学思想

3.情感目标：a.运用数形结合的思想方法，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情；

b.培养学生积极探索的科学态度，让学生体会数学问题从具体到抽象的转化过程；

c.让学生感受到数学之美，从而激发学生学习数学的兴趣和信心

二、教学重难点

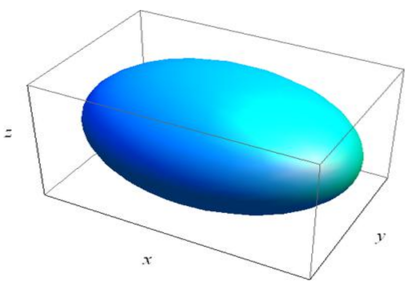
1. 教学重点：求椭球面的半轴 a、b、c 的值，椭球面方程的一般方法和步骤

2. 教学难点：根据求椭球面的规律，写出对应椭球面的方程

三、**教学方法：**多媒体辅助教学和探究式教学法

四、教学过程

1.导入：想一想构成这此物体的曲面具有什么样的特征？

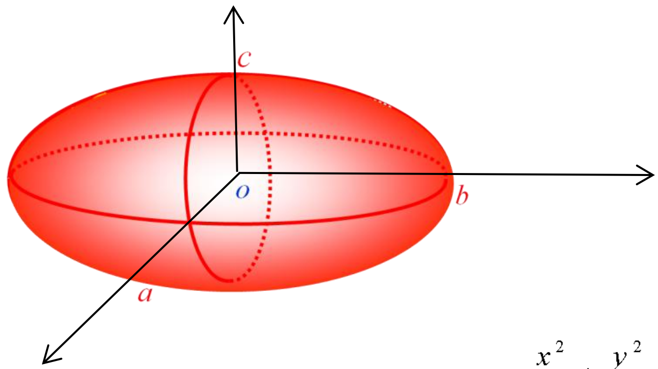


再思考这些曲面的方程如何表示？

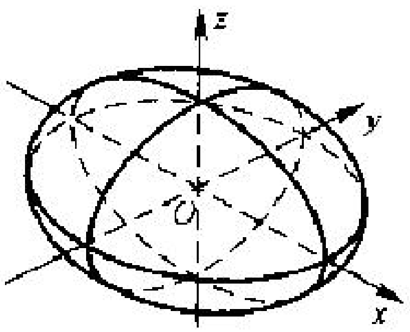
2. 讲解新知

讲授新知

1. 定义：把 xOz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转，所得曲面称为旋转椭球面 。



定义 4.4.1 在直角坐标系下，由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面叫做椭球面，或称椭圆面，该方程叫做椭球面的标准方程，其中 a，b，c 为任意的正常数，通常假定 $a \geq b \geq c \geq 0$



2. . **椭球面的性质**

设椭球面Σ： $F(x,y,z)=$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

(1).对称性:

因为 $F(\pm x,\pm y,\pm z)=0$,所以,椭球面Σ关于三坐标面、三坐标轴及原点都对称.

对称平面(三坐标面)-------椭球面的主平面

对称轴(三坐标轴)---------椭球面的主轴

对称中心(原点)----------椭球面的中心

所以椭球面是中心二次曲面.

(2).截距、顶点、轴

截距:

在方程①中令 $y=z=0$,得 $x=\pm a$ ，所以Σ在 x 轴上截距为 $\pm a$ ，令 $x=z=0$ 得 $y=\pm b$ ，所以Σ在 y 轴上截距为 $\pm b$ ，令 $x=y=0$ 得 $z=\pm c$ ，所以Σ在 z 轴上截距为 $\pm c$.

顶点: $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$

轴: $2a, 2b, 2c$ -------轴, a, b, c -------半轴.

若 $a>b>c$, $2a$ -------长轴, a ------长半轴,

$2b$ -------中轴, b ------中半轴,

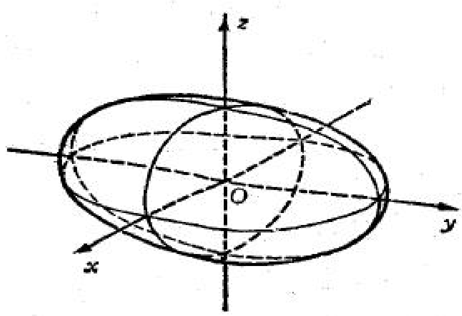
$2c$ -------短轴. c ------短半轴..

(3)范围：$x\leqslant a$，$y\leqslant b$，$z\leqslant c$

因此椭球面Σ完全封闭在一个由六个平面 $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$ 所组成的长方体内。

3. **椭球面的形状**

当 $a=b=c$ 时，椭球面（2）成为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，这是球心在原点、半径为 a 的球面.显然，球面是旋转椭球面的特殊情形，旋转椭球面是椭球面的特殊情形.把球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 沿 z 轴方向伸缩 $\frac{c}{a}$ 倍，即得旋转椭球面 $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；再沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍，即得椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.



4. **椭球面的种类**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$ ------点椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$ -----虚椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ -----实椭球面

当 $a=b=c$ 时--------球面

当 $a=b>c$ 时--------扁形旋转椭球面

当 $a=b<c$ 时--------长形旋转椭球面

当 a,b,c 互不相等时------三轴椭球面

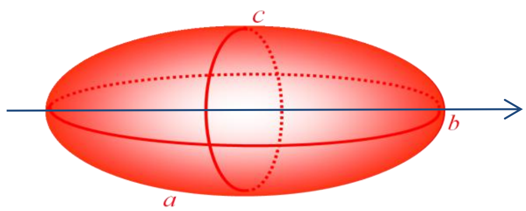
5. **椭球面的参数方程**

$$\begin{cases} x=a\sin\theta\cos\varphi \\ y=b\sin\theta\sin\varphi \\ z=c\cos\theta \end{cases} \qquad \theta(0\le\theta\le\pi),\varphi(0\le\varphi\le 2\pi)$$

6. **平行截割法**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

用 $z=h$ 截曲面
用 $y=m$ 截曲面
用 $x=n$ 截曲面



椭圆截面的大小随平面位置的变化而变化，因此椭球面可以看成是由一个椭圆的变动（大小位置都改变）而产生。

7. 应用举例

例　　已知椭球面的轴与坐标轴重合，且通过椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$，$z=0$与点$M(1,2\sqrt{23})$，求这个椭球面的方程.

解：　因为所求椭球面的轴与三坐标轴重合，所以设所求椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

它与 xOy 面的交线为椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ Z=0, \end{cases}$$

与已知椭圆 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\\ Z=0.\end{cases}$

比较知 $a^2=9, b^2=16.$

又因为椭球面通过点$M(1,2\sqrt{23})$，所以有

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{16}+\frac{23}{c^2}=1$$

所以 $c^2=36$

因此所求椭球面的方程为

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$$

8.**课堂小结**

椭球面的长半轴 a、b、c 的值的求法及其方程

9. **思考题**

已知椭球面的轴与三坐标轴重合，且通过椭圆 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\\ Z=0.\end{cases}$ 与 点 $M(1,2\sqrt{23})$，求这个椭球面的方程？

10. **布置作业**

P_{162} 1;3

11. 板书设计

<table>
<tr><td colspan="3">柱面</td></tr>
<tr><td>定义</td><td>例题</td><td>练习</td></tr>
</table>

定义 4.4.1 在直角坐标系下，由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面叫做椭球面，或称椭圆面，方程叫做椭球面的标准方程，其中 a，b，c 为任意的正常数，通常假定 $a \geq b \geq c \geq 0$	例　　已知椭球面的轴与坐标轴重合，且通过椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$，$z=0$与点$M(1,2\sqrt{23})$,求这个椭球面的方程. 解：因为所求椭球面的轴与三坐标轴重合，所以设所求椭球面的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$， 它与 xOy 面的交线为椭圆 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ Z=0.\end{cases}$ 与已知椭圆 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\\ Z=0.\end{cases}$ 比较知 $a^2=9, b^2=16.$ 又因为椭球面通过点$M(1,2\sqrt{23})$,所以有 $\frac{1}{9}+\frac{4}{16}+\frac{23}{c^2}=1$ 所以 $c^2=36$ 因此所求椭球面的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$	见教材 P162 习题

五、教学反思

1. 运用课件把教学内容罗列出来，学生容易理解教学内容

2. 结合例题讲解，同学们更容易消化吸收

3. 同学们能够积极参议讨论答题

§4.5　双曲面

授课学时:2 学时

一、教学目标:

1.理解并掌握什么是单叶双方曲面;

2.熟练掌握求截线的方法。

3.理解并掌握双叶双曲面的概念。

4.掌握双叶双曲面的标准方程,对双叶双曲面的基本图形有一定的了解。

5. 掌握双叶双曲面的性质。

6. 了解双叶双曲面与坐标平面的交线;用平行于坐标面的平面截割。

二、教学重难点:

1.教学重点:

知道什么是腰椭圆,会求各个曲面上的双曲线;
掌握双叶双曲面的定义、标准方程、基本图形及性质。

2.教学难点:

理解并掌握双叶双曲线与坐标平面的交线;用平行坐标面的平面截割。用平行于某个截面截割单叶双曲线,那么他与平行于那个平面来截割的结果完全相类似

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

§4.5.1 单叶双曲面

1. 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面，该方程叫做单叶双曲面的标准方程，其中 a, b, c 是任意的正常数.

2. 单叶双曲面的图形(如图 4-5).

