

第三章 线性方程组

- § 1 消元法
- § 2 n 维向量空间
- § 3 线性相关性
- § 4 矩阵的秩
- § 5 线性方程组有解判别定理
- § 6 线性方程组解的结构
- § 7 二元高次方程组

第一节 消元法

主要内容

- 线性方程组的概念
- 消元法
- 线性方程组消元法的矩阵表示
- 齐次线性方程组的解

2. 方程组的解

设 k_1, k_2, \dots, k_n 是 n 个数，如果 x_1, x_2, \dots, x_n 分别用 k_1, k_2, \dots, k_n 代入后，(1) 中每一个式子都变成恒等式，则称有序数组 (k_1, k_2, \dots, k_n) 是 (1) 的一个解。

(1) 的解的全体所成集合称为它的解集合。

解集合是空集时就称方程组 (1) 无解。

3. 同解方程组

如果两个线性方程组有相同的解集合，则称它们是同解的。

4. 方程组的系数矩阵与增广矩阵

矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$ 称为方程组 (1) 的系数矩阵；

而矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$

称为方程组 (1) 的增广矩阵.

二、消元法

1. 引例 解线性方程组
$$\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

解：交换这2个方程对换次序，得
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$$

第1个方程的-2倍加到第2个方程，得
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = -2 \end{cases}$$

第2个方程两边同时乘0.5，得
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

第2个方程乘-1加到第1个方程，得
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

2. 线性方程组的初等变换

定义 线性方程组的初等变换是指下列三种变换

- ① 用一个非零的数乘某一个方程；
- ② 将一个方程的倍数加到另一个方程上；
- ③ 交换两个方程的位置。

性质 线性方程组经初等变换后，得到的线性方程组与原线性方程组同解。

考察方程组的解的情况:

1° $d_{r+1} \neq 0$ 时, 方程组(5)无解, 从而(1)无解.

2° $d_{r+1} = 0$ 时, 方程组(5)有解, 从而(1)有解,

此时去掉“ $0 = 0$ ”的方程. 分两种情况:

i) 若 $r = n$. 这时阶梯形方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \quad \quad \quad \dots \dots \dots \\ \quad \quad \quad \quad c_{nn}x_n = d_n \end{cases} \quad (6)$$

其中 $c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

由Cramer法则, 此时(6)有唯一解, 从而(1)有唯一解.

例1 解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

ii) 若 $r < n$, 这时阶梯形方程组可化为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\ \cdots \cdots \cdots \\ c_{rr}x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{cases} \quad (7)$$

其中 $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, r$.

此时方程组(7)有无穷多个解, 从而(1)有无穷多个解.

事实上, 任意给 x_{r+1}, \cdots, x_n 一组值, 由(7)就唯一地定出的 x_1, \cdots, x_r 一组值.

一般地，可以把 x_1, \dots, x_r 通过 x_{r+1}, \dots, x_n 表示出来。

这样一组表达式称为方程组(1)的**一般解**，

而 x_{r+1}, \dots, x_n 称为一组**自由未知量**。

例2 解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

三、线性方程组消元法的矩阵表示

不妨设线性方程组(1)的增广矩阵 $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$

经过一系列**初等行变换**化成阶梯阵

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ \mathbf{0} & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & d_{r+1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$.

1° $d_{r+1} \neq 0$ 时, 方程组 (1) 无解.

2° $d_{r+1} = 0$ 时, 方程组 (1) 有解.

例3 解下列方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

解：对方程组的增广矩阵作初等行变换

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

从最后一行知，原方程组无解。

证明

显然，方程组在化成阶梯形方程组之后，

方程的个数不会超过原方程组中方程的个数，

即 $r \leq s < n$.

由 $r < n$ 得知，它的解不是唯一的，因而必有非零解.

小结和作业

1. 请叙述线性方程组的三种初等变换以及其作用.
2. 请叙述定理1?
3. 作业见学习通.