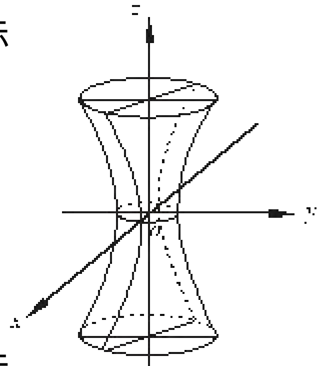


图 4-5

(1) 曲面的对称性：单叶双曲面关于三坐标平面、三坐标轴以及坐标原点都对称. 单叶双曲面的对称平面、对称轴与对称中心，依次叫做单叶双曲面的主平面、主轴与中心.

(2) 曲面与坐标轴的交点：单叶双曲面与 z 轴不交，与 x 轴与 y 轴分别交于点($\pm a$, 0, 0)与(0, $\pm b$, 0)，这四点叫做单叶双曲面的顶点.

(3) 被坐标面截得的曲线：单叶双曲面被三坐标面所截得的曲线方程分别为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0,\end{cases} \quad ① \qquad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases} \quad ② \qquad \begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases} \quad ③$$

①为 $x0y$ 坐标面上的腰椭圆，②,③分别为 $x0z$, $y0z$ 坐标面上的双曲线，这两条双曲线的虚轴都是 z 轴，虚轴的长都等于 $2c$.

(4) 被坐标面的平行平面所截得的曲线：用平行于 $x0y$ 坐标面的平面 $z=h$ 来截割，得截线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases} \qquad ④$$

单叶双曲面可看成是由椭圆族④所生成，这族椭圆中的每一个椭圆所在平面与 xOy 坐标面平行，两双顶点分别在双曲线②、双曲线③上.

如果用平行于 xOz 坐标面的平面 $y=k$ 来截割，得截线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2}\\ y=k.\end{cases},$$

此曲线当 $|k|<b$ 时为实轴平行于 x 轴，虚轴平行于 z 轴的双曲线；$|k|>b$ 时为实轴平行于 z 轴，虚轴平行于 x 轴的双曲线；$|k|=b$ 时为两对相交于 $(0,\pm b,\ 0)$ 的直线.

用平行于 yOz 坐标面的平面来截割，情况类似.

若 $a=b$，方程即为旋转单叶双曲面.

3. 单叶双曲面的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\ \sec u\cos v,\\ y=b\ \sec u\ \cos v,\\ z=c\,\mathrm{tg}u.\end{cases}$$

§4.5.2 双叶双曲面

1. 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

所表示的图形，叫做双叶双曲面，该方程叫做双叶双曲面的标准方程，其中 $a,\ b,\ c$ 为正常数.

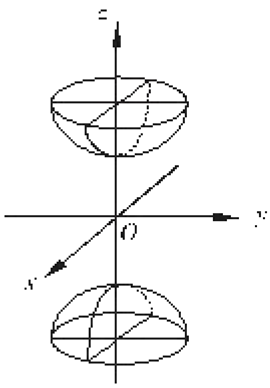


图 4-6

2. 双叶双曲面的图形(如图 4-6)：

（1） 曲面的对称性：双叶双曲面关于三坐标面、三坐标轴以及坐标原点都对称. 双叶双曲面的对称平面、对称轴与对称中心，依次叫做双叶双曲面的主平面、主轴与中心.

（2） 曲面与坐标轴的交点 :双叶双曲面与 x 轴、y 轴都不相交，只与 z 轴相交于两点$(0,\ 0, \pm c)$，这两点叫做双叶双曲面的顶点

（3） 曲面的存在范围：双叶双曲面在两平行平面 $z=\pm c$ 之间没有曲面上的点，曲面分成两叶，一叶上点的坐标都有 $z\geq c$，另一叶上点的坐标都有 $z\leq -c$.

（4） 被坐标面所截得的曲线 :坐标平面 $z=0$ 与曲面不相交，而坐标面 $y=0$ 与 $x=0$ 分别截曲面得截线为双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1,\\ y=0;\end{cases} \quad ⑤$$

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0.\end{cases} \quad ⑥$$

它的实轴都是 z 轴，实轴长都等于 $2c$.

（5） 被坐标面的平行平面所截得的曲线：用平行于 xOy 坐标面的平面 $z=h$（ $|h|\geq c$ ）来截割得截线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{cases} \quad ⑦$$

当 $|h|=c$ 时，截得的图形为一点；当 $|h|>c$ 时，截线为椭圆. 双叶双曲面可看成是由椭圆族⑦所生成，这族椭圆中的每一个椭圆所在平面与 xOy 坐标面平行，两双顶点分别在双曲线⑤, ⑥上.

用平行于 x 坐标面或 yOz 坐标面的平面来截割双叶双曲面都得到双曲线.

若 $a=b$，方程即为旋转双叶双曲面.

3．双叶双曲面参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cdot \mathrm{tg}u\cdot\cos v, \\ y=b\cdot \mathrm{tg}u\cdot \sin v, \\ z=c\cdot \sec u. \end{cases}$$

4．理解以下结论：设有标准形式

$$Px^2+Qy^2+Rz^2=1,\qquad PQR\neq 0.$$

则有　(1) P，Q，R 均正表示椭球面；

(2) P，Q，R 两正一负表示单叶双曲面；

(3) P，Q，R 两负一正表示双叶双曲面；

(4) P，Q，R 均负表示虚椭球面.

它们都有中心，统称为有心二次曲面.

例 1．给定方程 $\dfrac{x^2}{A-\lambda}+\dfrac{y^2}{B-\lambda}+\dfrac{z^2}{C-\lambda}=1$ $(A>B>C>0)$，试问当取异于 A，B，C 的各种数值时，它表示怎样的曲面?

解：由思考题 2 的结论，有

(1) 当 $<C$ 时，P，Q，R 全正，表示椭球面；

(2) 当 $C<\quad<B$ 时，P，Q，R 两正一负，表示单叶双曲面；

(3) 当 $B<\quad<A$ 时，P，Q，R 两负一正，表示双叶双曲面；

(4) 当 $>A$ 时，P，Q，R 全负，无图形或表示虚椭球面.

例 2．试求单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1$ 与平面 $x-2z+3=0$ 的交线对 xOy 平面的射影柱面.

解：单叶双曲面与平面的交线为

$$\begin{cases} x-2z+3=0, \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1, \end{cases}$$

从中消去 z 得所求的射影柱面方程为

$$(x-12)^2+20y=260,$$

即 $$\frac{(x-12)^2}{260}+\frac{y^2}{13}=1.$$

例 3. 设动点到(4, 0, 0)的距离等于这点到平面 $x=1$ 的距离的两倍,求这动点的轨迹.

解：设动点为 $P(x, y, z)$，依题意有

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2}=2|x-1|,$$

化简得 $$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{12}=1.$$

它是以 x 轴为对称轴的旋转双叶双曲面.

例 4. 设直线 l 与 m 为互不垂直的两条异面直线，C 是 l 与 m 公垂线的中点，A、B 两点分别在直线 l、m 上滑动，且 $ACB=90$，试证直线 AB 的轨迹是一个单叶双曲面.

证明：取两异面直线 l、m 的公垂线为 z 轴，公垂线的中点 C 为坐标原点，x 轴与两异面直线成等角，并设两异面直线间的距离为 $2a$，夹角为 2 90，则有

$$l:\begin{cases} x=t_1\cos\alpha, \\ y=t_1\sin\alpha, \\ z=a; \end{cases} \qquad m:\begin{cases} x=t_2\cos\alpha, \\ y=-t_2\sin\alpha, \\ z=-a. \end{cases}$$

$A(t_1\cos\ , t_1\sin\ , a)$，$B(t_2\cos\ , -t_2\sin\ , -a)$. 由于 $\overline{CA}$ $\overline{CB}$,

故有 $$t_1t_2\cos^2\ -t_1t_2\sin^2\ -a^2=0,$$

$$t_1 t_2 \cos 2 \quad = a^2,$$

因为 2　　90　，于是 $\cos 2$　　0，从而

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}. \qquad ①$$

又直线 AB 方程为

$$\begin{cases} x = t_1\cos\alpha + (t_2 - t_1)\cos\alpha\cdot u, \\ y = t_1\sin\alpha - (t_2 + t_1)\sin\alpha\cdot u, \\ z = a - 2au. \end{cases} \qquad ②$$

由①, ②两式消去参数 u, t_1, t_2 得 AB 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{\frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}} - \frac{y^2}{\frac{a^2\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

它是一个单叶双曲面.

例 5. 用一族平行平面 $z = h$ (h 为参数) 截割双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 得一族双曲线，求这些双曲线焦点的轨迹.

解：所截得的双曲线族方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h. \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)} - \frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

所以它的焦点坐标为 $x = \pm\sqrt{(a^2+b^2)\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}$

$y=0$,

$z=h$.

消去参数 h 得焦点的轨迹方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2+b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

这是一条在 xOz 坐标面上的双曲线，其实轴为 x 轴，虚轴为 z 轴.

4.课堂练习：

1. 已知双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，$y=0$，设有长短轴之比是常数的一族椭圆，它们的中心在 z 轴上，它们所在的平面与 z 轴垂直，它们长轴的两个端点在给定的双曲线上，试求这族椭圆所形成的轨迹.

2. 求准线为 $\begin{cases} x^2-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=2 \\ z=3 \end{cases}$ 且母线平行于 z 轴的柱面方程.

3. 给定方程

$$\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1\quad(a>b>c>0).$$

试问 k 取何值(异于 a^2，b^2，c^2)时，这方程表示椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面？

5.课堂小结

可以看出，对于双曲面，我们仍可以将其看为含参数 h 的一族椭圆。同样，对于根据曲面的方程来认识曲面的形状，我们在这一节也用到了“平行切割法”，对于认识空间图形，它把复杂的空间图形归结为比较容易认识的平面曲线。可见，它确实是一种重要的思想方法。

6.布置作业

课本第 168 页习题：3,5

7.板书设计

§ 4.5 双曲面

<table>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>

§4.5.1 单叶双曲面

1. 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面，该方程叫做单叶双曲面的标准方程，其中 a, b, c 是任意的正常数

</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

(1) 曲面的对称性：单叶双曲面关于三坐标平面、三坐标轴以及坐标原点都对称. 单叶双曲面的对称平面、对称轴与对称中心，依次叫做单叶双曲面的主平面、主轴与中心.

(2) 曲面与坐标轴的交点：单叶双曲面与 z 轴不交，与 x 轴与 y 轴分别交于点($\pm a$, 0, 0)与(0, $\pm b$, 0)，这四点叫做单叶双曲面的顶点.

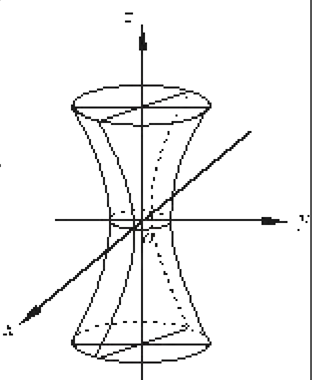


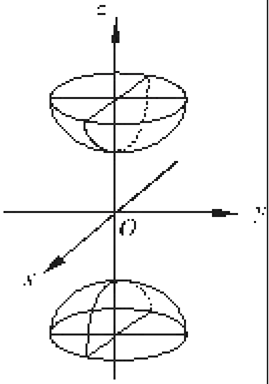
图 4-5

(3) 被坐标面截得的曲线：单叶双曲面被三坐标面所截得的曲线方程分别为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0,\end{cases}\qquad ①$$

</td><td></td><td></td></tr>
</table>

$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases}$ ② $\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$ ③ (4) 被坐标面的平行平面所截得的曲线：用平行于 xOy 坐标面的平面 $z=h$ 来截割，得截线方程为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$ ④ 单叶双曲面可看成是由椭圆族④所生成，这族椭圆中的每一个椭圆所在平面与 xOy 坐标面平行，两双顶点分别在双曲线②、双曲线③上. 如果用平行于 xOz 坐标面的平面 $y=k$ 来截割，得截线方程为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2}\\ y=k.\end{cases}$,		
3. 单叶双曲面的参数方程为 $\begin{cases}x=a\sec u\cos v,\\ y=b\sec u\cos v,\\ z=c\,\mathrm{tg}u.\end{cases}$		

§4.5.2 双叶双曲面 1. 在直角坐标系下，由方程 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ 所表示的图形，叫做双叶双曲面,该方程叫做双叶双曲面的标准方程，其中 a, b, c 为正常数  图 4-6		
(1) 曲面的对称性：双叶双曲面关于三坐标面、三坐标轴以及坐标原点都对称. 双叶双曲面的对称平面、对称轴与对称中心，依次叫做双叶双曲面的主平面、主轴与中心. (2) 曲面与坐标轴的交点：双叶双曲面与 x 轴、y 轴都不相交，只与 z 轴相交于两点(0, 0, ±c)，这两点叫做双叶双曲面的顶点 (3) 曲面的存在范围：双叶双曲面在两平行平面 $z=\pm c$ 之间没有曲面上的点，曲面分成两叶，一叶上点的坐标都有 $z\geq c$，另一叶上点的坐标都有 $z\leq -c$. (4) 被坐标面所截得的曲线：坐标平面 $z=0$ 与曲面不相交，而坐标面 $y=0$ 与 $x=0$ 分别截曲面得截线为双曲线 $$\begin{cases}\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,\\ y=0;\end{cases}$$ ⑤		

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$$ ⑥ 它的实轴都是 z 轴，实轴长都等于 $2c$. (5) 被坐标面的平行平面所截得的曲线：用平行于 xOy 坐标面的平面 $z=h$（ $\lvert h\rvert\geq c$ ）来截割得截线方程为 $$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{cases}$$ ⑦		
3. 双叶双曲面参数方程为 $$\begin{cases}x=a\cdot\mathrm{tg}u\cdot\cos v,\\ y=b\cdot\mathrm{tg}u\cdot\sin v,\\ z=c\cdot\sec u.\end{cases}$$		
4．理解以下结论：设有标准形式 $Px^2+Qy^2+Rz^2=1,\quad PQR\neq0.$ 则有 (1) $P,\ Q,\ R$ 均正表示椭球面； (2) $P,\ Q,\ R$ 两正一负表示单叶双曲面； (3) $P,\ Q,\ R$ 两负一正表示双叶双曲面； (4) $P,\ Q,\ R$ 均负表示虚椭球面. 它们都有中心，统称为有心二次曲面.		

五、教学反思

1. 运用 PPT 讲课件可以节省许多授课时间，课堂形式多样化，改变了传统教学的单一化；

2. 能生动、直观、形象地展示教学内容，便于学生从感性上更好

的认识事物，便于笔记；

3.不过对老师提出更高的要求，要做课件工作量有点大；

4.有时候速度过快，内容太抽象，有些同学跟不上进度；

5.学生上课有些睡觉，班级气氛不够好；

6.上去黑板做题的同学还是有，然后同学回答问题也是有的；

7.上课没有讲小话的学生。

4.6 抛物面

1.椭圆抛物面

授课学时 1学时

一、教学目标

知识目标：1.熟练掌握求椭圆抛物面的规律，快速写出相应椭圆抛物面的方程；

2.理解并掌握椭圆抛物面的性质，会求椭圆抛物面与坐标平面的交线；

能力目标：1.通过与现实生活的联系，在教师引导下探索新知识，培养学生观察、分析、判断、归纳的能力；

2.锻炼学生联系、对应、转化的辩证思想；

3.强化“数”与“形”相结合，并相互转化的数学思想。

情感目标：1.运用数形结合的思想方法，激发学生观察、分析、探求的兴趣和热情；

2.培养学生积极探索的科学态度，让学生体会数学问题从具体到抽象的转化过程；

3.让学生感受到数学之美，从而激发学生学习数学的兴趣和信心。

二.、教学重难点

重点：求椭圆抛物面的规律，掌握相应椭圆抛物面方程的一般方法和步骤

难点：掌握椭圆抛物面的性质，会求平行与坐标面的平面截割

三、教学方法

多媒体辅助教学和探究式教学法

四、教学对象分析

本课程的教学对象是数学与应用数学专业大一的学生，在此之前，学生接触到的几何知识大部分是平面几何，对空间几何图形的认识比较抽象，针

对现实生活中的许多图形、建筑、装置等更是没有一个对应的数学概念，因而利用生活中的实例去引起学生的注意，采用多媒体演示，通过不断观察、分析、探索、归纳和总结，让学生体会到解析几何数形结合的思想是重要的。

五、教学过程

一．联系实际引入

1.**想一想**：构成这此物体的曲面具有什么样的特征？

2.**思考**：这些曲面的方程如何表示？

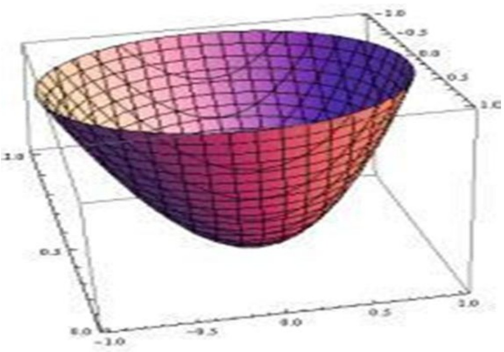
二．讲授新知

1.**定义**　在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \quad (a,b>0) \qquad (1)$$

所表示的曲面叫做**椭圆抛物面**

方程(1)叫做**椭圆抛物面的标准方程**



2.椭圆抛物面的性质

（1）对称性

椭圆抛物面关于 **xOz** 、**yOz** 坐标平面,z 坐标轴对称

事实上,如果(x,y,z)满足方程,则

①(x,-y,z)和(-x,y,z)也满足方程.　所以方程的图象关于 xoz 面、yoz 面对称.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

②(-x, -y, z)满足方程.　所以方程的图象关于 z 轴对称.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

（2）　顶点

(令两个坐标为零,代入方程解第三个坐标)

椭圆抛物面与对称轴交于点(0,0,0)这点称为椭圆抛物面的顶点

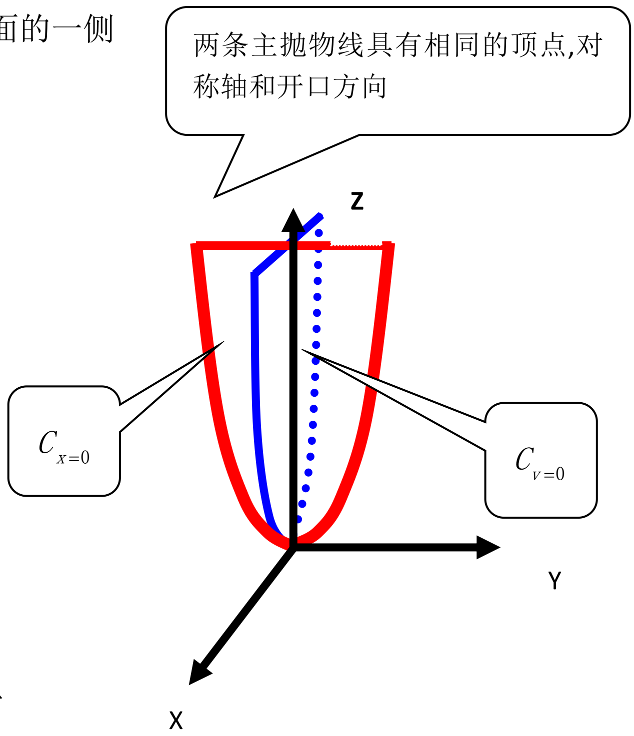
椭圆抛物面没有对称中心

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

（3 ）范围

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\geq 0 \longrightarrow z\geq 0$$

说明:椭圆抛物面的全部在 xOy 平面的一侧



3. 椭圆抛物面与坐标平面的交线

ｉ）　用坐标面截割

① z = 0 截曲面

$C_{z=0}$: (0, 0, 0)

② y = 0 截曲面

$$C_{y=0}:\begin{cases}x^2=2a^2z,\\ y=0\end{cases}（抛物线）$$

③x = 0 截曲面

$$C_{x=0}:\begin{cases}y^2=2b^2z,\\ x=0\end{cases}（抛物线）$$

4. 用平行于坐标面的平面截割曲面

（1）用平行于XOY坐标面的平面z=h(h > 0),去截椭圆抛物面

$$\begin{matrix}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z\\ z=h,(h>0)\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2h\\ z=h,(h>0)\end{matrix}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad \begin{matrix}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h \\ z=h,(h>0)\end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix}\frac{x^2}{(\sqrt{2ah})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{bh})^2}=1 \\ z=h,(h>0)\end{matrix}$$

交线为平面 z=h 上的椭圆,它的半轴为:$a\sqrt{2h}, b\sqrt{2h}$ 两条半轴随着 h 的增加而增大

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2ah})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{bh})^2}=1$$
$$z=h,(h>0)$$

顶点坐标为 $(\pm a\sqrt{2h},0,h),(0,\pm b\sqrt{2h},h)$

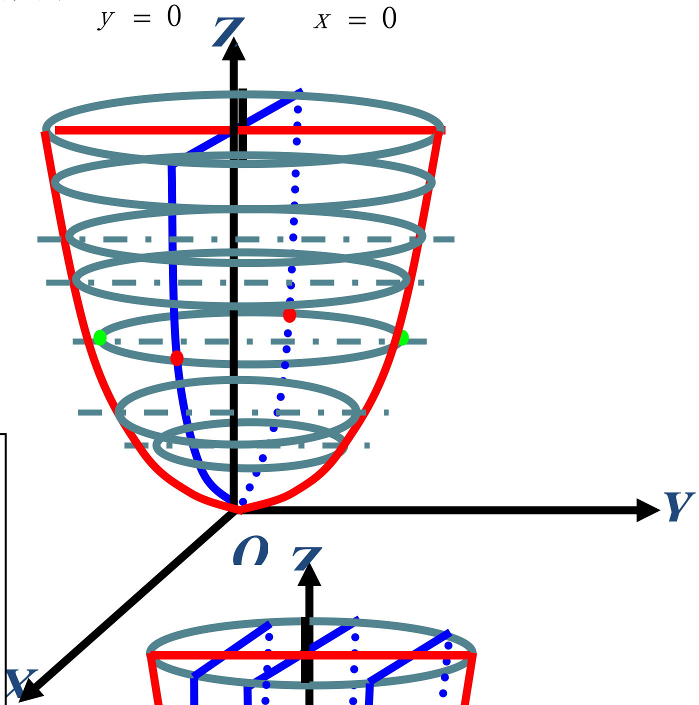
观察这两对顶点与下面两条主抛物线的关系 $\begin{matrix}x^2=2a^2z \\ y=0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}y^2=2b^2z \\ x=0\end{matrix}$

顶点坐标 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$ $(0,\pm b\sqrt{2h},h)$

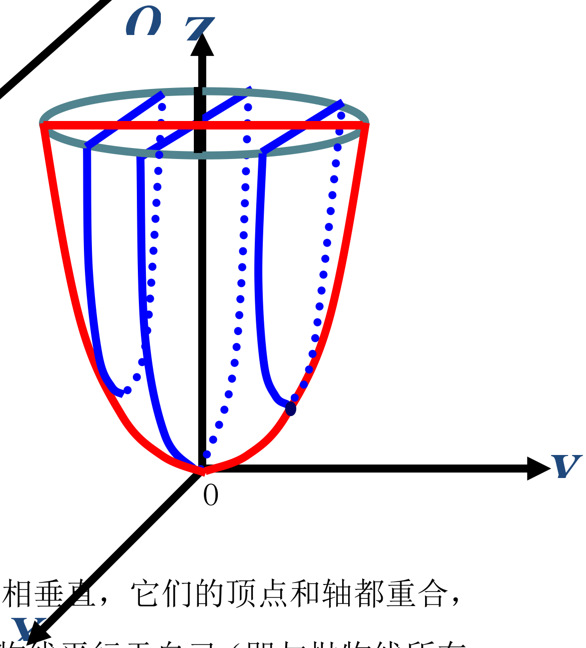
在主抛物线上:

$$\begin{matrix}x^2=2a^2z, \\ y=0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}y^2=-2b^2z \\ x=0\end{matrix}$$

、



结论:椭圆抛物面可看作由一个椭圆的变动(大小位置都改变)而产生,该椭圆在变动中,保持所在平面与 x0y 面平行,且两对顶点分别在两主抛物线上滑动

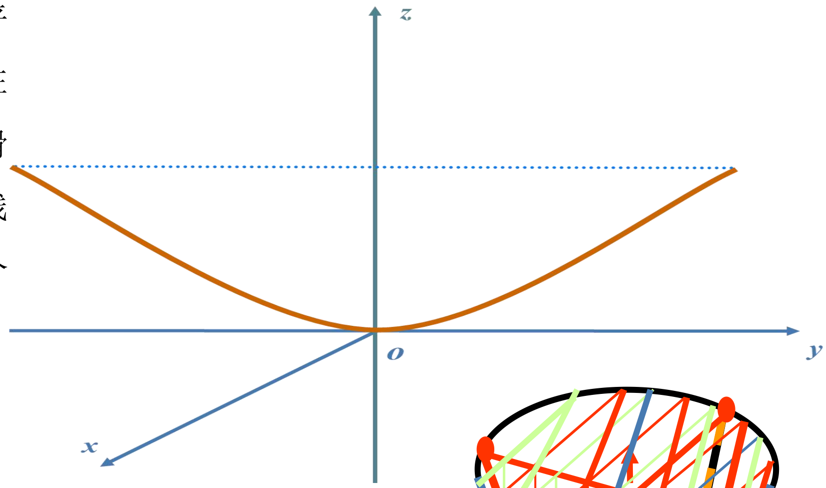


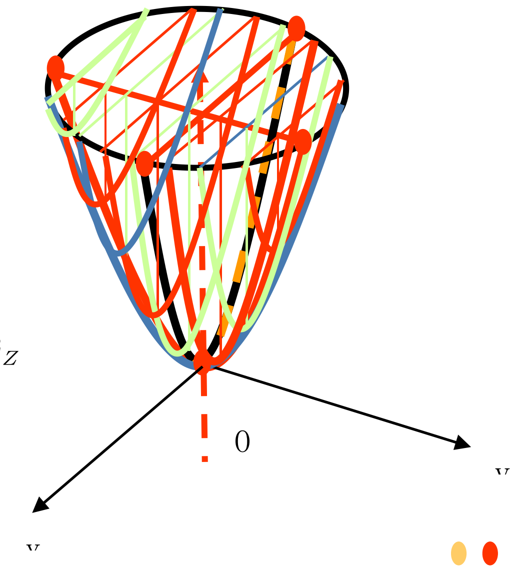
(2)用 y = k 截曲面

$$C_{y=k}:\begin{cases}x^2=2a^2\left(z-\dfrac{y^2}{2b^2}\right), \\ y=k\end{cases}\text{(抛物线)}$$

结论:取这样两个抛物线,它们所在的平面互相垂直,它们的顶点和轴都重合,且两抛物线有相同的开口方向,让其中一条抛物线平行于自己(即与抛物线所在

的平面平行），且使其顶点在另一个抛物线上滑动，那么前一抛物线的运动轨迹是一个椭圆抛物面.



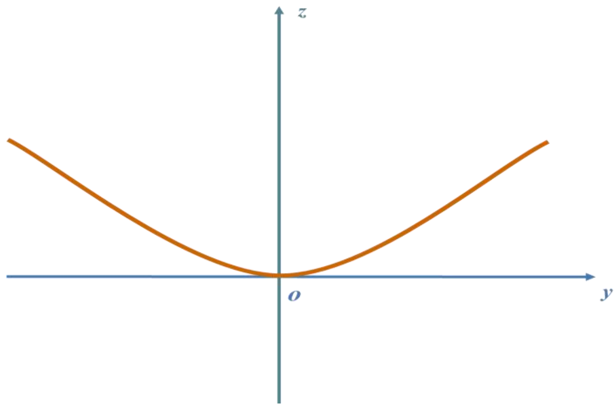


5. 旋转抛物面与椭圆抛物面的关系

当 a=b 时，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \Rightarrow x^2+y^2=2a^2z$

将抛物线 $\Gamma:\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}$

绕 z 轴旋转



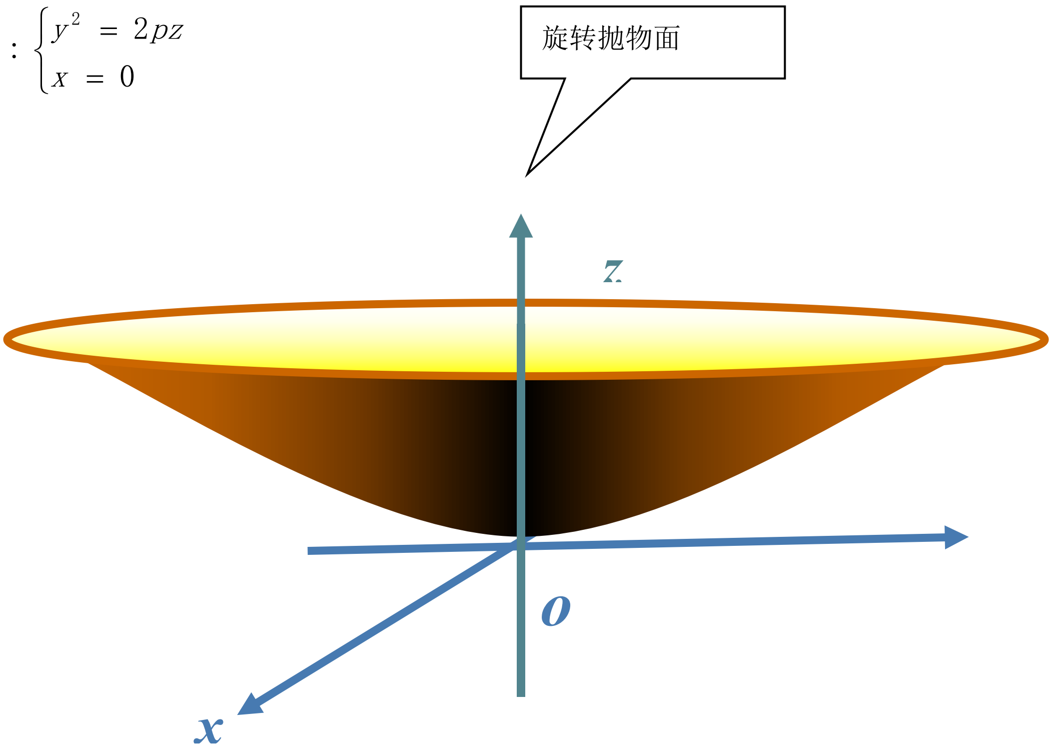
将抛物线 $\Gamma:\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}$

绕 z 轴旋转

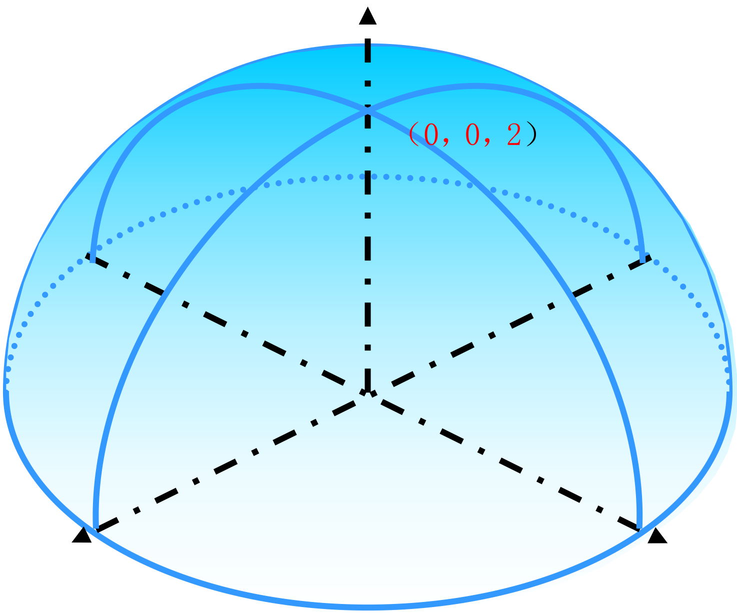
将抛物线 $\Gamma: \begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$

绕 z 轴旋转

$y^2 = 2pz$



例 1 做出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 与旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 的交线



三．课堂小结

1 用平行于 x=t 的平面来截割椭圆抛物面时，与用平行于 y = k 的平面来截割曲面结果是完全类似的

2. 用平行截割法对曲面进行截割时，要注意表示平面常数 h 的取值范围。

思考题：

已知椭圆抛物面 S 的顶点在原点，对称面为 x0z 面与 y0z 面，且过点（1,2,6）和 （$\frac{1}{3}$，-1,1)，求这个椭圆抛物面的方程。

四．布置作业

P_{158} 1 3

§4.6.2 双曲抛物面

授课学时:1 学时

一、教学目标

1. 理解抛物面的概念

2. 掌握双曲抛物面的性质并灵活运用

二、教学重难点

1. 教学重点： 求双曲抛物面的规律，掌握相应双曲抛物面方程的一般方法和步骤；理解双曲抛物面的概念和性质。

2. 如何做出双曲抛物面和探究坐标面去截双曲抛物面研究主截线的特征。

三、教学方法

多媒体辅助教学、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程

（一）导入：

联系实际引入

1. 想一想：构成这此物体的曲面具有什么样的特征？

2. 思考：这些曲面的方程如何表示？

（二）讲授新知

1. 双曲抛物面的概念

定义 4.6.2 在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \quad \textbf{(4.6.2)}$$

所表示的曲面叫做**双曲抛物面**

其中 a, b 为任意的正常数。

方程（4.6.2）**叫做双曲抛物面的标准方程**

二、双曲抛物面的性质

1. 对称性

双曲抛物面（4.6-2）关于 x0z 、y0z 坐标平面以及 z 轴对称. x0z 、y0z 坐标平面是它的对称平面， z 轴是它的对称轴.

双曲抛物面无对称中心

2. 范围

$x\in R, y\in R, z\in R$

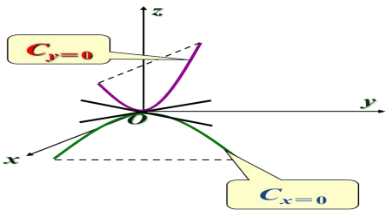
方程(4.6-2)表示的曲面是无界的

三、 双曲抛物面的形状(平行截割法)

ⅰ） 用坐标面截割曲面 （两条主抛物线具有相同的顶点和对称轴,但开口方向相反。）

① 坐标面 z = 0 截割曲面，得 两**相交直**线$C_{z=0}$.

② 用坐标面 y = 0 截割曲面，得



抛物线 $C_{y=0}$: $\begin{cases} x^2=2a^2z, \\ y=0. \end{cases}$

③ 坐标面 x = 0 截割曲面，得

抛物线 $Cx=0:\begin{cases} y^2=-2b^2z, \\ x=0 \end{cases}$

现用 Z=h,(h 不为 0)来截 (4.6-2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \\ z=h,(h>0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2h \\ z=h,(h>0) \end{cases}$$

这是Z=h平面上的一条双曲线 $\Leftarrow$ $\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{2h})^2}-\frac{y^2}{(b\sqrt{2h})^2}=1 \\ z=h,(h>0) \end{cases}$

这条双曲线的实轴平行于x轴，实半轴为

$a\sqrt{2h}$

虚轴平行于y轴，虚半轴为 $\rightarrow$ $b\sqrt{2h}$

顶点坐标为 $\rightarrow$ $(\pm a\sqrt{2h},0,h),h>0$

顶点坐标 $(\pm a\sqrt{2h},0,h)$

在主抛物线上： $\begin{cases} x^2 = 2a^2 z, \\ y = 0 \end{cases}$

当h<0时，z=h与之的交线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{(b\sqrt{-2h})^2} - \dfrac{x^2}{(a\sqrt{-2h})^2} = 1 \\ z = h, (h < 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{(b\sqrt{-2h})^2} - \dfrac{x^2}{(a\sqrt{-2h})^2} = 1 \\ z = h, (h < 0) \end{cases}$$

这条双曲线的实轴平行于y轴，实半轴为

$b\sqrt{-2h}$

虚轴平行于x轴,虚半轴为 $a\sqrt{-2h}$

顶点坐标为 $(0,\pm b\sqrt{-2h},h), h < 0$

顶点坐标

$$(0, \pm b\sqrt{-2h}, h)$$

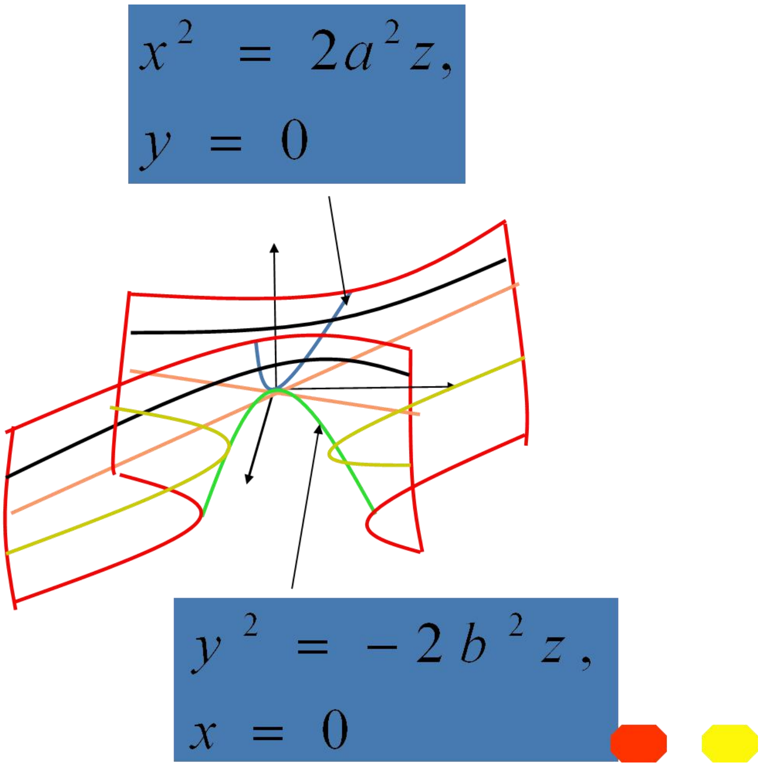
在主抛物线上：

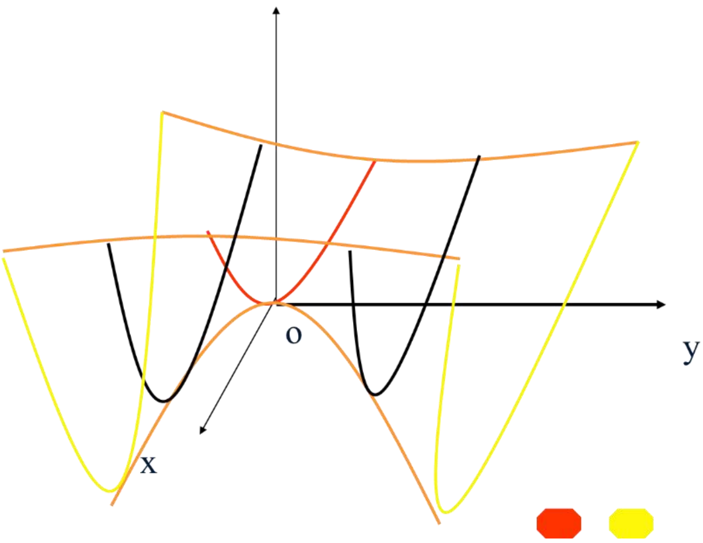
$$\begin{cases} y^2 = -2b^2 z, \\ x = 0 \end{cases}$$

从这两对坐标 $(\pm b\sqrt{2h}, 0, h), h > 0$，$(0, \pm a\sqrt{-2h}, h), h < 0$ 在两条主抛物线上可知

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 z, \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = -2b^2 z, \\ x = 0 \end{cases}$$

双曲抛物面被xoy面分成两个部分，h>0时，顶点随h的增大而从x轴两个方向无限远离原点，且为上升趋势；h<0时，则随-h的增大而从y轴正向无限远离原点，且为下降趋势。


$x^2 = 2a^2 z,$
$y = 0$
$y^2 = -2b^2 z,$
$x = 0$


o
y
x

ii ） 用平行于坐标面的平面截割曲面

①用平面$z=h$截割曲面，得

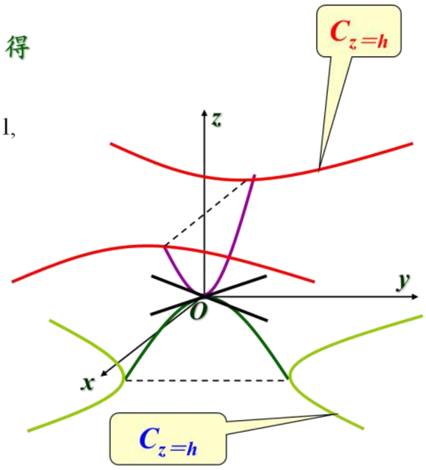
双曲线 $C_{z=h}$: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2a^2h}-\dfrac{y^2}{2b^2h}=1, \\ z=h. \end{cases}$

当$h>0$时，

实轴平行于x轴.

当$h<0$时，

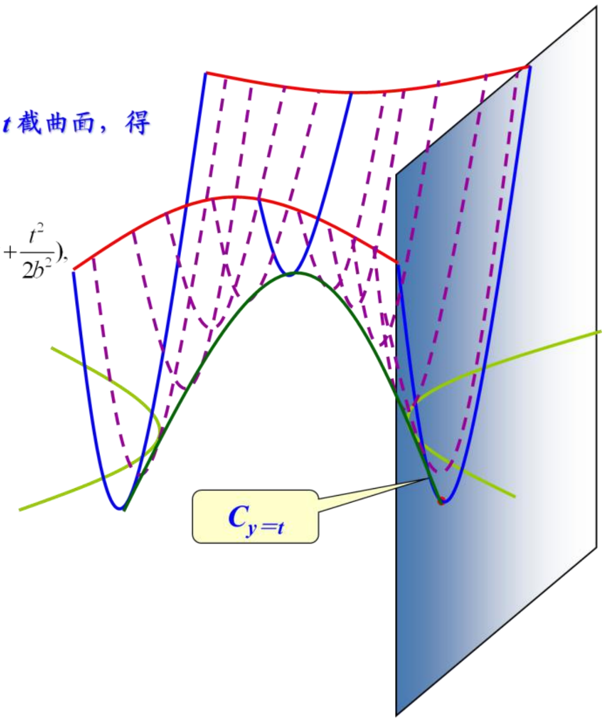
实轴平行于y轴.



②用平面$y=t$截曲面，得

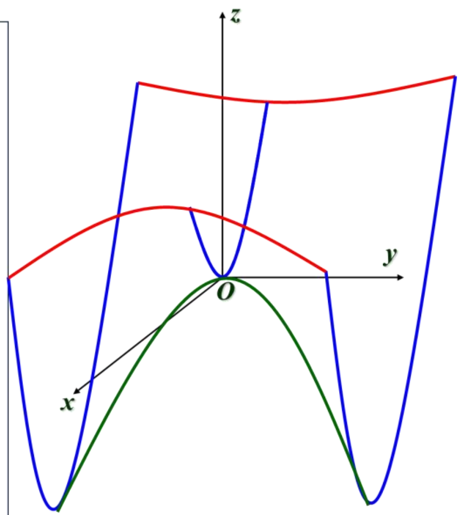
抛物线 $C_{y=t}$:

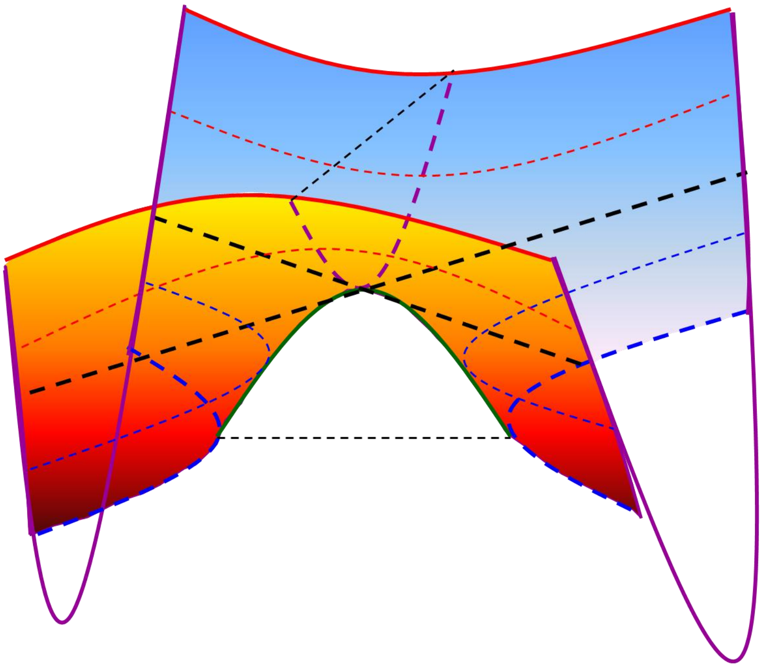
$$\begin{cases} x^2=2a^2(z+\dfrac{t^2}{2b^2}), \\ y=t. \end{cases}$$

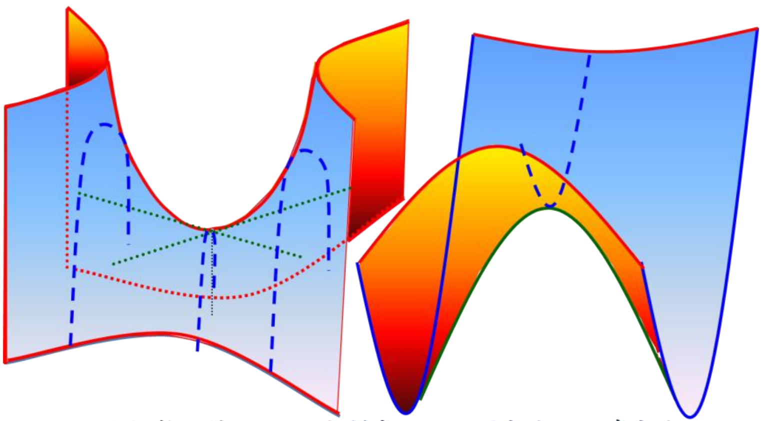


结论：

如果取两个这样的抛物线，它们的所在平面相互垂直，有公共的顶点与轴，而两抛物线的开口方向相反，让其中的一个抛物线平行于自己（即与抛物线所在的平面平行），且使其顶点在另一抛物线上滑动，那么前一抛物线的运动轨迹便是一个双曲抛物面。







双曲抛物面被 xOy 面分割成上、下两部分，上半部分沿x轴的两个方向上升，下半部分沿y轴的两个方向下降，曲面的大体形状形如马鞍，故双曲抛物面也称作马鞍面。

思考:

试验证双曲抛物面的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(u+v), \\ y = b(u-v), \\ z = 2uv, \end{cases}$$

式中 u,v 为参数.

双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 2z$

椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 2z$

抛物面的方程有统一的形式吗?

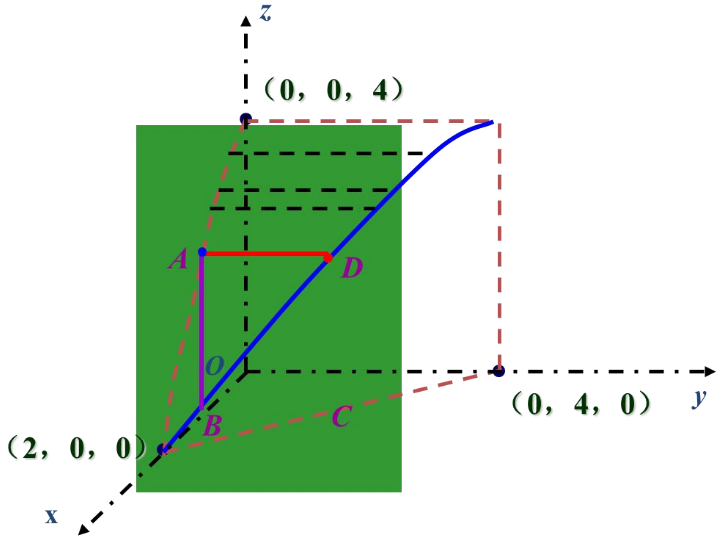
抛物面的方程可以写成统一

$$Ax^2 + By^2 = 2z\left(AB \neq 0\right) \quad (*)$$

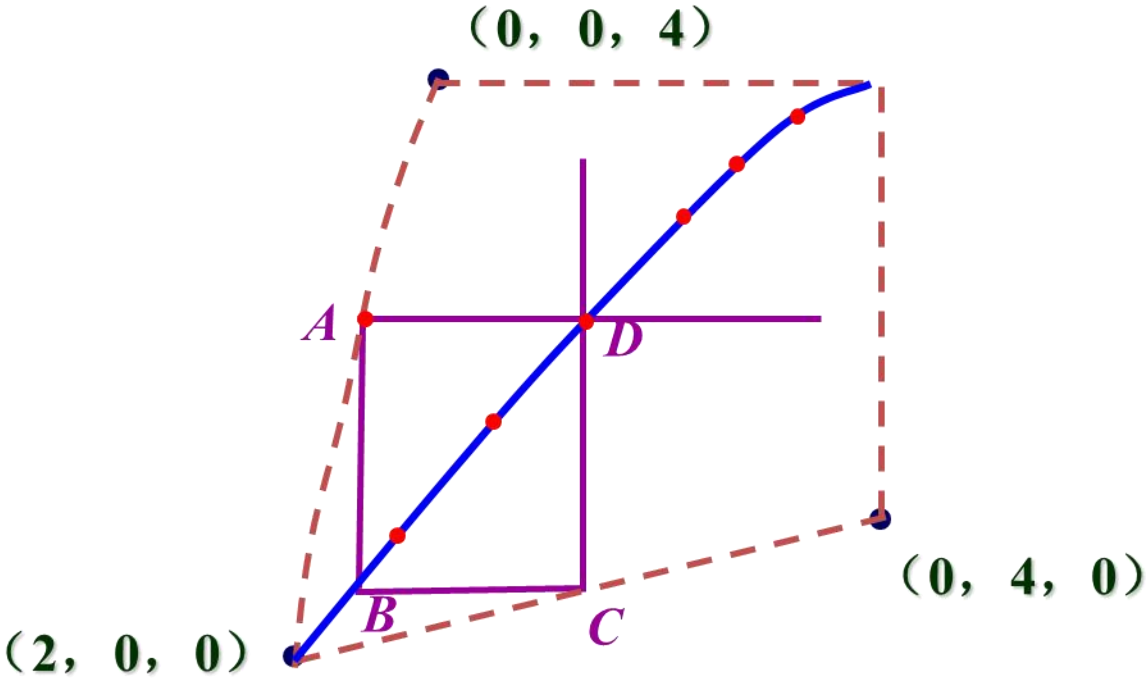
当 $AB > 0$ 时，（ * ）表示椭圆抛物面;

当 $AB < 0$ 时，（ * ）表示双曲抛物面.

例　作出曲面 $z = 4 - x^2$ 与平面 $2x + y = 4$ ，三坐标面所围成的立体在第一卦限部分的立体图形.



例 作出曲面 $z=4-x^2$ 与平面，$2x+y=4$ 三坐标面所围成的立体在第一卦限部分的立体图形.



§4.7　单叶双曲面与双曲抛物面的直母线

授课学时：2 学时

一、教学目标：

1、理解直纹曲面的概念

2、明白单叶双曲面是直纹曲面，双曲抛物面是直纹曲面

3、掌握单叶双曲面与双曲抛物面的性质并灵活运用

二、教学重难点：

1、教学重点：直纹曲面的概念（特殊的直纹曲面）、单叶双曲面与双曲抛物面的性质

2、教学难点：特殊的直纹曲面（单叶双曲面是直纹曲面，双曲抛物

面是直纹曲面）、单叶双曲面与双曲抛物面的性质

三、教学方法：多媒体辅助教学、数形结合、讲练和探究式相结合教学法

四、教学过程：

1、导入：

①运用 4.5 中双曲面的定义以及数学模型引出直母线和直纹曲面的概念，

（1.）**单叶双曲面的概念**

1. 定义　在直角坐标系下，由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

所表示的曲面叫做单叶双曲面。

单叶双曲面的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

其中a,b,c为正常数

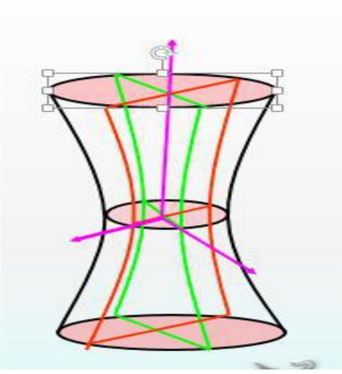
方程左边三项,两正一负,右边为1

注：在直角坐标系下，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{与} -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所表示的图形也是单叶双曲面.

单叶双曲面的基本图形



（2.）**双曲抛物面的概念**

定义在直角坐标系下，由方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 所表示的曲面叫做双曲抛物面

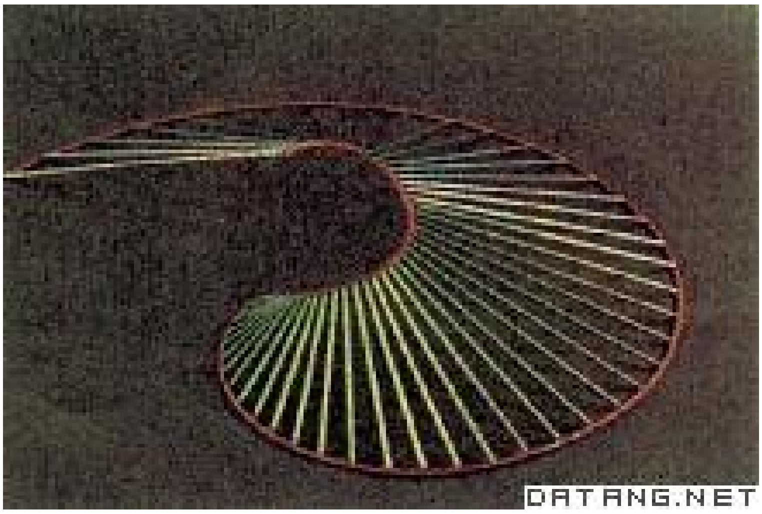
其中 a，b 为任意的正常数；此方程也叫做双曲抛物面的标准方程。

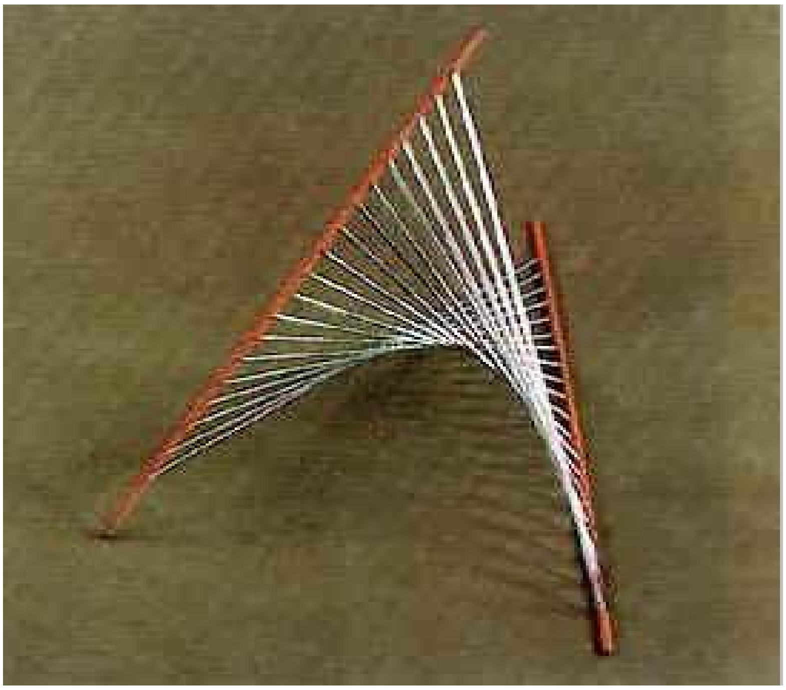
(3.)双曲抛物面的性质 ：

对称性： 双曲抛物面关于xOz 、yOz坐标平面，z坐标轴对称事实上，如果(x, y, z)满足方程，则：
(x, -y, z)和(-x, y, z)也满足方程，所以方程的图象关于xoz面、yoz面对称：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$

双曲抛物面关于xOz 、yOz坐标平面，z坐标轴对称；事实上，如果(x, y, z)满足方程，则：
(-x, -y, z)满足方程，所以方程的图象关于z轴对称：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$
范围： 双曲抛物面没有对称中心 $x\in R, y\in R, z\in R.$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 表示的曲面是无界的

(4.)生活中的直纹曲面：





②运用模型以及多媒体推导相关定理

2、讲解新知：

①直纹曲面的定义：由一族直线所生成的曲面叫做直纹曲面，生成曲面的那族直线叫做该曲面的一族直母线。

②单叶双曲面与双曲抛物面是直纹曲面的证明

单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$(a,b,c>0)$

分析：

如果曲面 S 上存在一族直线，

(2) 直线族中的每条直线都在曲面 S 上

(1) 曲面 S 上的每个点必定在这个族中的某一条直线上；

证明：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ （1）$\rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$ （2）

$\rightarrow (\frac{x}{a}+\frac{z}{c})(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=(1+\frac{y}{b})(1-\frac{y}{b})$ （3）$\rightarrow \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u(1+\frac{y}{b})$ 且 $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{u}(1-\frac{y}{b})$

（4）和 $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0$ 且 $1-\frac{y}{b}=0$ （5）及 $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$ 且 $1+\frac{y}{b}=0$

可以证明，（4）和（5）是（3）中 u $\rightarrow$0 和 u$\rightarrow\infty$

的两种极限情况并且不论 u 取什么数，（3）、（4）

（5）都表示直线，，它们统称为 u 族直线。

可以证明，由这 u 族直线可以构成单叶双曲面（1），

从而它是单叶双曲面的一族直母线。同理：

$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=v(1-\frac{y}{b})$ 且 $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{v}(1+\frac{y}{b})$ 和 $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0$ 且 $1+\frac{y}{b}=0$ 及 $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$ 且

$1-\frac{y}{b}=0$ 也是（1）的另一族直母线。称为（1）的 v 族直母线。

③单叶双曲面与双曲抛物面的性质：

定理 4.7.1 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1，\quad a,b,c>0$$

是直纹曲面. 它有两族直母线：

$$\begin{cases} w\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=w\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \left(w^2+u^2\neq 0\right)$$

与
$$\begin{cases} t\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=v\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ v\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=t\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \left(t^2+v^2\neq 0\right)$$

推论： 对于单叶双曲面上的点，两族直母线中各有一条直母线通过这点.

定理 4.7.2 **双曲抛物面**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z, \qquad a,b>0$$

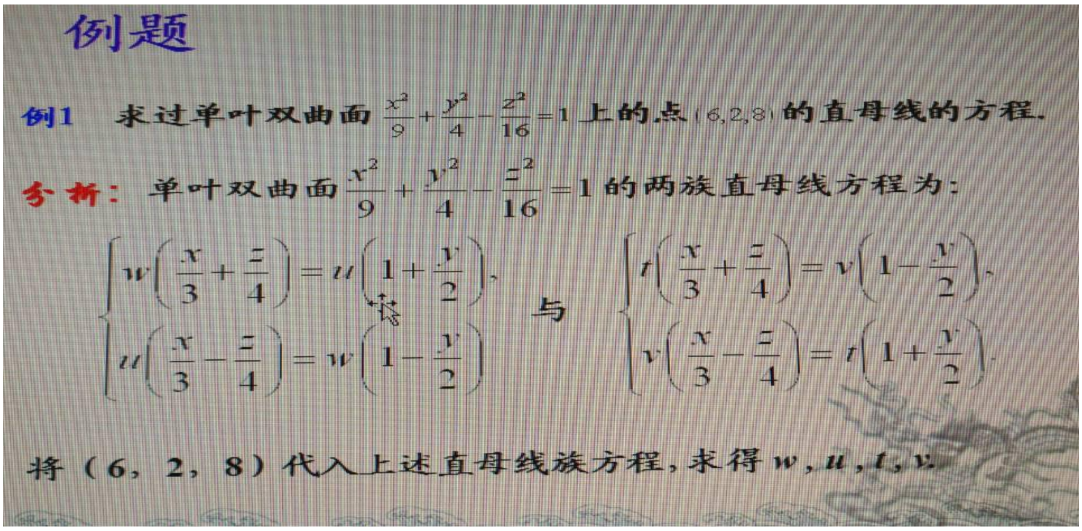
是直纹曲面. 它有两族直母线：

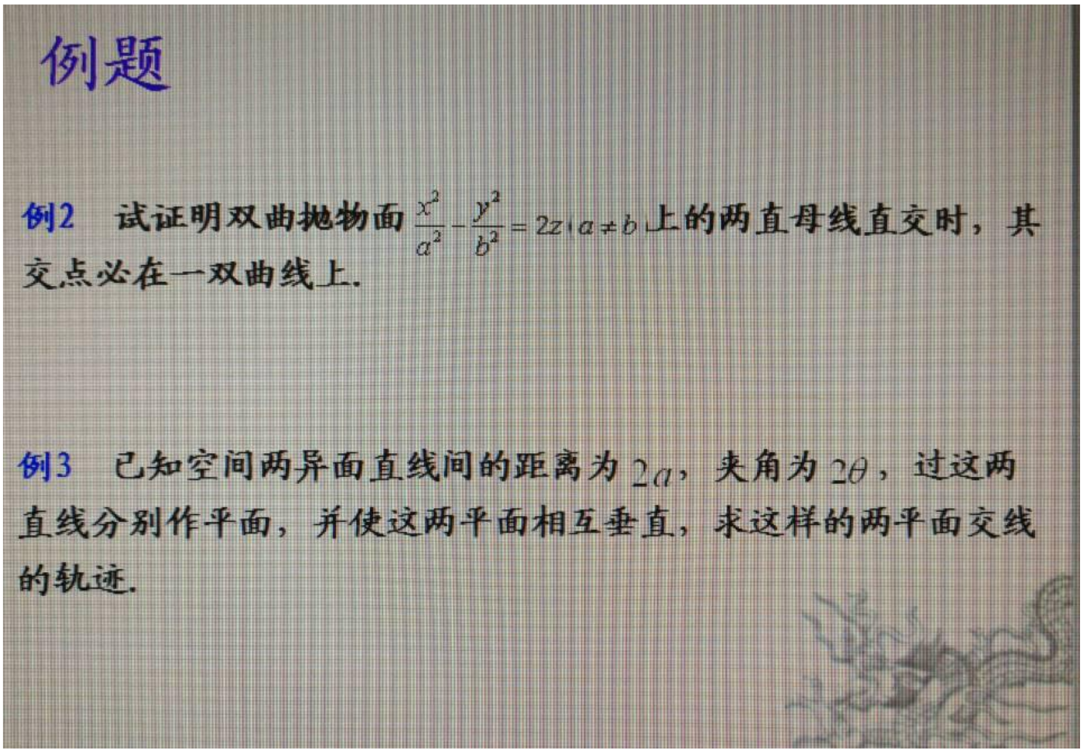
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2u, \\ u\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z, \end{cases} \left(u\in R\right) \qquad (4.7\text{-}3)$$

与
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2v, \\ v\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z, \end{cases} \left(v\in R\right). \qquad (4.7\text{-}4)$$

推论： **对于双曲抛物面上的点，两族直母线中各有一条直母线通过该点.**

3. 例题讲解：





4、课堂练习：

例 2　试证明双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\left(a\neq b\right)$ 上的两直母线直交时，其交点必在一双曲线上.

例 3　已知空间两异面直线间的距离为 2a，夹角为2θ，过这两直线分别作平面，并使这两平面相互垂直，求这样的两平面交线的轨迹.

5、课堂小结：本堂课我们学习了直母线和直纹曲面的定义，了解了单叶双曲面与双曲抛物面的性质并且能够很好的运用，收货颇多。

6、布置作业：P182 习题 4 至 10 任选 4 题

7、板书设计：

五教学反思：

对于本次授课我很满意，同学们积极配合老师教学，顺利完成教学任务。